حل ملزمة أوراق عمل الوحدة الخامسة التكامل

إعداد: محمد عمر الخطيب

Alpha Education Center

الإمارات
THE EMIRATES

الحل

اوراق عمل مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2026/2025

اسم الطالب : ....

المدرسة : ....

الحل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الوحدة الخامسة : التكامل

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل

الوحدة السابعة : طرائق التكامل

الوحدة الخامسة : التكامل /// الدرس الأول : الدوال الاصلية

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x) = 2x$

نقول ان الدالة $f(x) = x^2 + c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x) = 2x$

ونعبرعما سبق بالرموز

$$\int 2x \, dx = x^2 + c$$

ويقرء.... تكامل $2x$ هو $x^2 + c$

او التكامل غير المحدود للدالة $f'(x) = 2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x) = x^2 + c$

---

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t) = 3t^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(t) = t^3 + c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(t) = 3t^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(t) = 3t^2$ هي الدالة $F(t) = t^3 + c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3t^2 \, dt = t^3 + c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int 1 \, dx = x + c \Longrightarrow F(x) = x + c$$

---

(3) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t) = 1$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$F(t) = \int f(t)\, dt = \int 1 \, dt = t + c \Longrightarrow F(t) = t + c$$

---

(4) اوجد الدالة الاصلية للدالة $g(\theta) = \cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

$$G(\theta) = \int g(\theta)\, d\theta = \int \cos\theta \, d\theta = \sin\theta + c \Longrightarrow G(\theta) = \sin\theta + c$$

1) اذا كانت $F(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(أ) اوجد $F'(x)$

$$F(x)=\ln|\sec x+\tan x|$$

$$F'(x)=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}.$$

$$=\frac{\sec x(\cancel{\tan x+\sec x})}{\cancel{\sec x+\tan x}}=\sec x.$$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

$$F(x)=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

---

2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$ ، $x>0$

$$F'(x)=2\cdot\ln(ex)+2x\cdot\frac{e}{ex}-3$$

$$=2\ln(ex)+2-3$$

$$=2\ln(ex)-1.$$

$$=2(\ln e+\ln x)-1$$

$$=2(1+\ln x)-1$$

$$=2+2\ln x-1$$

$$=1+2\ln x$$

$$=1+\ln x^2 \ \# \quad \Rightarrow \quad F'(x)=f(x)$$

∴ الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$.

---

3) اذا كانت الدالة $F(x)=2\ln\left|x^3+5x+1\right|+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\dfrac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$ فاوجد قيمة الثابت b

$$F'(x)=f(x)$$

$$2\cdot\frac{3x^2+5}{x^3+5x+1}=\frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$$

$$\frac{6x^2+10}{x^3+5x+1}=\frac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$$

$\boxed{b=6}$ بالمقارنة

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هو التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

نظرية : اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $G(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان الفرق بين الدالتين ثابت

أي ان $G(x) = F(x) + c$ او $G(x) - F(x) = c$ حيث c عدد ثابت.

(1) بين ان الدالة $F(x) = x^2(x^2+4)$ والدالة $G(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دوال اصلية لنفس الدالة

$G(x) - F(x)$

$= \frac{1}{4}(2x^2+4)^2 - x^2(x^2+4)$

$= \frac{1}{4}(4x^4+16x^2+16) - x^4 - 4x^2$

$= \cancel{x^4} + \cancel{4x^2} + 4 - \cancel{x^4} - \cancel{4x^2}$

$= 4$.

يمكن حل السؤال بايجاد كل من G' ، F' . وتوضيح ان المشتقات متساوية .

بما ان الفرق بين الدالتين ثابت لذلك كل منهم دالة اصلية للدالة $f(x)$

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x) \quad \text{و} \quad \int\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]dx = f(x) + c$$

(2) اذا كان $g(x) = x\sin x$ ، اوجد

يجب اضافة ثابت التكامل c

(a) $\int g'(x)\,dx = g(x) + c = x\sin x + c$ التكامل يلغي المشتقة

(b) $\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = g(x) = x\sin x$ المشتقة تلغي التكامل

بدون c

قواعد التكامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int a\,dx = ax + c$

(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$ $\qquad * \int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(3) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad * \int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(5) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(6) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(7) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

(8) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

(9) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

(10) $\int e^x\,dx = e^x + c$ $\qquad * \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\qquad * \int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

(11) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\qquad * \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(12) $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$ $\qquad * \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ $\qquad * \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

(14) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ $\qquad * \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}(\frac{x}{a}) + c$

خواص التكامل غير المحدود

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب او القسمة

(1) $\int k\; f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int -3 \quad dx \quad = -3x + c.$

---

(2) $\int 2x^4 \quad dx \quad = 2\frac{x^5}{5} + c = \frac{2}{5}x^5 + c.$

---

(3) $\int x^{\frac{-4}{3}} \quad dx \quad = \frac{x^{-1/3}}{-1/3} + c = -3x^{-1/3} + c.$

---

(4) $\int \frac{1}{x^2} \quad dx \quad = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c.$

---

(5) $\int \sqrt[3]{x^2} \quad dx \quad = \int x^{2/3} dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

---

(6) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \quad dx \quad = \int 2x^{-1/5} dx = 2\frac{x^{4/5}}{4/5} + c = 2\cdot\frac{5}{4}x^{4/5} + c = \frac{5}{2}x^{4/5} + c.$

---

(7) $\int t\sqrt{t} \quad dt \quad = \int t\cdot t^{1/2} dt = \int t^{3/2} dt = \frac{2}{5}t^{5/2} + c.$

---

(8) $\int \frac{1}{2y} \quad dy \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2}\ln|y| + c.$

---

(9) $\int (2x-1)^4 \quad dx \quad = \frac{(2x-1)^5}{5(2)} + c = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + c.$

---

(10) $\int \frac{6}{(3x+2)^2} \quad dx \quad = \int 6(3x+2)^{-2} dx = 6\frac{(3x+2)^{-1}}{-1(3)} + c = \frac{-2}{(3x+2)} + c$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

(2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (4x^3 - 3x) \quad dx$ $= 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + c = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c$

---

(2) $\int (3x^2 - \sqrt{x} + 2) \quad dx$

$= \int (3x^2 - x^{1/2} + 2)\, dx$

$= \frac{3x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

$= x^3 - \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

---

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x}) \quad dx$ $= \int x^{-1/3} - 5x^{-4} + \frac{1}{x}\, dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 5\frac{x^{-3}}{-3} + \ln|x| + c$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{5}{3x^3} + \ln|x| + c$

---

(4) $\int t^2(t^3 - \frac{1}{t^2}) \quad dt$ $= \int (t^5 - 1)\, dt$

$= \frac{t^6}{6} - t + c$

$= \frac{1}{6}t^6 - t + c$

---

(5) $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{-4}{3}} - 3) \quad dx$ $= \int x^{-2/3} - 3x^{2/3}\, dx$

$= 3x^{1/3} - 3 \cdot \frac{3}{5}x^{5/3} + c$

$= 3x^{1/3} - \frac{9}{5}x^{5/3} + c$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int \frac{x^4-3x+1}{x^2} \quad dx$

استخدم التوزيع

$= \int \frac{x^4}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \, dx$

$= \int x^2 - \frac{3}{x} + x^{-2} \, dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c$

---

(2) $\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}} \quad dx$

$= \int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}} - \frac{3}{x^{2/3}} \, dx$

$= \int x^{-1/3} - 3x^{-2/3} \, dx$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3 \cdot 3x^{1/3} + c$

$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 9x^{1/3} + c$

---

(3) $\int \frac{x+2x^{3/4}}{x^{5/4}} dx$

$= \int \frac{x}{x^{5/4}} + \frac{2x^{3/4}}{x^{5/4}} \, dx$

$= \int x^{-1/4} + 2x^{-1/2} \, dx$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c$

$= \frac{4}{3}x^{3/4} + 4x^{1/2} + c$

---

(4) $\int \frac{t^2-1}{1-t} \quad dt$

$= \int \frac{\overset{-1}{\cancel{(t-1)}}(t+1)}{\cancel{1-t}} \, dt$

$= \int -(t+1) \, dt$

$= -\left(\frac{t^2}{2} + t\right) + c$

$= -\frac{1}{2}t^2 - t + c$

---

(5) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad dx$

مرافق

$= \int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \, dx$

$= \int \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}} \, dx$

$= \int \sqrt{x} + 2 \, dx$

$= \int x^{1/2} + 2 \, dx$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x) \quad dx = -3\cos x - \frac{\sin 4x}{4} + c$

---

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx = \int \sec x \tan x - \sec^2 x \, dx$

$= \sec x - \tan x + c$

---

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx = \frac{\sec 2x}{2} - \frac{\cot 5x}{5} + c$

متطابقة

(4) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx = \int \frac{1}{\cos x \cot x} dx$

$= \int \sec x \tan x \, dx$

$= \sec x + c$.

---

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx$

$= \int (\csc x \sec x \tan x - \csc x \cot x) dx$

$= \int (\sec^2 x - \csc x \cot x) dx = \tan x + \csc x + c$

توضيح

$\csc x \cdot \sec x \tan x$

$= \frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x$.

---

(6) $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad dx$

$= \int 2 \sec x \tan x \, dx$

$= 2\sec x + c$.

توضيح

$\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$

$= 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

$= 2\sec x \cdot \tan x$

---

(7) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx$

$= \int \csc x \cdot \cot x \, dx$

$= -\csc x + c$.

توضيح

$\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \csc x \cot x$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^x + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) \quad dx$ $= e^x + \ln|x| - \frac{\sin 2x}{2} + x + c.$

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) \quad dx$

$= \int 2x + x^{3/2} + e^{2x} - \sin 3x \ dx$

$= x^2 + \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + c$

$= x^2 + \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} \cos 3x + c$

(3) $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) \quad dx$

$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{(e^{2x})^{1/2}} - x \ dx$

$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{e^x} - x \ dx$

$= \int \frac{2}{x} + e^{-x} - x \ dx$

$= 2\ln|x| - e^{-x} - \frac{x^2}{2} + c$

(4) $\int e^x(2e^x - 3) \quad dx$

$= \int 2e^{2x} - 3e^x \ dx$

$= 2\frac{e^{2x}}{2} - 3e^x + c$

$= e^{2x} - 3e^x + c$

(5) $\int (e^x - e^{-x})^2 \quad dx$

$= \int (e^x)^2 - 2e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 \ dx$

$= \int e^{2x} - 2 + e^{-2x} \ dx$

$= \frac{e^{2x}}{2} - 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

$= \frac{1}{2} e^{2x} - 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + c.$

(6) $\int \frac{e^x + 3}{e^x} \quad dx$ $= \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \ dx = \int 1 + 3e^{-x} \ dx = x - 3e^{-x} + c$

(7) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} \quad dx$ $= \int \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}} \ dx = \int e^{-x} - 2 \ dx = -e^{-x} - 2x + c.$

اوجد التكاملات التالية:

البسط مشتقة المقام

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\ dx = \ln|e^x+3|+c$

(2) $\int \frac{3}{3x-2}\ dx = \ln|3x-2|+c$

نحتاج تعديل ليصبح البسط مشتقة المقام

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c.$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\ dx = -7\int \frac{1}{2x+1}\ dx = \frac{-7}{2}\int \frac{2}{2x+1}\ dx = \frac{-7}{2}\ln|2x+1|+c$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\ dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x}\ dx = \ln|x^2+x|+c.$

(6) $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\ dx = 5\int \frac{x^3}{x^4-5}\ dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-5}\ dx = \frac{5}{4}\ln|x^4-5|+c.$

(7) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\ dx = \ln|\tan x|+c.$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx = \ln|e^x+e^{-x}|+c$

(9) $\int \cot x\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ dx = \ln|\sin x|+c.$

(10) $\int \tan 2x\ dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\ dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}\ dx = \frac{-1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

(11) $\int (\cot x+\tan x)\ dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\ dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx$

$= \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c$

$= \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + c = \ln|\tan x|+c.$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{2x+1}\ dx = \frac{\overset{\text{خطية}}{e^{2x+1}}}{2} + c = \frac{1}{2} e^{2x+1} + c$

مشتقة الاس موجودة

(2) $\int \cos x\, e^{\boxed{\sin x}}\ dx = e^{\sin x} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\boxed{\sqrt{x}}}\ dx = e^{\sqrt{x}} + c.$

---

(4) $\int x\, e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$

---

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\ dx$

$= \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\ dx$

$= \int \sec^2 x\ e^{\tan x}\ dx$

$= e^{\tan x} + c.$

---

(6) $\int e^{x^2+\ln x}\ dx$

$= \int e^{x^2} \cdot e^{\ln x}\ dx$

$= \int e^{x^2} \cdot x\ dx$

$= \int x\, e^{x^2}\ dx$

$= \frac{1}{2}\int 2x\ e^{x^2}\ dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$

(2) $\int \frac{x}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + c$

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \tan^{-1}x + c$

(4) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx = \int \frac{5}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$= \frac{5}{2}\sin^{-1}x + c$

(5) $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx$

$= \int \frac{-2}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx$

$= \int \frac{-2}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$= \int \frac{-2}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$= -2\sec^{-1}x + c$

أو

$= 2\csc^{-1}x + c$

اوجد التكاملات التالية

ملاحظة : راجع المتطابقات واحفظها

(1) $\int \sin^2 5x + \cos^2 5x \quad dx = \int 1 \quad dx = x + c$

(2) $\int \tan^2 x \quad dx = \int \sec^2 x - 1 \quad dx = \tan x - x + c$

(3) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx = \int \cos 2x \, dx = \frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{1}{2} \sin 2x + c$

(4) $\int 2 \sin x \cos x \quad dx = \int \sin 2x \, dx = \frac{-\cos 2x}{2} + c = \frac{-1}{2} \cos 2x + c$

(5) $\int \sin^2 x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$

★ متطابقة

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

ضعف الزاوية

(6) $\int \cos^2 3x \quad dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) \, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6} + c\right)$

$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + c$

★ متطابقة

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

(7) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} \quad dx$

ممكن من السؤال متطابقة او المرافق

$= \int \frac{1}{2 \cos^2 x} \, dx$

$= \frac{1}{2} \int \sec^2 x \, dx$

$= \frac{1}{2} \tan x + c$

★ متطابقة

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \quad dx$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} \, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}$$

$$= \int 1+\cos x \quad dx$$

$$= x + \sin x + c.$$

(2) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} \quad dx$

$$= \int \frac{(\sin x+\cos x)^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{\sin x+\cos x}} \, dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x) \, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c.$$

توضيح

$$1 + \sin 2x$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$$

$$= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

(3) $\int \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \quad dx, \qquad x \in [0,\pi]$

$$= \int \sqrt{\frac{2\sin^2 x}{2}} \, dx$$

$$= \int |\sin x| \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx = -\cos x + c.$$

توضيح

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad dx, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

$$= \int \frac{\tan}{\sqrt{\cos^2 x}} \, dx$$

$$= \int \frac{\tan x}{|\cos x|} \, dx$$

في الربع الثاني $\cos x$ سالب

$$= \int \frac{\tan x}{-\cos x} \, dx$$

$$= \int -\sec x \tan x \, dx$$

$$= -\sec x + c.$$

تكاملات خاصة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x} \quad dx$

مرافق

توضيح

$\frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x}$

$= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$

$= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \sec^2 x - \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec^2 x - \sec x \tan x$

$= \int \sec^2 x - \sec x \tan x \, dx$

$= \tan x - \sec x + c$

---

(2) $\int \sec x \quad dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

البسط مشتقة المقام

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int \csc x \quad dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x} dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$

البسط مشتقة المقام

---

(4) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} \quad dx \times \frac{e^x}{e^x}$

$= \int \frac{e^x}{e^{-x} \cdot e^x + e^x} dx = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln|1+e^x| + c$

---

(5) $\int \frac{1}{e^x+1} \quad dx \quad \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$

$= \int \frac{1}{e^x \cdot e^{-x} + e^{-x}}$

$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

$= -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$

$= -\ln|1+e^{-x}| + c$

مساعدة:

اضرب و اقسم على e^{-x}

او اضف واطرح للبسط e^x

(1) اوجد التكاملات التالية

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$(a)\quad \int \frac{2x+3}{x+7}\ dx$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x+7 & 2x+3 \\ & \ominus\ 2x \mp 14 \\ \hline & -11 \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{11}{x+7}\ dx$$

$$= 2x - 11 \ln|x+7| + c$$

$(b)\quad \int \frac{x^2+2}{x^2+1}\ dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+1 & x^2+2 \\ & \ominus\ x^2 \mp 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{1}{x^2+1}\ dx$$

$$= x + \tan^{-1} x + c.$$

يمكن حل السؤال بالطريقة التالية ايضاً)

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = \frac{x^2+1+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

الحل بالتخمين

تم دراسته بالتفصيل في اوراق السابقة.

$(a)\quad f(x) = 2x\cos x^2 \quad = \frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right)$

$$\int 2x \cos x^2\ dx = \int \frac{d}{dx}\left(\sin x^2\right)\ dx = \sin x^2 + c.$$

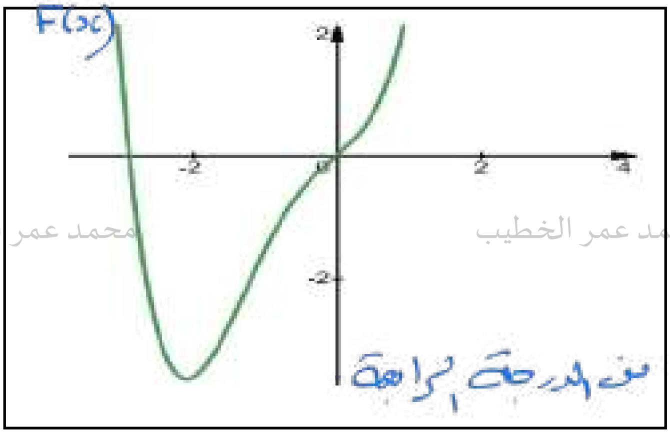
$$\therefore\ F(x) = \sin^2 x + c.$$

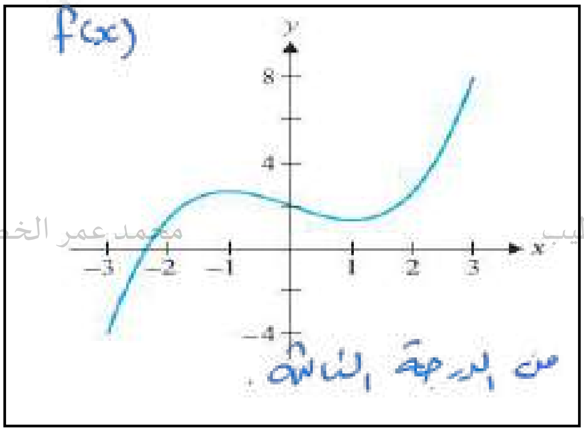
$(b)\quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x \quad = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\ \sin x\right]$

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)dx = \int \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\ \sin x\right] dx =$$

$$= \sqrt{x}\ \sin x + c \Rightarrow F(x) = \sqrt{x}\ \sin x + c$$

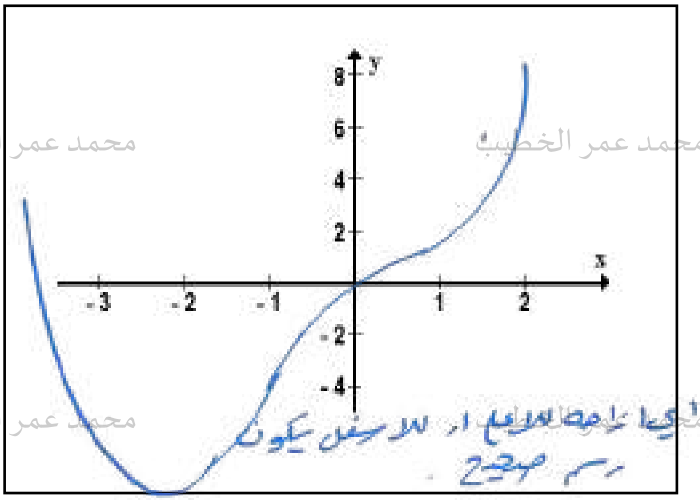
1) عين الدالة $f(x)$ وعين الدالة الاصلية لها



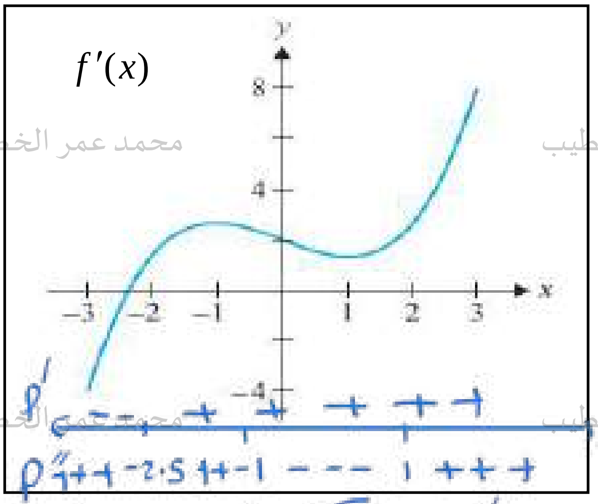


يوجد اجابات كثيرة
صحيحة خرى

2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$

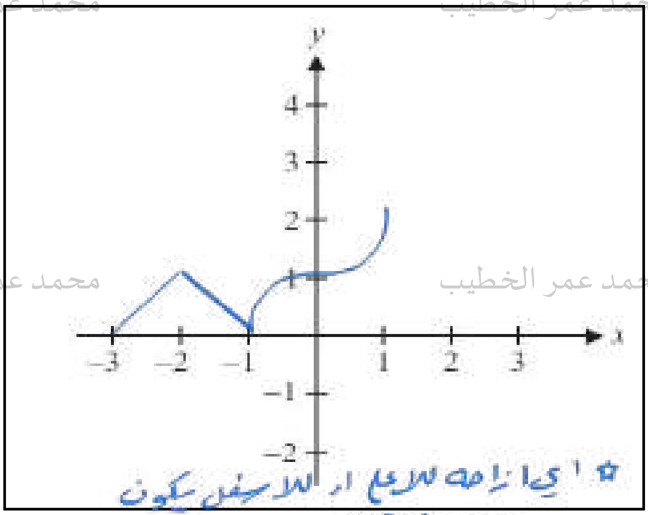


أي إزاحة للاعلى او للاسفل يكون
رسم صحيح

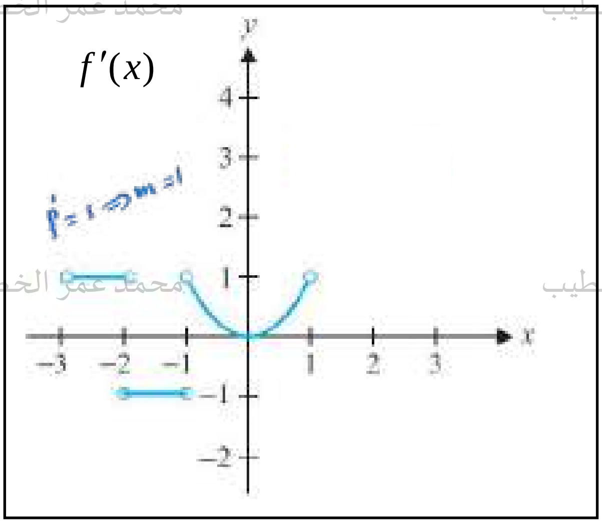


يوجد اجابات كثيرة صحيحة
ويفضل ان تكون الدالة
الاصلية متصلة

3) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$



☆ أي إزاحة للاعلى او للاسفل يكون
رسم صحيح



التكاملات المحدودة

سيتم مناقشة التكامل المحدود بشكل موسع في الدرس الرابع

اوجد قيمة كل مما يلي

يمكنك التأكد من الجواب باستخدام الآلة الحاسبة .

(1) $\int_{1}^{3}(2x-1)\,dx = \left. x^2 - x \right]_{1}^{3} = (3^2-3)-(1^2-1) = 6$.

---

(2) $\int_{0}^{2}3x(x+2)\,dx = \int_{0}^{2} 3x^2+6x \; dx$

$= \left. x^3 + 3x^2 \right]_{0}^{2} = 20 - 0 = 20$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2} e^x\,dx = \left. e^x \right]_{0}^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^{0} = 2 - 1 = 1$.

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \left. \tan^{-1}x \right]_{0}^{1} = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left. \frac{1}{2}\ln|x^2+1| \right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

---

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx = \left. \tan x \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

---

(7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x - \cos 3x\,dx = \left. \frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} \right]_{0}^{\pi/2}$

$= \left(-\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3}\right) - \left(\frac{-\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right) = \frac{4}{3}$

المعادلات التفاضلية

الدالة الاصلية

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x) = 3x^2 - e^x$

$$f(x) = \int 3x^2 - e^x \ dx$$

$$= x^3 - e^x + c$$

---

(2) $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

$$f(x) = \int \sqrt{x} + \sin 2x \ dx$$

$$= \int x^{1/2} + \sin 2x \ dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\cos 2x}{2} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

$$f(x) = \int \sec^2 x - \csc^2 x \ dx$$

$$= \tan x + \cot x + c$$

---

(4) $f''(x) = 12x + \cos 3x$

$$f'(x) = \int 12x + \cos 3x \ dx$$

$$= \frac{12x^2}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + c_1$$

$$= 6x^2 + \frac{1}{3} \sin 3x + c_1$$

$$f(x) = \int (6x^2 + \frac{1}{3} \sin 3x + c_1) \ dx$$

$$= 6\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) + c_1 x + c_2$$

$$= 2x^3 - \frac{1}{9} \cos 3x + c_1 x + c_2$$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

لايجاد الثابت $\boxed{c}$ نستخدم الشرط

(1) $f'(x) = 3e^x + 2x \qquad f(0) = 4$

$$f(x) = \int 3e^x + 2x \; dx$$

$$= 3e^x + x^2 + c$$

$$f(0) = 4$$

$$\downarrow$$

$$3e^0 + 0 + c = 4$$

$$3 + c = 4$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$\therefore f(x) = 3e^x + x^2 + 1$$

---

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x \qquad f(1) = 4$

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2} + 2x \; dx$$

$$= \int x^{-2} + 2x \; dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + x^2 + c$$

$$= \frac{-1}{x} + x^2 + c$$

$$f(1) = 4$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{1} + 1 + c = 4$$

$$\boxed{c = 4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{-1}{x} + x^2 + 4$$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x \qquad f(\frac{\pi}{4}) = -1$

$$f(x) = \int \sec^2 x \; dx$$

$$= \tan x + c$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\downarrow$$

$$\tan\frac{\pi}{4} + c = -1$$

$$1 + c = -1$$

$$\boxed{c = -2}$$

$$\therefore f(x) = \tan x - 2$$

---

(4) $f'(x) = \cos x + \sin x \qquad f(\pi) = 1$

$$f(x) = \int \cos x + \sin x \; dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

$$f(\pi) = 1$$

$$\downarrow$$

$$\sin\pi - \cos\pi + c = 1$$

$$0 - -1 + c = 1$$

$$1 + c = 1$$

$$c = 0$$

$$\therefore f(x) = \sin x - \cos x$$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x) = 12x^2 + 4e^{2x}$ $f(0) = 3$, $f'(0) = 2$

$$f'(x) = \int 12x^2 + 4e^{2x} \, dx$$

$$= 12\frac{x^3}{3} + 4\frac{e^{2x}}{2} + c_1$$

$$= 4x^3 + 2e^{2x} + c_1$$

$f'(0) = 2$

$0 + 2e^0 + c_1 = 2$

$2 + c_1 = 2$

$\boxed{c_1 = 0}$

$\therefore f'(x) = 4x^3 + 2e^{2x}$

$$f(x) = \int 4x^3 + 2e^{2x} \, dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{e^{2x}}{2} + c_2$$

$$= x^4 + e^{2x} + c_2$$

$f(0) = 3$

$0 + e^0 + c_2 = 3$

$1 + c_2 = 3$

$\boxed{c_2 = 2}$

$\therefore f(x) = x^4 + e^{2x} + 2$

---

(2) $f''(t) = 2t + 2$ $f(0) = 2$, $f(3) = 2$

$$f'(t) = \int 2t + 2 \, dt$$

$$= t^2 + 2t + c_1$$

لايمكن استخدام احد الشروط الآن.

$$f(t) = \int t^2 + 2t + c_1 \, dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t^2 + c_1 t + c_2$$

$f(0) = 2$

$\boxed{c_2 = 2}$

$f(3) = 2$

$\frac{1}{3}(3)^3 + 3^2 + c_1(3) + c_2 = 2$

$9 + 9 + 3c_1 + 2 = 2$

$3c_1 = -18$

$\boxed{c_1 = -6}$

$\therefore f(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 - 6t + 2$

التطبيقات

الدالة المكانية ← دالة السرعة المتجهة ← دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية → دالة السرعة المتجهة → دالة التسارع

بالتكامل

1) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10\,t+5$ حيث $s(0)=10$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$
$$= \int 10t+5 \ dt .$$
$$= 5t^2+5t+c$$

$$s(0) = 10$$
$$c = 10$$
$$\therefore \ s(t) = 5t^2+5t+10$$

---

2) حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$
$$= \int 3e^{-t}-2 \ dt$$
$$= 3\frac{e^{-t}}{-1} - 2t+c$$
$$= -\frac{3}{e^t} - 2t+c.$$

$$s(0) = 0$$
$$\frac{-3}{e^0} - 0 + c = 0$$
$$-3+c=0$$
$$c=3 .$$
$$\therefore \ s(t) = \frac{-3}{e^t} - 2t+3 .$$

---

3) حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$
$$= \int t^2+1 \ dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3+t+c .$$

$$v(0) = 4$$
$$c = 4$$
$$v(t) = \frac{1}{3}t^3+t+4$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$
$$= \int \frac{1}{3}t^3+t+4 \ dt$$
$$= \frac{1}{3}\,\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 4t+c$$
$$= \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t+c$$

$$s(0) = 0$$
$$c = 0$$
$$\therefore \ s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 4t$$

(1) حدد الدالة المكانية لدالة التسارع $a(t)=3\sin t$ حيث $s(0)=0, v(0)=4$

$v(t) = \int a(t)\, dt$

$= \int 3\sin t \;\, dt$

$= -3\cos t + c_1$

$v(0) = 4$

$-3\cos 0 + c_1 = 4$

$-3 + c_1 = 4$

$c_1 = 7$

$v(t) = -3\cos t + 7$

$s(t) = \int v(t)\, dt$

$= \int -3\cos t + 7 \;\, dt$

$= -3\sin t + 7t + c_2$

$s(0) = 0$

$c_2 = 0$

$\therefore \; s(t) = -3\sin t + 7t$

---

(2) سقط جسم من ارتفاع برج الشيخ خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

$a(t) = -9.8 \quad , \; v(0) = -30 \; , \; s(0) = 828$

$v(t) = \int a(t)\, dt$

$= \int -9.8\, dt$

$= -9.8t + c_1$

$v(0) = -30$

$c_1 = -30$

$v(t) = -9.8t - 30$

$s(t) = \int -9.8t - 30 \;\, dt$

$= -4.9t^2 - 30t + c_2$

$s(0) = 828$

$c_2 = 828$

$s(t) = -4.9t^2 - 30t + 828$

$s(10) = -4.9(10)^2 - 30(10) + 828$

$= 38\ m$

---

(3) قذف جسم افقياً للأعلى من ارتفاع $80\ ft$ اذا كان تسارع الجسم ثابت هو $a(t)=-32\ ft/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $64\ ft/s$ ، اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

$a(t) = -32 \; , \; v(0) = 64 \; , \; s(0) = 80$

$v(t) = \int -32\, dt$

$= -32t + c_1$

$v(0) = 64$

$c_1 = 64$

$v(t) = -32t + 64$

$s(t) = \int -32t + 64 \;\, dt$

$= -16t^2 + 64t + c_2$

$s(0) = 80$

$c_2 = 80$

$s(t) = -16t^2 + 64t + 80$

لايجاد اقصى ارتفاع نجد الزمن عندما $v=0$

$-32t + 64 = 0$

$t = 2$

اقصى ارتفاع هو $s(2) = 144\ ft$

(1) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

★ يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة

معلومات السؤال

$a(t) = g$

$v(0) = 20$

$v(4) = 60$

$s(0) = 0$

$v(t) = \int a(t)\,dt$

$= \int g\,dt$

$= gt + c_1$

الشروط

$v(0) = 20$

$\boxed{c_1 = 20}$

$v(t) = gt + 20$

$v(4) = 60$

$4g + c_1 = 60$

$4g + 20 = 60$

$g = 10$

$v(t) = 10t + 20$

$s(t) = \int 10t + 20\,dt$

$= 5t^2 + 20t + c_2$

$s(0) = 0$

$c_2 = 0$

$s(t) = 5t^2 + 20t$

$s(5) = 225$

---

(2) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t) = -s(t)$

حيث $s(0) = e$ فأوجد دالة الوضع $s(t)$

★ سؤال من خارج الكتاب

$v(t) = -s(t)$

$\downarrow$

$s'(t) = -s(t)$

بالقسمة على $s(t)$

$\frac{s'(t)}{s(t)} = -1$

$\int \frac{s'(t)}{s(t)}\,dt = \int -1\,dt$

$\ln|s(t)| = -t + c$

$s(t) = e^{-t+c}$

$s(0) = e$

$e^{0+c} = e$

$c = 1$

$s(t) = e^{-t+1}$

1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

$f'(x) = m = 2x \quad , \quad f(2) = 5$

$f(x) = \int 2x \; dx$

$= x^2 + c.$

$f(2) = 5$

$4 + c = 5$

$c = 1$

$\therefore \; f(x) = x^2 + 1.$

2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 6x \; , \; f'(0) = 0 \; , \; f(0) = 1$

$f'(x) = \int 6x \; dx$

$= 3x^2 + c_1.$

$f'(0) = 0$

$c_1 = 0$

$\therefore \; f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2 \; dx$

$= x^3 + c_2.$

$f(0) = 1$

$c_2 = 1$

$f(x) = x^3 + 1.$

3) يكلف طباعة الكتاب الأول 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من نفس النوع بالعلاقة $c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}$ ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب. السؤال من خارج الكتاب

$c'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}. \quad , \quad c(1) = 1600$

$c(x) = \int c'(x) \; dx$

$= \int \dfrac{200}{\sqrt{x}} \; dx$

$= \int 200 \, x^{-1/2} \; dx$

$= 200 \cdot 2 x^{1/2} + c$

$= 400\sqrt{x} + c.$

$c(1) = 1600$

$400\sqrt{1} + c = 1600$

$c = 1200$

$c(x) = 400\sqrt{x} + 1200$

$c(400) = 400\sqrt{400} + 1200$

$= 9200$ درهم

خزان للماء يحتوي على 288 لتر وتتغير كمية الماء في الخزان بمعدل $f(t)=4t-t^2$ لتر في الدقيقة

(1) اكتب المعادلة التفاضلية التي تنمذج معدل كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

$v'(t) = 4t - t^2$, $v(0) = 288$.

---

(2) اوجد كمية الماء $v(t)$ بالخزان عند اي زمن .

$v(t) = \int v'(t)\, dt$

$= \int 4t - t^2\, dt$

$= 2t^2 - \frac{t^3}{3} + c$

$v(0) = 288$

$C = 288$

$v(t) = 2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288$

---

(3) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

$v(9) = 2(9)^2 - \frac{1}{3}(9)^3 + 288 = 207$ لتر.

---

(4) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

$v(0)$

$2t^2 - \frac{1}{3}t^3 + 288 = 0$

$6t^2 - t^3 + 864 = 0$

$-t^3 + 6t^2 + 864 = 0$

$t^3 - 6t^2 - 864 = 0$

$t = 12$ min .

---

(5) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

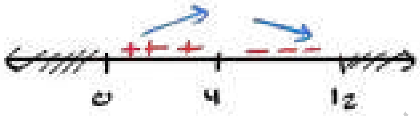
$v(t)$. حجم الماء في الخزان

$v'(t) = 4t - t^2$

$v'(t) = 0$

$4t - t^2 = 0$

$t = 0, \quad t = 4$



حجم الماء يتزايد في الفترة الزمنية (0,4)

حجم الماء يتناقص في الفترة الزمنية (4,12)

الوحدة الخامسة: التكـامل /// الدرس الثاني: المجموع والرمز سيجما

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1 المتتالية العددية : هي مجموعة من الاعداد بترتيب معين

وهي اما تكون منتهيه مثل $2,5,8,11,14,17,20$ او غير منهية مثل $1,1,2,3,5,8,13,21,...$

ويمكن كتابة حدود المتتالية في بعض المتتاليات على شكل دالة مجالها مجموعة الاعداد الطبعية

مثلاً يمكن كتابة حدود المتتالية $2,5,8,11,14,17,20,...$ بالدالة $a_i = 3i - 1$ حيث $i \geq 1$

(2 المتسلسلة العددية : هي مجموع لمتتالية من الحدود

وهي اما تكون منتهيه مثل $2+5+8+11+14$ او غير منهية مثل $1+2+4+8+16+...$

ويمكن كتابة المسلسلة في بعض الاحيان بطريقة مختصرة واستخدام رمز المجموع سيجما $\sum$

مثلاً يمكن كتابة $2+5+8+11+...+59 = \sum_{i=1}^{20} 3i - 1$

اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{7} 2i+1 = \underset{\text{عوض } i=1 \text{ بالدالة } 2i+1}{\underset{\downarrow}{3}} + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \underset{\text{عوض } i=7}{\underset{\downarrow}{15}}$.

---

(2) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3i = (-2) + (-2) + 0 + 10 + \dots + 70$

---

(3) $\sum_{n=1}^{10} (n-2)(n+2) = \sum_{n=1}^{10} n^2 - 4 = -3 + 0 + 5 + \dots + 96$

---

(4) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{100}$

---

(5) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2} i) = 1 + 0 - 1 + 1 + 0 + \dots + 0$

---

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{6}{e^3} + \frac{24}{e^4} + \dots$

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

المتسلسلة الحسابية

اذا كان الفرق بين اي حددين متتالين <u>ثابت</u> تسمى متسلسلة حسابية ويكون الحد العام للمتسلسلة الحسابية هو

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$

حيث a_1 **الحد الأول**

$d = a_2 - a_1$ **الاساس (الفرق)**

(1) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

المتسلسلة حسابية

$a_1 = 3, \ d = 3$

$a_i = 3+(i-1)(3)$

$= 3i$

لمعرفة

افرضها ل i

$3i = 99$

$i = 33$

$$= \sum_{i=1}^{33} 3i$$

---

(2) $2+9+16+23+30+\ldots+149$

المتسلسلة حسابية

$a_1 = 2, \ d = 7$

$a_i = 2+(i-1)(7)$

$= 7i-5$

لمعرفة

افرضها ل i

$7i-5 = 149$

$i = 22$

$$= \sum_{i=1}^{22} 7i-5$$

---

(3) $0.4+0.8+1.2+1.6+2.0+\ldots+20$

المتسلسلة حسابية

$a_1 = 0.4, d = 0.4$

$a_i = 0.4+(i-1)(0.4)$

$= 0.4i$

لمعرفة

افرضها ل i

$0.4i = 20$

$i = 50$

$$= \sum_{i=1}^{50} 0.4i$$

---

(4) $2.05+2.15+2.25+2.35+\ldots+6.75$

المتسلسلة حسابية

$a_1 = 2.05, d = 0.1$

$a_i = 2.05+(i-1)(0.1)$

$= 1.95+0.1i$

لمعرفة

افرضها ل i

$1.95+0.1i = 6.57$

$i = 48$

$$= \sum_{i=1}^{48} 1.95+0.1i$$

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

المتسلسلة الهندسية

اذا كان قسمة اي حدين متتالين <u>ثابت</u>

تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام

للمتسلسلة الهندسية هو

$a_i = a_1 \times r^{i-1}$.

حيث a_1 الحد الأول

$r = \frac{a_2}{a_1}$ الاساس (النسبة)

(1) $1+3+9+27+\ldots+2187$

هندسية

$a_1 = 1$

$r = \frac{3}{1} = 3.$

$a_i = 1.(3)^{i-1}$

$= 3^{i-1}$

$2187 = 3^{i-1}$

$3^7 = 3^{i-1}$

$i-1=7 \Rightarrow i=8$

$= \sum_{i=1}^{8} 3^{i-1}$

---

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots-\frac{1}{1024}$

هندسي

$a_1 = 1/2$

$r = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$

$a_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1}{1024}.$

$i = 10.$

$= \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$

---

(3) $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+\ldots+20\times21 = \sum_{i=1}^{20} i(i+1)$

---

(4) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+\ldots+\sqrt{100-1} = \sum_{i=2}^{100} \sqrt{i-1}$

---

(5) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{400} = \sum_{i=1}^{20} (-1)^{i+1} \frac{1}{i^2}$

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times 3 = 60$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$$

الحد الأول
مكان i=0

عدد الحدود
(n-0)+1

(5) $\sum_{i=0}^{n} a r^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad , r \neq 1$

عدد الحدود
(n-1)+1

او $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a r^i = \frac{ar(1-r^n)}{1-r} \quad , r\neq 1}$

$$\frac{\text{الحد الاول} \times (\text{الاساس} - 1)^{\text{الاس (عدد الحدود)}}}{\text{الاساس} - 1}$$

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

الحد الأول
مكان i=m

$$\sum_{i=m}^{\infty} a r^i = \frac{a\,r^m}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n} (c a_i \pm d b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i$ $\quad$ or $\quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$

(1) اكتب كل الحدود واحسب المجموع

ملاحظة: يمكن استخدام الرمز Σ على الآلة الحاسبة لإيجاد المجموع.

$(a)\quad \sum_{i=1}^{5}(4i+2) = 6+10+14+18+22 = 70.$

$(b)\quad \sum_{i=3}^{7}(i^2+i) = 12+20+30+42+56 = 160.$

---

(2) استخدم قواعد المجموع لحساب

$(a)\quad \sum_{i=1}^{25}3 = 3(25) = 75$

$(b)\quad \sum_{i=1}^{15}(2i-3) = 2\sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1}^{15} 3 = 2\cdot\frac{15(16)}{2} - 3(15) = 195$

$(c)\quad \sum_{i=1}^{20}(5-i) = \sum_{i=1}^{20} 5 - \sum_{i=1}^{20} i = 5(20) - \frac{20(21)}{2} = -110.$

$(d)\quad \sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5) = \sum_{i=1}^{125} i^2 + \sum_{i=1}^{125} i + \sum_{i=1}^{125} 5$

$= \frac{125(126)(251)}{6} + \frac{125(126)}{2} + 5(125) = 667375.$

$(e)\quad \sum_{i=1}^{20} i(i-3) = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3i = \sum_{i=1}^{20} i^2 - 3\sum_{i=1}^{20} i$

$= \frac{20(21)(41)}{6} - 3\,\frac{20(21)}{2} = 2240$

$(f)\quad \sum_{i=1}^{10} i^3 = \left[\frac{10(11)}{2}\right]^2 = 3025.$

استخدم قواعد المجموع لحساب

نجد قيمة الدالة عند $i=0$ ونضيفها لوحدها

(1) $\sum_{\boxed{i=0}}^{100}(5i+2) =$ $2+\sum_{i=1}^{100} 5i+2 = 2+5\,\frac{100(101)}{2}+2(100)$

$= 25452.$

---

(2) $\sum_{i=5}^{20}(5i+2) =$ $\sum_{i=1}^{20} 5i+2 - \sum_{i=1}^{4} 5i+2.$

$= 5\,\frac{20(21)}{2}+2(20) - \left[5\cdot\frac{4(5)}{2}+2(4)\right]$

$= 1032.$

---

(3) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3) =$ $\sum_{i=4}^{20}(i^2-9) = \sum_{i=1}^{20} i^2-9 - \sum_{i=1}^{3} i^2-9.$

$= \frac{20(21)(41)}{6} - 9(20) - \left[\frac{3(4)(7)}{6} - 9(3)\right]$

$= 2703$

---

(4) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+1) =$ $1+\sum_{i=1}^{n}(k^2+1)$

$= 1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n$

---

(5) $\sum_{i=1}^{10} 3\times 2^i =$ $\frac{6(1-2^{10})}{1-2} = 6138$

هندسية

$a_1 = 6$

$r = 2$

عدد الحدود $= 10-1+1 = 10$

---

(6) $\sum_{i=0}^{8} 4\times 2^{-i} =$ $\sum_{i=0}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{4(1-(\frac{1}{2})^9)}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{511}{64}$

هندسية

$a_1 = 4$

$r = \frac{1}{2}$

عدد الحدود $= 8-0+1 = 9$

---

(7) $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} =$ $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{e^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^i = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}$

$= \frac{1}{e-1}$

هندسية غير منتهية.

$a_1 = \frac{1}{e}$

$r = \frac{1}{e}$

1) اذا كان $f(x)=2x-3$ فاوجد

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$$

$f(x)=2x-3$

$f(i)=2i-3$

$$=\sum_{i=1}^{50} f(i)$$

$$=\sum_{i=1}^{50} 2i-3 = 2\cdot\frac{50(51)}{2}-3(50)=2400$$

---

2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ عند

$$x=0.4\ ,0.8\ ,1.2\ ,1.6\ ,2.0\ ,2.4\ ,2.8\ ,3.2\ ,3.6\ ,\ldots,40$$

☆ قيم x هي متتالية حسابية

$a_1=0.4\ ,\ d=0.4$

$a_i=a_1+(i-1)d$

$=0.4+(i-1)(0.4)$

$=0.4i$

☆ لمعرفة متى i الأخيرة

$0.4i=40$

$i=100$

$f(x)=3x+5$

$f(0.4i)$

$=3(0.4i)+5$

$=1.2i+5$

المطلوب

$f(0.4)+f(0.8)+\cdots+f(40)$

$$=\sum_{i=1}^{100} f(0.4i)$$

$$=\sum_{i=1}^{100} 1.2i+5$$

$$=1.2\,\frac{100(101)}{2}+5(100)=6560$$

---

3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاه

$$f(x)=x^2+4x \qquad x=2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,\ldots,100$$

قيم x متتالية

حسابية

$a_1=2\ ,\ d=2$

$a_i=2+(i-1)(2)$

$=2i$

$2i=100$

$i=50$

$\Delta x=4-2=2$

$f(2i)=$

$(2i)^2+4(2i)$

$=4i^2+8i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{50} f(2i)\cdot(2)$$

$$=2\sum_{i=1}^{50}(4i^2+8i)$$

$$=8\ \frac{50(51)(101)}{6}+16\ \frac{50(51)}{2}$$

$$=363\,800$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{5i}{n^2}$

$$=\frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{5}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{5(n+1)}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{5i}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)}{2n}=\frac{5}{2}.$$

عكسيا نستخدم قاعدة لوبتال

---

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n^3}$

$$=\frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$=\frac{2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n^3}$$

$$=\lim\frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$$

$$=\frac{2}{3}$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}+2\frac{i}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}.$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

$$=\lim\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{2}{6}+1$$

$$=\frac{4}{3}.$$

---

(2) $$\sum_{i=1}^{n}2\times 3^{-i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

هندسية

$a_1=2/3$

$r=1/3$

عدد حد

$n-1+1=n$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-1/3}.$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{2/3}$$

$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\times3^{-i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

قاعدة ط

$$=1-0$$

$$=1$$

الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس الثالث: المساحة

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

مثال: المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$ هي تجزئة منتظمة للفترة $[2,10]$

(1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

(2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

(3) $\Delta x_i = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

تسمى كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ فترة جزئية للتجزئة ويكون عدد الفترات الجزئية هو n وعدد عناصر التجزئة هو $n+1$

ملاحظات مهمة

(1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

(2) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

(3) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

(4) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هي الفترة الجزئية السادسة)

(5) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

(6) يمكن ايجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x(i) = a + \dfrac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

$n = 10$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ طول الفترة الجزئية

$= \frac{2-0}{10} = 0.2$

∴ التجزئة

$P = \{0, \overset{+0.2}{0.2}, \overset{+0.2}{0.4}, \dots, 2\}$

ملاحظة عدد عناصر التجزئة هي 11 عنصر.

---

(2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

عدد العناصر 25

$\therefore n = 24$

$\Delta x = \frac{13-1}{24} = \frac{1}{2}$

$P = \{1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 13\}$

---

(3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$P = \{0, \overset{+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, 3\}$

---

(4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

$n = 30$

العنصر السابع هو x_6.

$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

$x_6 = 2 + \frac{5-2}{30}(6)$

$= 2.6$

---

(5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

$n = 40$

الفترة الجزئية العاشرة هي

$[x_9, x_{10}]$

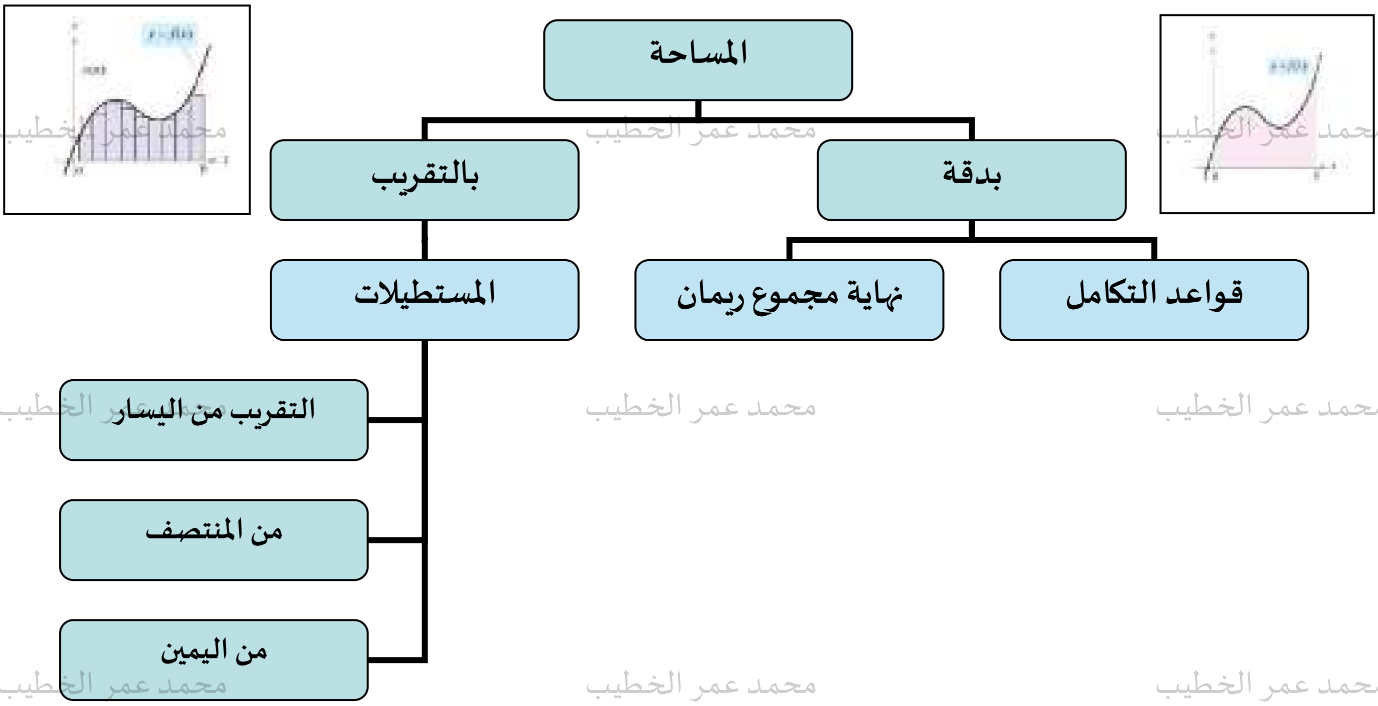
$x_9 = 1 + \frac{3-1}{40}(9) = 1.45$

$x_{10} = 1 + \frac{3-1}{40}(10) = 1.50$

الفترة الجزئية العاشرة هي

$[1.45, 1.50]$

تقريب المساحات



يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

من اليمين
$c_i = x_i$

من المنتصف
$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$

من اليسار
$c_i = x_{i-1}$

طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة التقريب بالمستطيلات :

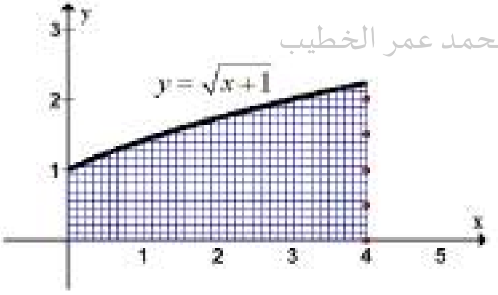
1) التقريب اليساري L (قاعدة النقطة اليسرى)

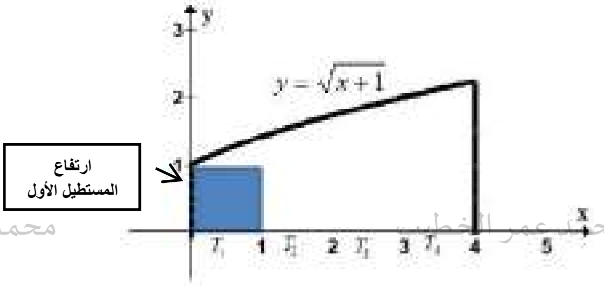
$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

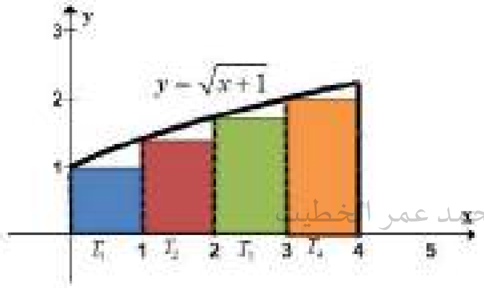
نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى







عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$

عناصر التجزئة $p:0,1,2,3,4$

نقاط القيم (من جهة اليسار) $c_i=0,1,2,3$

$$A\approx A_4=T_1+T_2+T_3+T_4$$

$$=1\times f(c_1)+1\times f(c_2)+1\times f(c_3)+1\times f(c_4)$$
$$=1\times f(0)+1\times f(1)+1\times f(2)+1\times f(3)$$

$=1\times\sqrt{1}+1\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{4}$

$=6.14$

$\therefore A_L=6.14$

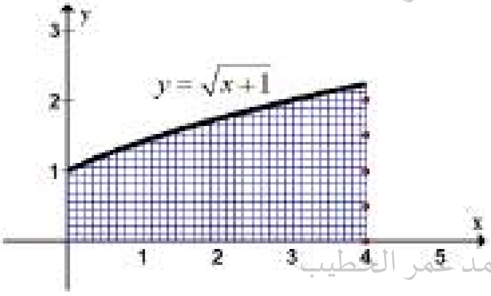
(2) التقريب اليميني R (قاعدة النقطة اليمنى)

$$\boxed{c_i = x_i}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى.

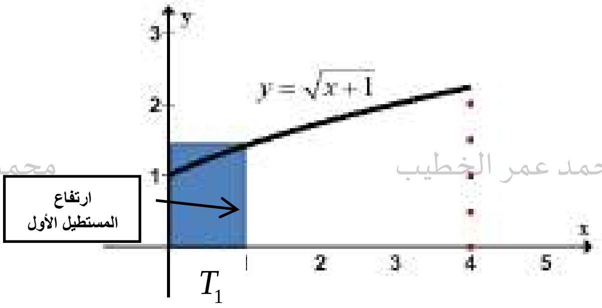
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1$$



عناصر التجزئة $p:0\,,1\,,2\,,3\,,4$

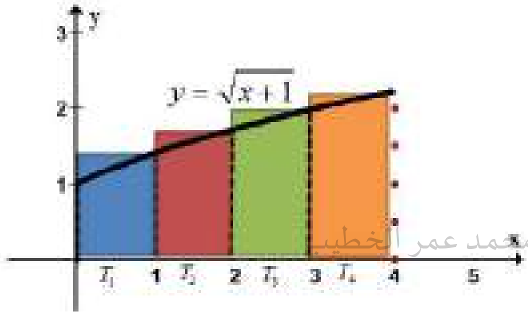
نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i\;=\;1,2,3,4$

$$A\approx A_4=T_1+T_2+T_3+T_4$$
$$=1\times f(1)+1\times f(2)+1\times f(3)+1\times f(4)$$

$$=1\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{3}+1\times\sqrt{4}+1\times\sqrt{5}$$

$$=7.38\,.$$

$$\therefore A_R=7.38\,.$$



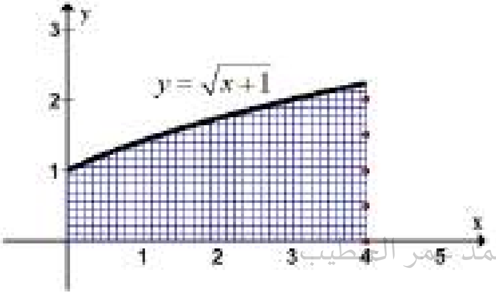
$$\boxed{c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}}$$

(3) التقريب المنتصفي M (قاعدة نقطة المنتصف)

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف

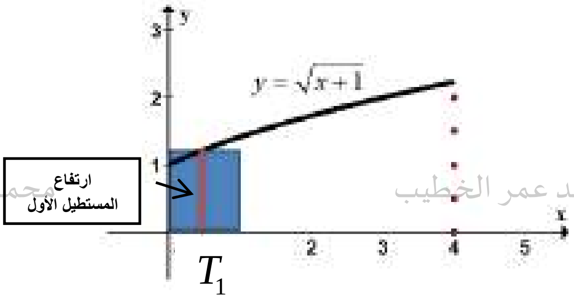
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

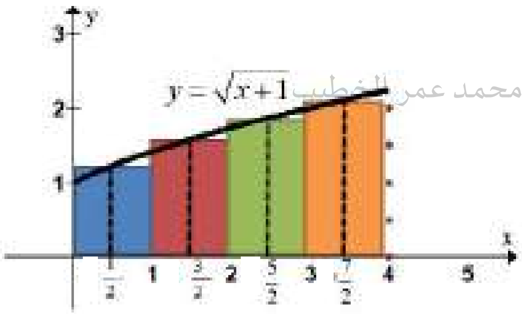
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$



عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i: \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$



$$A \approx A_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$= 1\times f(\frac{1}{2}) + 1\times f(\frac{3}{2}) + 1\times f(\frac{5}{2}) + 1\times f(\frac{7}{2})$$

$$= 1 \times \sqrt{1.5} + 1 \times \sqrt{2.5} + 1 \times \sqrt{3.5} + 1 \times \sqrt{4.5}$$

$$= 6.8$$

$$\therefore A_M = 6.8$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاَ اكتب التجزئة

$n = 4$

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

$C_i = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ (اليسار) وعددها 4.

$AL = \Delta x [f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(1.5)]$

$= \frac{1}{2}[0 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4}]$

$= 1.25$

---

2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$n = 4$

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

$C_i = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ (اليمين) وعددها 4.

$AL = \Delta x [f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(1.5) + f(2)]$

$= \frac{1}{2}[\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + 0]$

$= 1.25$

---

3) قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$n = 4$

$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

$P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$

$C_i = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ (المتوسطات) وعددها 4

$AL = \Delta x [f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{7}{4})]$

$= \frac{1}{2}[0.4375 + 0.9375 + 0.9375 + 0.4375]$

$= 1.375$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

$n = 4$

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$P = \left\{-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \cancel{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$AL = \Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= 1.9$$

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$n = 4$

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$P = \left\{\cancel{-\frac{\pi}{2}}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$AL = \Delta x\left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right]$$

$$= 1.9$$

(1 اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	~~0.0~~	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	~~2.0~~	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

$$A_R = \Delta x\left[f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)\right]$$

$$= 0.2\left[2.2+1.6+1.4+1.6+2.0\right]$$

$$= 1.76$$

(2 اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.5]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	~~0.5~~
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	~~2.4~~

$$A_L = \Delta x\left[f(0)+f(0.1)+f(0.2)+f(0.3)+f(0.4)\right]$$

$$= 0.1\left[2.0+2.4+2.6+2.7+2.6\right]$$

$$= 1.23$$

(3 اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	~~1.0~~	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	~~0.0~~	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

$$A_R = \Delta x\left[f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2)+f(2.2)+f(2.4)+f(2.6)\right]$$

$$= 0.2\left[0.4+0.6+0.8+1.2+1.4+1.2+1.4+1\right]$$

$$= 1.6$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

(1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$$\boxed{c_i = x_i}$$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات
قليل نستخدم طريقة التجزئة
وغير ذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

$$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$c_i = x_i = a + \Delta x\, i$$
$$= 0 + \frac{1}{4} i = \frac{1}{4} i$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} i\right)$$
$$= \frac{1}{2} i$$

$$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} i \cdot \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{16} i$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{16(17)}{2} = 17.$$

---

(2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

$$\Delta x = \frac{4-0}{24} = \frac{1}{6}.$$

$$c_i = x_{i-1} = a + \Delta x(i-1)$$
$$= 0 + \frac{1}{6}(i-1)$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{6}(i-1)$$
$$= \frac{1}{3}(i-1)$$

$$A_L = \sum_{i=1}^{24} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{3}(i-1) \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{24} (i-1)$$
$$= \frac{1}{18}\left[\frac{24(25)}{2} - 24(1)\right] = 15.33.$$

---

(3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$$\boxed{c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$\Delta x = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$c_i = x_{i-\frac{1}{2}} = a + \Delta x\left(i - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 0 + \frac{1}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(c_i) = 2c_i$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$$
$$= i - \frac{1}{2}$$

$$A_M = \sum_{i=1}^{8} f(c_i)\,\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{8} \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}.$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} \left(i - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8(9)}{2} - 8\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 16$$

هذا حل تقريبي

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x)\geq 0$ فان المساحة A تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i=x_i$

واذا كانت $f(x)\leq 0$ فان المساحة A فوق منحنى الدالة وتحت محور السينات تعطى بالصيغة

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}-f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}-f(x_i)\Delta x$$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x)=2x$ وفوق محور السينات على الفترة $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$$\Delta x=\frac{3}{n}$$

$$c_i=x_i=a+\Delta x\, i$$

$$=1+\frac{3}{n}i$$

$$f(c_i)=2c_i$$

$$=2\left(1+\frac{3}{n}i\right)$$

$$=2+\frac{6}{n}i$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{6}{n}i\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}2+\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$=\frac{3}{n}\left[2n+\frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=6+\frac{9(n+1)}{n}$$

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}6+\frac{9(n+1)}{n}=6+9=15$$

$$\therefore A=15$$

1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

$\Delta x = \frac{4}{n}$

$c_i = x_i = 0 + \Delta x\, i$

$= 0 + \frac{4}{n} i$

$= \frac{4}{n} i$

$f(c_i) = 3c_i^2$

$= 3\left(\frac{4}{n} i\right)^2$

$= 3 \cdot \frac{16}{n^2} i^2$

$= \frac{48}{n^2} i^2$

$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{48}{n^2} i^2 \cdot \frac{4}{n}$.

$= \frac{192}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$

$= \frac{192}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

$= \frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{32(n+1)(2n+1)}{n^2}$

$= 32(2)$

$= 64 \qquad \therefore\ A = 64$.

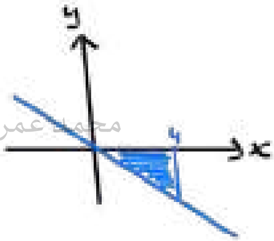
---

2) اوجد المساحة فوق الدالة $f(x)=-2x$ وتحت محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

بما ان الدالة سالبة على الفترة [0,4]

فان



$\Delta x = \frac{4}{n}$

$c_i = x_i = 0 + \Delta x\, i$

$= 0 + \frac{4}{n} i$

$= \frac{4}{n} i$

$f(c_i) = -2c_i$

$= -2\left(\frac{4}{n} i\right)$

$= -\frac{8}{n} i$

$A_n = \sum_{i=1}^{n} -f(c_i)\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} -\left(-\frac{8}{n} i\right) \cdot \frac{4}{n}$.

$= \frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{32}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{16(n+1)}{n}$.

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{16(n+1)}{n} = 16$.

(1) اذا كان $f(x)=2x-2x^2$ دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(n-1)}{3n^2} = \frac{2}{3}.$$

∴ المساحة $= \frac{2}{3}$.

---

(2) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\ge 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^2$

فاوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

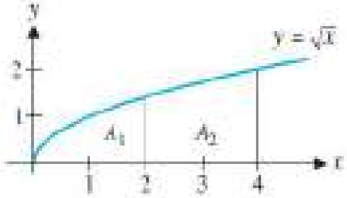
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

∴ المساحة $= \frac{1}{3}$.

☆

(3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\;\dfrac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{2}{n}.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2+\frac{2}{n}i}\cdot\frac{2}{n} \Rightarrow \Delta x = \frac{2}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

$$\therefore\ b-a=2$$

ا | او

$a=0$
$b=2$

$x_i = 0+\frac{2}{n}i$
$= \frac{2}{n}i$

$f(x_i)=\sqrt{x_i}$
$= \sqrt{\frac{2}{n}i}$

هذه ليس صحيح

$a=2$
$b=4$

$x_i = 2+\frac{2}{n}i$

$f(x_i)=\sqrt{x_i}$

$= \sqrt{2+\frac{2}{n}i}$

هذه صحيح .

∴ الفترة $[2,4]$ وليس $[0,2]$

∴ المساحة A_2 .

الوحدة الخامسة : التكـامل /// الدرس الرابع: التكامل المحدود

التكـامل المحدود

ملاحظة: تم تقديم جزء من الدرس الخامس في هذا الدرس

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

ملاحظة:

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

$$x \to x_i = c_i$$

$$dx \to \Delta x$$

(1) $\int_0^2 (3x^2-1)\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(3x_i^2-1)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[3\left(\frac{2}{n}i\right)^2-1\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$c_i = x_i = 0+\frac{2}{n}i$$

$$= \frac{2}{n}i$$

---

(2) $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin \pi x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\pi\cdot\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$$x_i = 0+\frac{1}{n}i$$

$$= \frac{1}{n}i$$

(1) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,3]$ حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{5}{2}+\frac{3-n}{2n}$

فأوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

---

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

---

(3) إذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{n+1}{n}$$

$$= 2+1$$

$$= 3$$

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[2n + \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= 2 + \frac{n+1}{n}$$

عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x$, $[0,\pi]$ والتجزئة على الفترة

ملاحظة:

$\int\limits_a^b \to \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}$

$x \to x_i = c_i$

$dx \to \Delta x$

الفترة موجودة

$$= \int_0^{\pi} (\sin^2 x + x)\, dx$$

---

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \to$

$b-a=1 \to b=1$

2. اوجد $x_i = a + \Delta x\, i$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n}$

3. استبدل $\frac{1}{n}$ بـ Δx

و استبدل $\frac{1}{n} i$ بـ x_i

الفترة غير موجودة .

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$a = 0$

$b - a = 1$

$\therefore b = 1$

الفترة $[0,1]$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$x_i = \frac{1}{n} i$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx$$

---

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})}{n}$$

$$= \lim\sum_{i=1}^{n} f(\tfrac{i}{n}) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_0^1 f(x)\, dx$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$\therefore b - a = 1 \Rightarrow a = 0 , b = 1$

الفترة $[0,1]$

$x_i = \frac{1}{n} i$

عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\,\frac{2}{n}$$

$\Delta x = \frac{2}{n}$

$b-a=2$

$\Rightarrow a=0\ ,b=2$

الفترة $[0,2]$

$x_i = 0+\frac{2}{n}i$

$= \frac{2}{n}i$

$$= \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{x}\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^2 e^{x}\,dx$$

$$= e^{x}\Big]_0^2$$

$$= e^{2}-1$$

---

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$b-a=1$

$a=0 \Rightarrow b=1$

بفترة $[0,1]$

$x_i = 0+\frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi\, i}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\pi\cdot\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\pi\cdot x_i)\,\Delta x$$

$$= \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$

$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \cdot \frac{1}{n}$

$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$

$= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}.$

$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \int_0^1 2x\,dx = 1.$

$\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i$

$= \frac{1}{n} i$

$f(x) = 2x$

$f(x_i) = 2x_i$

$= 2(\frac{1}{n} i)$

$= \frac{2}{n} i$

---

(2) $\int_0^3 (4x+1)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{12}{n} i + 1) \cdot \frac{3}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{12}{n} i + 1)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}_{1}} + n(1) \right]$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{18(n+1)}{n} + 3.$

$= 18 + 3$

$= 21$

$\therefore \int_0^3 (4x+1)\,dx = 21.$

$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = 0 + \frac{3}{n} i$

$= \frac{3}{n} i$

$f(x) = 4x+1$

$f(x_i) = 4x_i + 1$

$= 4(\frac{3}{n} i) + 1$

$= \frac{12}{n} i + 1$

اوجد قمية التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum \left(\frac{4}{n^2} i^2\right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim \frac{8(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \frac{16}{6} = 8/3 .$$

$$\Delta x = \frac{2}{n}.$$

$$x_i = 0 + \frac{2}{n} i$$

$$= \frac{2}{n} i$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x_i) = x_i^2$$

$$= \left(\frac{2}{n} i\right)^2$$

$$= \frac{4}{n^2} i^2$$

$$\therefore \int_0^2 x^2\,dx = 8/3 .$$

---

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n .$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(3 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2\right) \frac{4}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{12}{n} - \frac{64}{n^2} i + \frac{64}{n^3} i^2$$

$$= \frac{12}{n} \cdot n - \frac{64}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{64}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 12 - \frac{32(n+1)}{n} + \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

$$\Delta x = \frac{2 - {}^{-}2}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_i = -2 + \frac{4}{n} i$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x_i) = (x_i)^2$$

$$= \left(-2 + \frac{4}{n} i\right)^2 - 1$$

$$= 4 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2 - 1$$

$$= 3 - \frac{16}{n} i + \frac{16}{n^2} i^2$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 12 - 32 + \frac{32(2)}{3} = \frac{4}{3} .$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} (x^2 - 1)\,dx = \frac{4}{3} .$$

خواص التكاملات المحدودة

(1) خاصية التوزيع على الجمع والطرح

$$\int_a^b (m\ f(x) \pm k\ g(x))dx = m\int_a^b f(x)\,dx \pm k\int_a^b g(x)\,dx$$

(2) خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(3) خاصية الثابت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(4) خاصية الترتيب

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(5) خاصية الاضافة (تكامل الدوال المتفرعة)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(6) خاصية السيادة اذا كانت $f(x) \geq g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$

فان $$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

(7) خاصية الاحاطة اذا كانت

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $M = Max(f)$

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $m = Min(f)$

فان $$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$

ايجادالتكامل المحدود

يمكن التأكد من حلك باستخدام الآلة الحاسبة .

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(4x+1)\,dx = 2x^2+x\Big]_1^3 = [2(3)^2+3]-[2(1)^2+1] = 18$

---

(2) $\int_{2}^{5}3x(x+2)\,dx = \int_2^5 3x^2+6x\ dx$

$= x^3+3x^2\Big]_2^5$

$= [5^3+3(5)^2]-[2^3+3(2)^2]$

$= 180$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2}e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}[e^{2\ln 2}-e^{0}]$

$= 3/2$

---

(4) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \tan^{-1}1-\tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}.$

---

(5) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln|x^2+1|]_0^1$

$= \frac{1}{2}[\ln 2-\ln 1]$

$= \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

---

(6) $\int_{0}^{1}(x^5+x^{\frac{1}{5}})\,dx = \frac{x^6}{6}+\frac{5}{6}x^{6/5}\Big]_0^1$

$= \frac{1}{6}+\frac{5}{6}$

$= 1$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

---

(2) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_{0}^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= -\ln|\cos x|\Big]_{0}^{\pi/4}$$

$$= -\left[\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right] = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$$

---

(3) $$\int_{0}^{1} xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2}(e - e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$$

---

(4) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\,dx = \frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3}\Big]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \left[-\frac{\cos\pi/2}{2} - \frac{\sin 3\pi/2}{3}\right] - \left[\frac{-\cos 0}{2} - \frac{\sin 0}{3}\right]$$

$$= \frac{4}{3}.$$

---

(5) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx$$

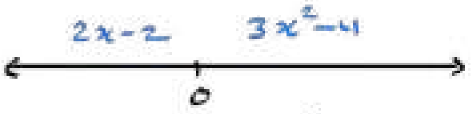
$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_{0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

تكامل الدوال المتفرعة

(1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$



تجزئة التكامل عند نقط التفرع

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(2x-2)\,dx+\int_{0}^{4}3x^2-2\,dx$$

$$=x^2-2x\Big]_{-2}^{0}+x^3-2x\Big]_{0}^{4}$$

$$=-8+56$$

$$=48.$$

---

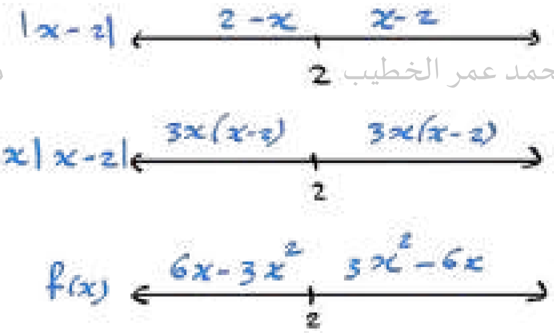
(2) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ فاوجد $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(6x-3x^2)\,dx+\int_{2}^{4}(3x^2-6x)\,dx$$

$$=3x^2-x^3\Big]_{0}^{2}+x^3-3x^2\Big]_{2}^{4}$$

$$=4+20=24.$$



---

(3) اذا كانت $f(x)=2[x+3]$ فاوجد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{2} 2[x+3]\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}4\,dx+\int_{0}^{1}6\,dx+\int_{1}^{2}8\,dx.$$

$$=4+6+8$$

$$=18.$$

$$[x]=\begin{cases}-1 & -1\leq x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ 1 & 1\leq x<2\end{cases}$$

↓ اجمع قيم الدالة العدد 3 , اضرب في 2

$$2[x+3]=\begin{cases}4 & -1\leq x<0\\ 6 & 0\leq x<1\\ 8 & 1\leq x<2\end{cases}$$

(1) اكتب $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$$\int_0^{②} f(x)\,dx + \int_{②}^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 f(x)\,dx$$

ممكن الحل باستخدام خط التكامل

$\int f$

---

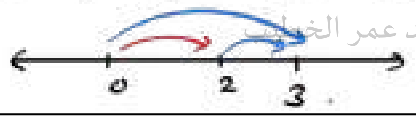
(2) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$$\int_0^3 f(x)\,dx - \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 f(x)\,dx + \cancel{\int_2^3 f(x)\,dx} - \cancel{\int_2^3 f(x)\,dx}$$

$$= \int_0^2 f(x)\,dx.$$

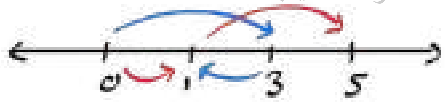
ممكن الحل باستخدام خط التكامل



---

(3) اكتب $\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

$$\int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx.$$



أو

$$\int_0^3 + \int_3^1 + \int_1^5 = \int_0^1 + \cancel{\int_1^3} - \cancel{\int_1^3} + \int_1^5 = \int_0^1 + \int_1^5 = \int_0^5$$

---

(4) اذا كان $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ و $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ فاوجد

(a) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx = 3-2=1$

(b) $\int_1^3 [f(x)-g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 3-(-2)=5$

(c) $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\,dx = 2\int_1^3 f(x)\,dx - \int_1^3 g(x)\,dx = 2(3)-(-2)=8$

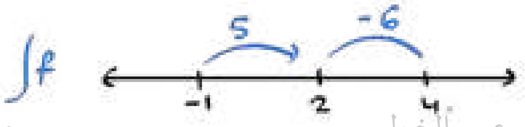
(d) $\int_1^3 [4g(x)-3f(x)]\,dx = 4\int_1^3 g(x)\,dx - 3\int_1^3 f(x)\,dx = 4(-2)-3(3) = -17.$

(1) اذا كان $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -6$ ، $\int_{-1}^{2} \underset{3}{\underline{3}} f(x)\,dx = \underset{3}{\underline{15}}$ فاوجد $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

$$= 5 + (-6)$$

$$= -1$$



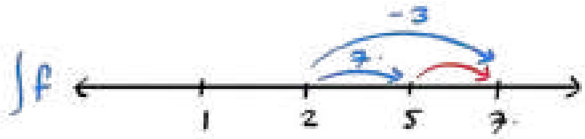
---

(2) اذا كانت $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 7$ ، $\int_{2}^{7} f(x)\,dx = -3$ ، $\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 10$ فأوجد

(a) $\int_{2}^{2} f(x)\,dx \;= 0$

(b) $\int_{5}^{7} f(x)\,dx \;= \int_{2}^{7} f\,dx - \int_{2}^{5} f\,dx$

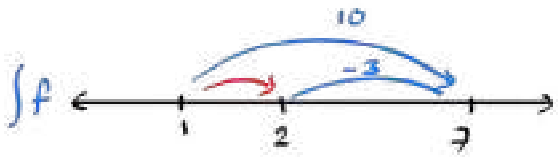
$$= -3 - 7 = -10$$



(c) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx \;= \int_{1}^{7} f\,dx - \int_{2}^{7} f\,dx$

$$= 10 - (-3)$$

$$= 13$$



---

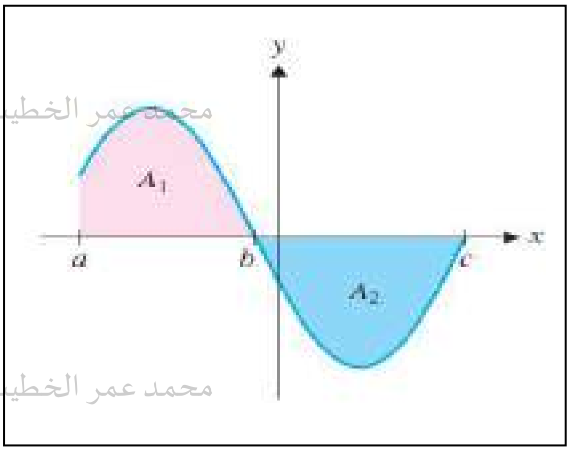
(3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2 + bx - 1$ فاوجد قيمة b

نختار قيمة لـ x تكون مناسبة مثل $x = 1$

$$\int_{2}^{2} f(t)\,dt = 4(1)^2 - b(1) - 1$$

$$0 = 4 - b - 1 \Rightarrow \boxed{b = -3}$$

العلاقة بين المساحة والتكامل



(1) اذا كانت الدالة فوق محور السينات $f(x) \geq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) اذا كانت الدالة تحت محور السينات $f(x) \leq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي سالب قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

A_2 , A_1 هذه اعداد تمثل المساحة

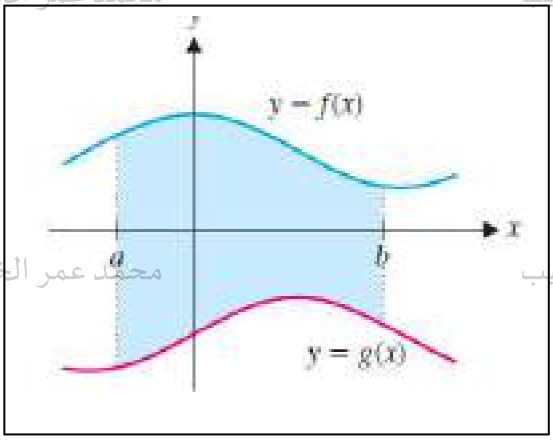
فتكون دائماً موجبة

(3) المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x هي $A = A_1 + A_2$

بشكل عام

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فان

المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

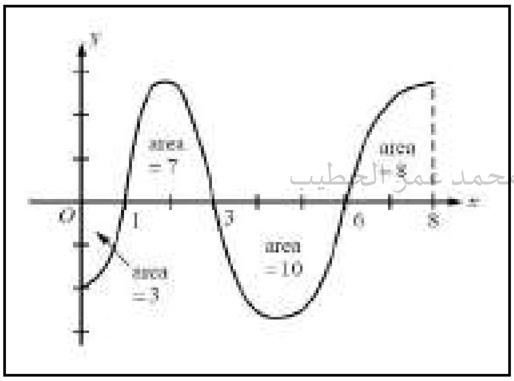


$$A = \int_a^b \left[\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى} \right] dx$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

ملاحظة: يعتبر محور x (السينات) دالة معادلتها $y = 0$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المحددة في ايجاد قيمة التكاملات التالية



(a) $\int_0^1 f(x)\,dx = -3$

(b) $\int_1^3 f(x)\,dx = 7$

(c) $\int_0^3 f(x)\,dx = -3 + 7 = 4$

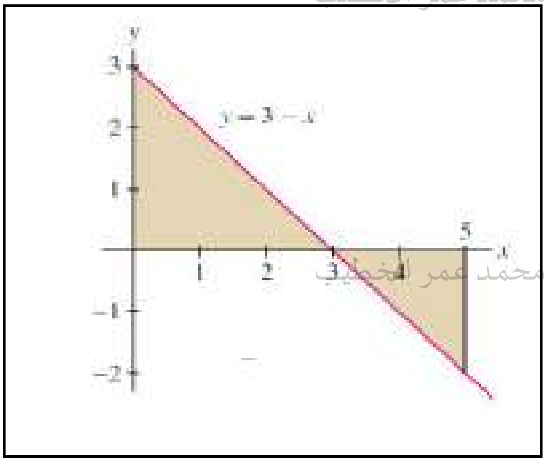
(d) $\int_0^8 f(x)\,dx = -3 + 7 + (-10) + 8 = 2$

(e) المساحة المحصورة بالدالة ومحور x

$A = 3 + 7 + 10 + 8 = 28$

---

(2) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد



(a) $\int_0^3 (3-x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$

(b) $\int_3^5 (3-x)\,dx = -\frac{1}{2}(2)(2) = -2$

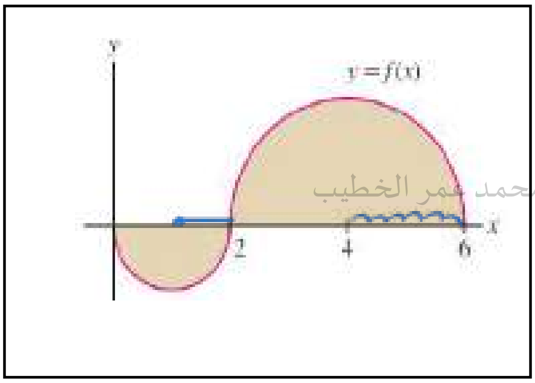
(c) $\int_0^5 (3-x)\,dx = \frac{1}{2}(3)(3) + -\frac{1}{2}(2)(2)$
$= 5/2$

---

(3) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

$\int_{-1}^{3} |x|\,dx = \frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(3)(3) = 5$

(1) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد



(a) $\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}\text{مساحة الدائرة التي} \\ \text{نصف قطرها 1}\end{matrix}\right]$
$= -\frac{1}{2}[\pi(1)^2] = \frac{-\pi}{2}$

(b) $\int_2^6 f(x)\,dx = \frac{1}{2}[\pi(2)^2] = 2\pi$

(c) $\int_0^6 f(x)\,dx = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$

(d) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}[\pi(1)^2] = \frac{1}{4}\pi$

(e) $\int_4^6 f(x)\,dx = \frac{1}{4}[\pi(2)^2] = \pi$

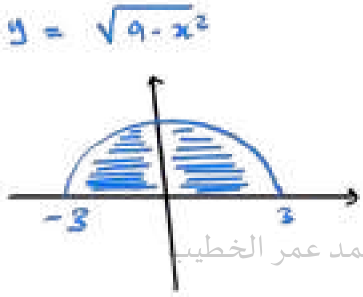
(f) $\int_1^4 f(x)\,dx = -\frac{1}{4}[\pi(1)^2] + \frac{1}{4}[\pi(2)^2] = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

(g) $\int_0^2 |f(x)|\,dx = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{2}$

---

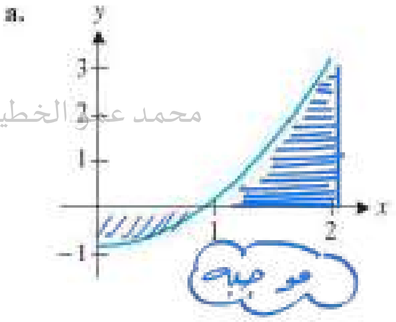
(2) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

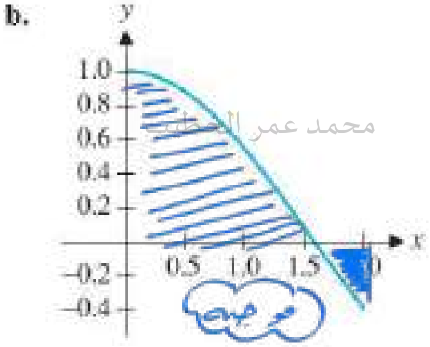
(a) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$

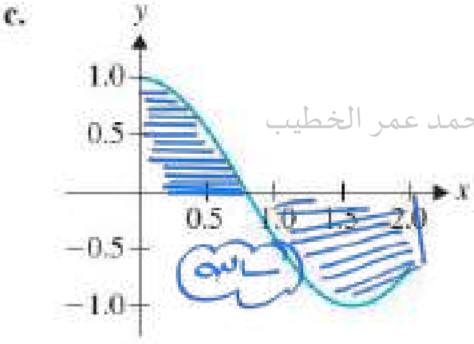


(b) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(a)^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة







لان المساحة فوق محور x اكبر من المساحة تحت محور x

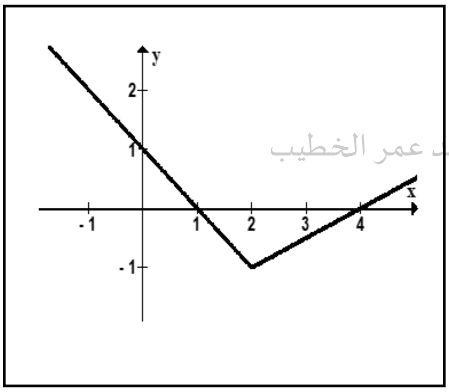
لان المساحة فوق محور x اكبر من المساحة تحت محور x

لان المساحة فوق محور x اقل من المساحة تحت محور x

---

(2) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx\,, \quad \int_{0}^{2} f(x)\,dx\,, \quad \int_{0}^{4} f(x)\,dx$$



$= \frac{1}{2}(1)(1)$

$= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(1)(1) - \frac{1}{2}(1)(1)$

$= 0$

$\frac{1}{2}(1)(1) - \frac{1}{2}(3)(1)$

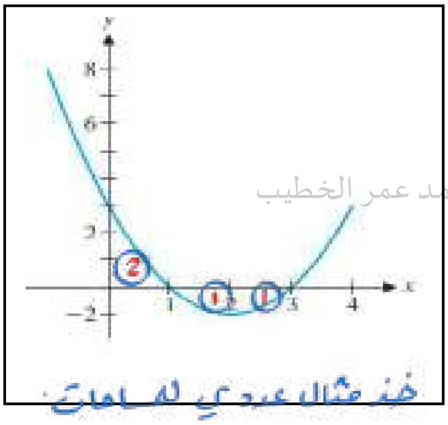
$= -2$

$$\int_{0}^{4} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

---

(3) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx\,, \quad \int_{0}^{2} f(x)\,dx\,, \quad \int_{0}^{3} f(x)\,dx$$

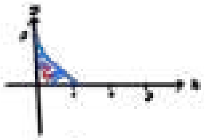


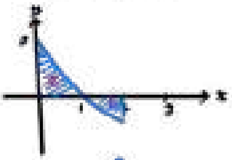
خذ مثال عددي لمساحات

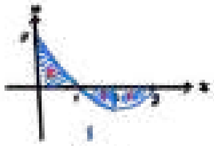
$= 2$

$= 2 - 1 = 1$

$= 2 - 2 = 0$







$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx < \int_{0}^{2} f(x)\,dx < \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

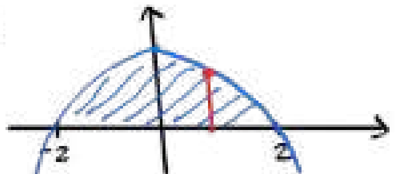
(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

$$A=\int_{-2}^{2} 4-x^2 \ dx$$

$$= 4x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$y_1=4-x^2$

$y_2=0$



نجد نقاط التقاطع مع محور x

$4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

---

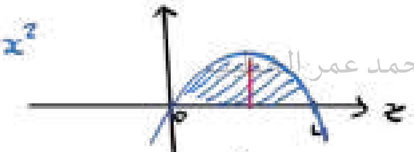
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

$$A=\int_{0}^{4} 4x-x^2 \ dx$$

$$= 2x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{4} = \frac{32}{3}$$

$y_1=4x-x^2$

$y_2=0$



$4x-x^2=0$

$x=0 \ , \ x=4$

---

(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

$$A=\int_{-2}^{2} 0-(x^2-4) \ dx$$

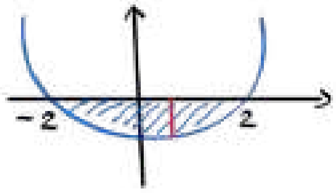
$$= -\int_{-2}^{2} x^2-4 \ dx = \frac{32}{3}$$

لأن المساحة

تحت محور x

$y_1=0$

$y_2=x^2-4$



---

(4) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x على الفترة $[0,\pi]$

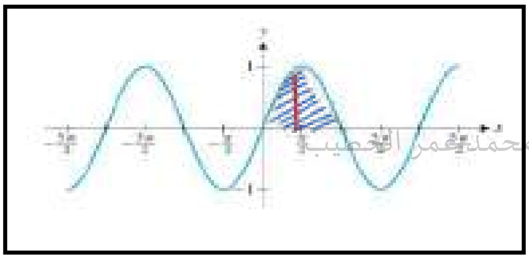
$$A=\int_{0}^{\pi} \sin x \ dx$$

$$= -\cos x\Big]_{0}^{\pi}$$

$$= 2$$

$y_1=\sin x$

$y_2=0$



---

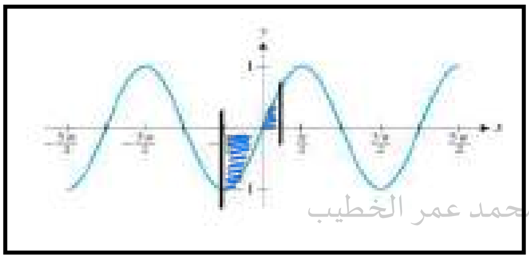
(5) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

★ تجزئة المساحة ،

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0-\sin x \ dx + \int_{0}^{\pi/4} \sin x - 0 \ dx$$

$$= -\int_{-\pi/2}^{0} \sin x \ dx + \int_{0}^{\pi/4} \sin x \ dx$$

$$= 1 + 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = 2-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

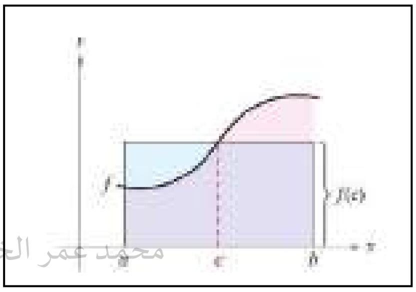
اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظريةالقيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c)=f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$ والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)

ويمكن استخدام هذه المتباينة لتقدير التكامل $(b-a)M \geq \int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)m$

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)M$$

حيث $m=Min(f)$، $M=Max(f)$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x-x^2$ على الفترة $[0,3]$

$$f_{ave}=\frac{1}{3-0}\int_0^3 2x-x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^3$$

$$=0$$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave} = \frac{1}{4}\int_0^4 (2x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^2+x\right)\Big]_0^4$$

$$= \frac{1}{4}[20]$$

$$= 5$$

لإيجاد قيمة c

$$f(c) = f_{ave}$$

$$2c+1 = 5$$

$$2c = 4$$

$$c = 2 \in (0,4) \checkmark$$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_0^2 3x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,x^3\Big]_0^2$$

$$= 4$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,2) \quad \times$$

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2) \checkmark$$

---

(3) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

$$f_{ave} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$\sin c = 0 \Rightarrow c = n\pi$$

$$c = 0 \notin (0,2\pi) \quad \times$$

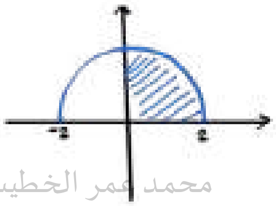
$$c = 2\pi \in (0,2\pi) \quad \times$$

$$c = \pi \in (0,2\pi) \checkmark$$

فقط $c = \pi$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ على الفترة $[0,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$



$$f_{ave} = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

هذا التكامل يساوي ربع مساحة دائرة نصف قطرها 2

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi(2)^2$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$f(c) = f_{ave}.$$

$$\sqrt{4-c^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$4-c^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$c^2 = 4-\frac{\pi^2}{4}$$

$$c = -\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}} = -1.23 \notin (0,2)\ \times$$

$$c = \sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}} = 1.23 \in (0,2)\ \checkmark$$

---

(2) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx=3$ ، $\int_2^6 \frac{2}{2} f(x)\,dx=\frac{16}{2}$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx=4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

$$f_{ave} = \frac{1}{9-0}\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[4+8+(3)\right]$$

$$= 1$$

أولاً

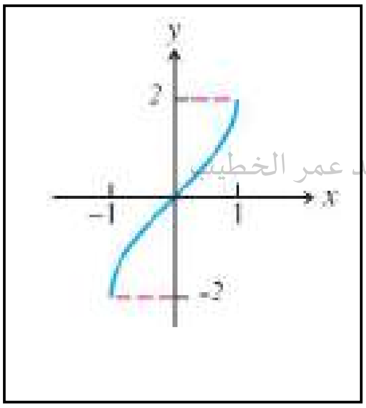
$\int f$

$$\int_0^9 = \int_0^2 + \int_2^6 + \int_6^9$$

$$= 4 + \frac{16}{2} + (-3)$$

$$= 9.$$

(1) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-4 \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 4$



$m \le f(x) \le M$

$-2 \le f(x) \le 2$

$\int_{-1}^{1} -2\,dx \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{1} 2\,dx$

$-2(1--1) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 2(1--1)$

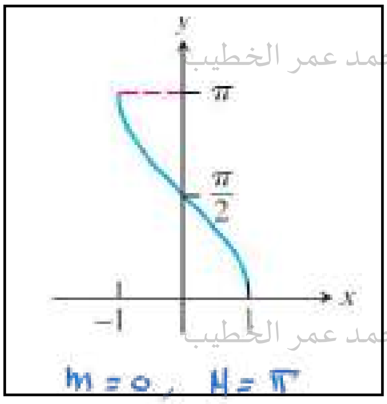
$-4 \le \int_{-1}^{1} f(x) \le 4$ #

$m = -2$

$M = 2$.

---

(2) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $0 \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 2\pi$



$m = 0$, $M = \pi$

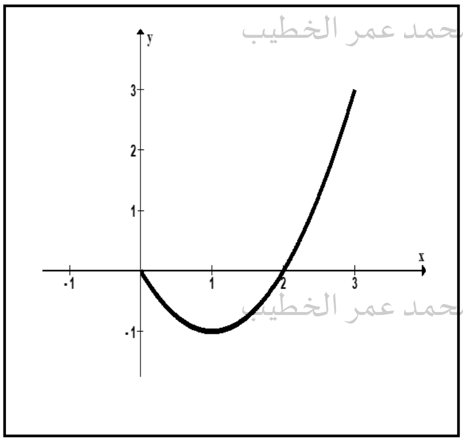
$0 \le f(x) \le \pi$

$\int_{-1}^{1} 0\,dx \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{1} \pi\,dx$

$0 \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 2\pi$. #

---

(3) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان $-3 \le \int_{0}^{3} f(x)\,dx \le 9$



$-1 \le f(x) \le 3$

$\int_{0}^{3} -1\,dx \le \int_{0}^{3} f(x)\,dx \le \int_{0}^{3} 3\,dx$

$-3 \le \int_{0}^{3} f(x)\,dx \le 9$

#

$m = -1$

$M = 3$.

اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

الطريقة الأولى

$m \leq f(x) \leq M.$

$e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

$\int_0^1 e^{-1}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1\,dx$

$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx < 1$

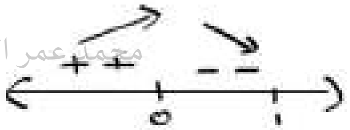
$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$

حدود التكامل هي ١، $\frac{1}{e}$

$f(x) = e^{-x^2}.$

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$



الدالة متناقصة على (٠،١)

$M = f(0) = e^0 = 1$

$m = f(1) = e^{-1} = 1/e.$

الطريقة الثانية

$\int_0^1 e^{-1}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1\,dx$

$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx < 1$

$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$

حدود التكامل هي ١، $\frac{1}{e}$

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^2 \leq 1$

$-1 \leq -x^2 \leq 0$

$e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0$

$\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$

(1) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

$f'(x) = \frac{-3(3x^2)}{(x^3+2)^2} = \frac{-9x^2}{(x^3+2)^2} \leq 0$

لكل قيم x

∴ الدالة متناقصة

$\underset{m}{f(1)} \leq f(x) \leq \underset{M}{f(-1)}$

$1 \leq f(x) \leq 3$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{-1}^{1} 3\,dx$

$2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 6$

الحد الادنى ، الحد الاعلى للتكامل هما

2 , 6 .

---

(2) بين ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$ يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq x^2 \leq 1$

$1 \leq 1+x^2 \leq 1+1$

$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dx$

$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$

∴ التكامل يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$

(1) بين ان $\sqrt{2}\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx \leq \pi$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$0 \leq x \leq \pi$ (الربع الأول والثاني)

$0 \leq \sin x \leq 1$

$1 \leq 1+\sin x \leq 2$

$1 \leq \sqrt{1+\sin x} \leq \sqrt{2}$

$\int_0^{\pi} 1\, dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx \leq \int_0^{\pi} \sqrt{2}\, dx$

$\pi \leq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\, dx \leq \sqrt{2}\,\pi$

الحد الأدنى , الحد الأعلى للتكامل هما π , $\sqrt{2}\,\pi$

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة

* ايجاد القيمة الصغرى والعظمى المطلقة ثم استخدام فكرة السؤال السابق

---

(2) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$-1 \leq -\sqrt{x} \leq 0$

$e^{-1} \leq e^{-\sqrt{x}} \leq e^{0}$

$\frac{1}{e} \leq e^{-\sqrt{x}} \leq 1$

$\frac{1}{e} x^2 \leq x^2 e^{-\sqrt{x}} \leq x^2$

$\int_0^1 \frac{1}{e} x^2\, dx \leq \int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx \leq \int_0^1 x^2\, dx$

$\frac{1}{e} \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 \leq \int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^1$

$\frac{1}{3e} \leq \int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{1}{3}$

الحدود هي $\frac{1}{3e}$, $\frac{1}{3}$

او 0.12 , 0.33

(1) تمثل الدالة $T(t)=30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)$ **درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيليسيوس حيث**

الفترة $[0,12]$

تمثل t **الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام**

$$T_{ave}=\frac{1}{12}\int_0^{12} 30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)\,dt$$

$$=\frac{1}{12}\left[30-2\pi\frac{\sin(\frac{\pi}{8}t)}{\pi/8}\right]_0^{12}$$

$$=\frac{1}{12}(376)=31.3\ .C.$$

---

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ **معدل مواليد احدى المدن بالالاف**

والدالة $D(t)=396+0.2t$ **معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف**

حيث تمثل t **الشهور**

عدد السكان $p(t)$

معدل التغير في عدد السكان $p'(t)$

$p'(t)=B(t)-D(t)$

صافي التغير في عدد السكان

$\Delta p=\int_0^{12}p'(t)\,dt$

(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان خلال السنة

$$p'(t)=B(t)-D(t)$$

$$=400-0.3t-(396+0.2t)$$

$$=4-0.5t\ .$$

$p'(t)=0 \Rightarrow t=8$

فترة التزايد هي $(0,8)$

(ب) حدد الشهر الذي يصل فيه عدد السكان الى ذروته

الشهر الثامن .

(ج) اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

$$\Delta p=\int_0^{12}p'(t)\,dt=\int_0^{12}(4-0.5t)\,dt\ \cdot=4t-\frac{1}{4}t\Big]_0^{12}=12$$

يزداد عدد السكان 12 ألف نسمة سنوياً .

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

$$P_{ave}=\frac{1}{12}\int_0^{12}p'(t)\,dt=\frac{1}{12}(12)=1$$

عدد السكان يزداد شهرياً ألف نسمة تقريباً .

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

التكامل المحدود

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1) إذا كانت $F(x) = x\ln x - x + c$ الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ فاوجد

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1)$$

$$= (e\ln e - e + c) - (1\cdot\ln 1 - 1 + c)$$

$$= 1$$

او

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(x)\Big]_1^e = x\ln x - x + c\Big]_1^e = 1$$

---

2) إذا كانت $F(x)$ الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ فأوجد $F(1)$

$$\int_1^2 (3x^2+5)\,dx = F(x)\Big]_1^2$$

$$x^3+5x\Big]_1^2 = F(2) - F(1)$$

$$12 = 5 - F(1)$$

$$\therefore F(1) = -7$$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3}(3x^2+1)\,dx =$ $x^3 + x\Big]_1^3 = (3^3+3) - (1^3+1) = 28$

---

(2) $\int_{1}^{4} x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\,dx =$ $\int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x|\Big]_1^4 = \frac{62}{5} + 3\ln 4.$

---

(3) $\int_{0}^{1}(6e^{-2x}+4)\,dx =$ $6\frac{e^{-2x}}{-2} + 4x\Big]_0^1 = 7 - \frac{3}{e^2}$

---

(4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$ $3\sin^{-1}x\Big]_0^{1/2} = 3\left[\sin^{-1}1/2 - \sin^{-1}0\right] = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

---

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx =$ $\tan x\Big]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

---

(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx =$ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

---

(7) $\int_{0}^{t}(e^{x/2})^2\,dx =$ $\int_0^t e^x\,dx = e^x\Big]_0^t = e^t - 1$

---

(8) $\int_{0}^{t}(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx =$ $\int_0^t 1\,dx = x\Big]_0^t = t$

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

مشتقة الدالة التكاملية

الحالة الأولى: الحد الأعلى x

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

(1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(a) $F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt \Rightarrow F'(x) = x^2+2x+1$

(b) $F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt \Rightarrow F'(x) = \sin^2 x$

(c) $F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt = -\int_1^x t\,e^{2t}\,dt \Rightarrow F'(x) = -x\,e^{2x}$

(d) $F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt \Rightarrow F'(x)=0$

هنا ، التكامل ثابت لذلك المشتقة صفر .

---

(2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$ ، فاوجد $f(e)$

نشتق الطرفين للحصول على $f(x)$

$$\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$$

$$f(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x$$

$$f(e) = \ln e$$

$$= 1+1$$

$$= 2$$

---

(3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

$$F(1) = \int_1^1 \sqrt{4t^2-1}\,dt = 0$$

$$F'(x) = \sqrt{4x^2-1} \Rightarrow F'(1) = \sqrt{4(1)^2-1} = \sqrt{3}$$

الحالة الثانية : الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الاساسية)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}(t^3+2)\,dt$

$$\Rightarrow F'(x)=\left((x^2)^3+2\right).(2x)$$

مشتقة الحد العلوي ↑

$$=(x^6+2)\cdot 2x$$

$$=2x^7+4x\,.$$

---

(2) $F(x)=\int_0^{\sin x}\tan t\,dt$

$$F'(x)=\tan(\sin x)\cdot\cos x$$

$$=\cos x\cdot\tan(\sin x)$$

---

(3) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1}e^{t^2}\,dt = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt.$

$$F'(x)=-e^{(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-e^{x}}{2\sqrt{x}}$$

---

(4) $F(x)=\int_1^{xe^x}\sin t\,dt$

مشتقة الحد العلوي (قاعدة الضرب) ↑

$$F(x)=\sin(xe^{x})\cdot\left(1\cdot e^{x}+x\cdot e^{x}\right)$$

$$=(1+x)e^{x}\sin(xe^{x})$$

الحالة الثالثة : الحد الادنى و الحد الاعلى متغيرات (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

فان $$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$$

او ممكن كتابة الدالة التكاملية

$$F(x)=\int_{h(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt$$

ثم تطبيق الحالة الثانية وتجد المشتقة

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي يمكن حل السؤال بالطريقتين

(1) $F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt = \int_{c}^{\sin x}(t^3+2)\,dt - \int_{c}^{x} t^3+2\,dt$

☆ نفترض c أي ثابت معرف عليه التكامل

$F(x) = [(\sin x)^3+2]\cdot\cos x - [x^3+2]\cdot(1)$

$= \sin^3 x\cos x + 2\cos x - x^3 - 2$

---

(2) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt = \int_{c}^{x^2}\cos t\,dt - \int_{c}^{\sqrt{x}}\cos t\,dt$

$F'(x) = \cos x^2(2x) - \cos\sqrt{x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= 2x\cos x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

---

(3) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_{c}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt - \int_{c}^{\sin x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$

$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x+1}\cdot(-\sin x) - \frac{1}{\sin^2 x+1}\cdot(\cos x)$

$= \frac{-\sin x}{\cos^2 x+1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t\, dt = \int_{c}^{\sqrt{x}} \tan 3t\, dt - \int_{c}^{2x} \tan 3t\, dt$

$$F'(x) = \tan 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \tan 3(2x) \cdot (2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan 3\sqrt{x} - 2\tan 6x .$$

---

(2) $F(x)=\int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t\, dt = \int_{c}^{\sin^{-1}x} \sin t\, dt - \int_{c}^{x} \sin t\, dt$

$$F'(x) = \underline{\sin(\sin^{-1}x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x .$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x .$$

---

(3) $F(x)=\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\, dt = \int_{c}^{e^{2x}} \ln t\, dt - \int_{c}^{e^{4\sqrt{x}}} \ln t\, dt$

$$F'(x) = \ln e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2 - \ln e^{4\sqrt{x}} \cdot e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x\, e^{2x} \cdot 2 - 4\sqrt{x}\, e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4x\, e^{2x} - 8\, e^{4\sqrt{x}} .$$

---

(4) $F(x)=\int_{2-x}^{xe^{x}} 3t\, dt = \int_{c}^{xe^{x}} 3t\, dt - \int_{c}^{2-x} 3t\, dt .$

$$F'(x) = 3(x e^{x}) \cdot [1 \cdot e^{x} + x e^{x}] - 3(2-x)(-1)$$

$$= 3x e^{x} \cdot e^{x}(1+x) + 3(2-x)$$

$$= 3x(1+x)\, e^{2x} - 3x + 6 .$$

(1) اذا كان $F(x) = x + \int_{\tan x}^{0} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ ، فاثبت ان $F'(x) = 0$

$$F(x) = x - \int_0^{\tan x} \frac{1}{t^2+1}\, dt.$$

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{\tan^2 x+1} \cdot \sec^2 x.$$

$$= 1 - \frac{1}{\sec^2 x} \cdot \sec^2 x$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0 \quad \#$$

---

(2) اذا كان $g(x) = \int_0^{3x} \left(\int_0^u \sin t \;\, dt \right) du$ ، فأوجد $g''(x)$

مساعدة: افرض

$$f(u) = \int_0^u \sin t \;\, dt$$

$$g(x) = \int_0^{3x} \Big(\underbrace{\int_0^u \sin t \, dt}_{\downarrow} \Big)\, du$$

$$\therefore\ g(x) = \int_0^{3x} f(u)\, du$$

$$\therefore\ g'(x) = f(3x) \cdot 3 = 3\, f(3x)$$

$$= 3 \int_0^{3x} \sin t \,.\, dt$$

$$\therefore\ g''(x) = 3 \sin 3x \cdot 3 = 9 \sin 3x.$$

ممكن حل السؤال
بأكثر من طريقة

(1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

$$h(x) = \int_{1}^{g(x)} f(t)\, dt$$

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

$$h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= f(g(3)) \cdot g'(3)$$
$$= f(4) \cdot 2 = (-1)(2) = -2$$

---

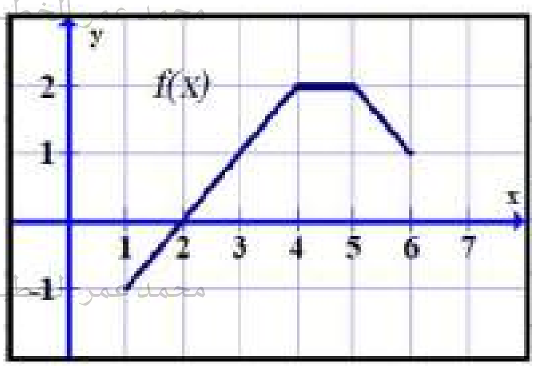
(2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $\mathrm{H}(x) = \int_{1}^{x} f(t)\, dt$

في الاجابة عن الاسئلة التالية

اشتق الطرفين

$H'(x) = f(x)$



(a) $\mathrm{H}(3) = \int_{1}^{3} f(t)\, dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

(b) $\mathrm{H}(6) = \int_{1}^{6} f(t)\, dt = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 5) = 5$

(c) $\mathrm{H}'(3) = f'(3) = 1$

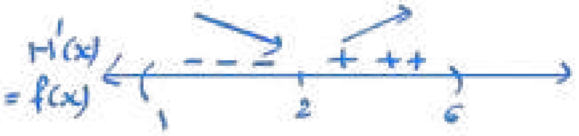
(d) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$$f_{ave} = \frac{1}{6-1} \int_{1}^{6} f(t)\, dt = \frac{1}{5}(5) = 1$$

(e) اوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

$f(c) = f_{ave} \Rightarrow \underset{\text{متصل}}{f(c) = 1} \Longrightarrow c = 3, \underset{\text{مرفوض}}{c = 6} \notin (1,6)$

(f) اوجد فترة التزايد للدالة $\mathrm{H}(x)$ على الفترة $[1,6]$



فترة التزايد للدالة $H(x)$ هي $(2,6)$

(g) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $\mathrm{H}(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

عند $x = 2$ قيمة صغرى كلية وقيمتها $H(2) = -\frac{1}{2}$

(1) اوجد معادلة المماس للدالة y **عند** $x = 2$ **حيث** $y = \int_2^x \cos(\pi t^3)\, dt$

$f(2) = \int_2^2 \cos(\pi t^3)\, dt = 0$

$f'(x) = \cos \pi x^3$

$m = f'(2) = \cos 8\pi = 1$

ميل $m = 1$ ، تقطع $(2, 0)$

معادلة المماس هي :

$y - 0 = 1(x - 2)$

$y = x - 2$

---

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ **عند** $x = 0$ **حيث** $f(x) = \cos x + \int_{2x}^{x^2} e^{-t}\, dt$

$f(0) = \cos 0 + \int_0^0 e^{-t}\, dt = 1 + 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x + e^{-x^2}(2x) - e^{-2x}(2).$

$m = f'(0) = -\sin 0 + e^{-0}(0) - e^{0}(2)$

$= -2$

الميل $m = -2$ ، وتقطع $(0, 1)$

∴ معادلة المماس هي

$y - 1 = -2(x - 0)$

$y = -2x + 1$

---

(3) اوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبتال

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1)\, dt}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

---

(4) اذا كان $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t < 1 \\ 2t & 1 \le t \end{cases}$ **دالة متصلة على الفترة** $[0, \infty)$ **فأوجد الدالة** $\mathrm{H}(x)$

حيث $\mathrm{H}(x) = \int_0^x f(t)\, dt$

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة .

(1) $0 \le x < 1$

$H(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x 2\, dt = 2x .$

(2) $x \ge 1$

$H(x) = \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt$

$= \int_0^1 2\, dt + \int_1^x 2t\, dt$

$= 2 + t^2 \Big]_1^x$

$= 2 + x^2 - 1$

$= x^2 + 1$

$\therefore H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \\ x^2 + 1 & x \ge 1 \end{cases}$

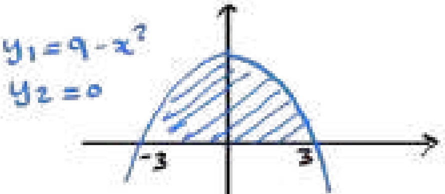
(1) اوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x) = 9 - x^2$

$y_1 = 9 - x^2$
$y_2 = 0$

$$A = \int_{-3}^{3} 9 - x^2 - 0 \quad dx$$

$$= 9x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{3}$$

$$= 36$$



نقاط التقاطع (حدود التكامل)

$9 - x^2 = 0$

$x = \pm 3$

---

(2) اوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x) = x^2 - 2x$

$y_1 = 0$
$y_2 = x^2 - 2x$

$$A = \int_{0}^{2} 0 - (x^2 - 2x) \quad dx$$

$$= \int_{0}^{2} 2x - x^2 \quad dx$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{3} \Big]_{0}^{2} = \frac{4}{3}$$

نقاط التقاطع (حدود التكامل)

$x^2 - 2x = 0$

$x = 0 , x = 2$

---

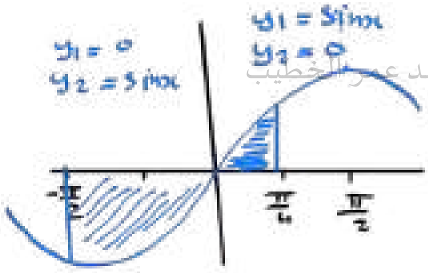
(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \sin x$ ومحور x حيث $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{4}$

تجزئة المساحة عند الصفر

$$A_1 = \int_{-\pi/2}^{0} 0 - \sin x \quad dx = 1$$

$$A_2 = \int_{0}^{\pi/4} \sin x - 0 \quad dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



---

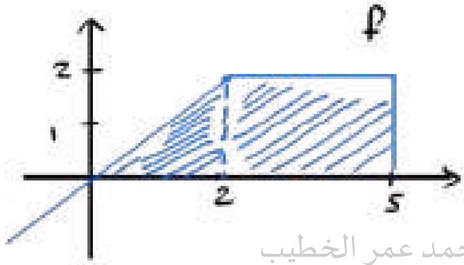
(4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = \begin{cases} x & x < 2 \\ 2 & 2 \le x \end{cases}$ ومحور x على الفترة $[0,5]$

تجزئة المساحة عند $x = 2$.

$$A_1 = \int_{0}^{2} x \quad dx = 2$$

$$A_2 = \int_{2}^{5} 2 \quad dx = 6$$

$$A = 2 + 6 = 8$$



الوحدة الخامسة: التكامل /// الدرس السادس: التكامل بالتعويض

يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c}$$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2 (x^3+1)^5\, dx$

نفرض

$u = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \cancel{x^2} \cdot u^5 \frac{du}{3\cancel{x^2}}$

$= \frac{1}{3}\int u^5\, du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18} u^6 + c = \frac{1}{18}(x^3+1) + c$

---

(2) $\int (2x+1)^5\, dx$

ممكن حل السؤال مباشرة (لان ما بداخل القوس داله خطية)

او بالتعويض

$u = 2x+1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$= \int u^5 \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^5\, du = \frac{1}{2}\int u^5\, du = \frac{1}{2}\, \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx$

نفرض

$u = e^x + 1$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

$= \int \cancel{e^x} \sqrt{u} \, \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int u^{1/2} \, du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} + c$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \int x^3 (4 - x^4)^{-1/2} dx$

نفرض

$u = 4 - x^4$

$\frac{du}{dx} = -4x^3$

$\frac{du}{-4x^3} = dx$

$= \int \cancel{x^3} \, u^{-1/2} \frac{du}{-4\cancel{x^3}}$

$= -\frac{1}{4} \int u^{-1/2} \, du$

$= -\frac{1}{4} \, 2 \, u^{1/2} + c = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{1/2} + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} dx$

نفرض

$u = 1 + \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \, du = dx$

$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}} \, u} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}} \, du$

$= 2 \int \frac{1}{u} \, du$

$= 2 \ln|u| + c = 2 \ln|1 + \sqrt{x}| + c$

---

(4) $\int x e^{-x^2/2} \, dx$

نفرض

$u = \frac{-x^2}{2}$

$\frac{du}{dx} = -x$

$\frac{du}{-x} = dx$

$= \int x \, e^u \, \frac{du}{-x}$

$= \int -e^u \, du$

$= -e^u + c$

$= -e^{-x^2/2} + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

نفرض

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$= \int \frac{e^{u}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$

$= \int 2e^{u}\,du$

$= 2e^{u} + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

---

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

نفرض

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{\sqrt{u}}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,du.$

$= \int u^{1/2}\,du$

$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c.$

---

(3) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x\ln x^{1/2}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2}x\ln x}\,dx$

نفرض

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$= \int \frac{2}{\cancel{x}\,u}\cancel{x}\,du$

$= \int \frac{2}{u}\,du$

$= 2\ln|u| + c = 2\ln|\ln x| + c$

---

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

نفرض

$u = x^2-2x+2$

$\frac{du}{dx} = 2x-2$

$\frac{du}{2x-2} = dx$

$= \int (x-1)\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2x-2}$

$= \int (\cancel{x-1})\,u^{1/2}\,\frac{du}{2(\cancel{x-1})}$

$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2} + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\, dx$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\, du = dx$

$= \int \frac{4}{\cancel{x} \cdot u^2} \cdot \cancel{x}\, du$

$= \int 4u^{-2}\, du$

$= 4\frac{u^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{-4}{u} + c = \frac{-4}{\ln x + 1} + c.$

---

(2) $\int \tan 2x\, dx$

ممكن حل السؤال بدون تعويض (وهو الأفضل)

$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\, dx$

$u = \cos 2x$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$= \int \frac{\cancel{\sin 2x}}{u} \cdot \frac{du}{-2\cancel{\sin 2x}}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du$

$= -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c.$

---

(3) $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\, du = dx$

$= \int \frac{u^3}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}}\, du$

$= \int u^3\, du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c.$

$= \frac{1}{4}(\sin^{-1} x)^4 + c.$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\, dx$

$u = \ln(\sin x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{du}{dx} = \cot x$

$\frac{du}{\cot x} = dx$

$= \int \frac{\cancel{\cot x}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int \frac{1}{u}\, du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln(\sin x)| + c$

---

(2) $\int \sec x\, dx \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

يمكن حل السؤال بدون التعويض (وهو الأفضل)

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$

$u = \sec x + \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x} = du$

$= \int \frac{\cancel{\sec^2 x + \sec x \tan x}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{\sec x \tan x + \sec^2 x}}$

$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + c$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c$

---

(3) $\int \csc x\, dx \times \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}$

يمكن حل السؤال بالتعويض

$= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}\, dx$

لاحظ ان البسط مشتقة المقام

$= \ln|\csc x - \cot x| + c$

اوجد التكاملات التالية

اذا كانت الزاوية ليست خطية افرض u الزاوية

(1) $\int x\cos x^2 \; dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \cancel{x} \cos u \; \frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \frac{1}{2} \int \cos u \; du$

$= \frac{1}{2} \sin u + c \;\; = \frac{1}{2} \sin x^2 + c$

---

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x \, du = dx$

$= \int \frac{\cos u}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, du$

$= \int \cos u \; du$

$= \sin u + c \;\;\; = \sin(\ln x) + c$

---

(3) $\int x^2 \sec^2 x^3 \; dx$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$= \int \cancel{x^2} \sec^2 u \; \cdot \; \frac{du}{3\cancel{x^2}}$

$= \frac{1}{3} \int \sec^2 u \; du$

$= \frac{1}{3} \tan u + c$

$= \frac{1}{3} \tan x^3 + c$

---

(4) $\int e^x \cos(e^{x+1}) \; dx$

$u = e^{x+1}$

$\frac{du}{dx} = e^{x+1}$

$\frac{du}{e^{x+1}} = dx$

$= \int e^x \cos u \; \cdot \; \frac{du}{e^{x+1}}$

$= \int \cancel{e^x} \cos u \; \frac{du}{\cancel{e^x} \cdot e^1}$

$= \frac{1}{e} \int \cos u \; du = \frac{1}{e} \sin u + c = \frac{1}{e} \sin(e^{x+1}) + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

$u = \sin x$ ، يمكن فرض $u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int u \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int u \, du$

$= \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c.$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cancel{\cos x} \cdot u^3 \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int u^3 \, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4} \sin^4 + c.$

---

(3) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \; dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx.$

$= \int \cancel{\sec^2 x} \cdot \sqrt{u} \; \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int u^{1/2} \, du$

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c$

$= \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + c = \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + c$

---

(4) $\int \sqrt{\tan x} (\sec x \tan x)^2 \; dx$

تبسيطها اولاً :

$= \int \tan^{1/2} x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^2 x \; dx$

$= \int \tan^{5/2} x \cdot \sec^2 x \;\; dx$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$= \int u^{5/2} \cdot \cancel{\sec^2 x} \;\; \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int u^{5/2} \, du = \frac{2}{7} u^{7/2} + c = \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\,dx$ $= \int \cos x\,(\sin x+1)^3\,dx$

$= \int \cancel{\cos x}\ u^3\ \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int u^3\,du$

$= \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}(\sin x+1)^4 + c$

$u = \sin x + 1$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

---

(2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ $= \int \frac{1}{1+(\cos x)^2}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{1+u^2}\ \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$

$= \int \frac{-1}{1+u^2}\,du = -\tan^{-1} u + c = -\tan^{-1}(\cos x) + C$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

---

(3) $\int \sin 3x\ \cos^5 3x\,dx$

$= \int \cancel{\sin 3x} \cdot u^5\ \frac{du}{-3\cancel{\sin 3x}}$

$= -\frac{1}{3}\int u^5\,du$

$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + c = -\frac{1}{18}\cos^6 3x + c$

$u = \cos 3x$

$\frac{du}{dx} = -3\sin 3x$

$\frac{du}{-3\sin 3x} = dx$

---

(4) $\int x\sec^2 x^2\ \tan x^2\,dx$

يمكن حل السؤال بالتعويض مرتين

$= \int \cancel{x}\ \cancel{\sec^2} x\ \ u\ \frac{du}{2\cancel{x}\ \cancel{\sec^2 x^2}}$

$= \frac{1}{2}\int u\,du$

$= \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + c$

$= \frac{1}{4}(\tan x^2)^2 + c = \frac{1}{4}\tan^2 x^2 + c.$

$u = \tan x^2$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x^2 \cdot 2x$

$\frac{du}{2x\sec^2 x^2} = dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = \int \sin x \,(\cos x)^{-1/2}\, dx$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int \cancel{\sin x} \cdot u^{-1/2} \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$

$= -\int u^{-1/2}\, du$

$= -2u^{1/2} + c = -2(\cos x)^{1/2} + c = -2\sqrt{\cos x} + c$

---

(2) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\, dx$

$u = \tan^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$(x^2+1)\, du = dx$

$= \int \frac{u^2}{\cancel{x^2+1}} \cdot (\cancel{x^2+1})\, du$

$= \int u^2\, du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\, dx$

$u = \sin^{-1} x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2}\, du = dx$

$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\; u} \cancel{\sqrt{1-x^2}}\, du$

$= \int \frac{1}{u}\, du$

$= \text{Ln}|u| + c = \text{Ln}|\sin^{-1} x| + c$

---

(4) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\, dx$

$u = \sec^{-1} 2x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{|2x|\sqrt{(2x)^2-1}} \cdot 2$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{4x^2-1}}$

$|x|\sqrt{4x^2-1}\, du = dx$

$= \int \frac{u}{\cancel{|x|}\cancel{\sqrt{4x^2-1}}} \cdot |x|\sqrt{4x^2-1}\, du$

$= \int u\, du$

$= \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}(\sec^{-1} 2x)^2 + c$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\, dx = \int x(x^2-1)^3\, dx$

نفرض

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \cancel{x}\, u^3 \frac{du}{2\cancel{x}}$

$= \frac{1}{2}\int u^3\, du$

$= \frac{1}{2}\, \frac{u^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + c.$

---

(2) $\int e^{\tan x+2\ln\sec x}\, dx = \int e^{\tan x} \cdot e^{2\ln \sec x}\, dx$

$= \int e^{\tan x} \cdot \cancel{e}^{\cancel{\ln} \sec^2 x}\, dx$

$= \int \sec^2 x\; e^{\tan x}\, dx.$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$= \int se\cancel{c^2}x \cdot e^u \frac{du}{se\cancel{c^2}x}$

$= \int e^u\, du = e^u + c = e^{\tan x} + c.$

---

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\, dx = \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\, dx = \int \csc^2 x\; e^{\cot x}\, dx$

$= \int cs\cancel{c^2}x\; e^u \cdot \frac{du}{-cs\cancel{c^2}x}$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$= -\int e^u\, du$

$= -e^u + c.$

$= -e^{\cot x} + c.$

اوجد التكاملات التالية

توحيد زوايا اولاً

(1) $\int \sin 2x \cos x \, dx$

$= \int 2\sin x \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx$

$= \int 2 \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

$= 2\int \cancel{\sin x} \cdot u^2 \, \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$

$= -2\int u^2 du = -\frac{2}{3} u^3 + c = \frac{-2}{3} \cos^3 x + c$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}$

$= \int \frac{\cancel{e^x}}{1+u^2} \cdot \frac{du}{\cancel{e^x}}$

$= \int \frac{1}{1+u^2} du$

$= \tan^{-1} u + c$

$= \tan^{-1} e^x + c$.

$u = e^x$

$\frac{du}{dx} = e^x$

$\frac{du}{e^x} = dx$

(3) $\int \frac{1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1} \cdot 2du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1} du$

$= \frac{1}{2} \tan^{-1} u + c$

$= \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$.

$u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$2du = dx$

يمكن حل السؤال بالقاعدة

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}(x/a) + c$

حيث $a^2 = 4$

$a = 2$

اوجد التكاملات التالية (باكمال المربع)

عند اكمال المربع يجب إضافة

[نصف معامل X تربيع]

بشرط ان يكون معامل X تربيع

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

$= \int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx$

$u = x+2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$= \int \frac{1}{u^2+1}du$

$= \tan^{-1}u + c$

$= \tan^{-1}(x+2) + c$

x^2+4x+5

$= x^2+4x+\underline{\underline{4}}+5-\underline{\underline{4}}$

$= (x+2)^2+1$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}dx$

$x^2-8x+25$

$= x^2-8x+16+25-16$

$= (x-4)^2+9$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{9}+1}dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}dx$

افرض

$u = \frac{x-4}{3} = \frac{1}{3}(x-4)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\,3\,du$

$= \frac{1}{3}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)+c$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}dx$

اكمال المربع

$6x-x^2$

$= -(x^2-6x)$

$= -(x^2-6x+9-9)$

$= -((x-3)^2-9)$

$= 9-(x-3)^2$

$= \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-3)^2}}dx$

$= \int \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}dx$

افرض

$u = \frac{x-3}{3} = \frac{1}{3}(x-3)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$

$3\,du = dx$

$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot 3\,du$

$= \sin^{-1}u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{3}\right)+c$

اختزال الرتبة

اوجد التكاملات التالية

(1) $$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^3)^2+1}\,dx$$

$u = x^3$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

$$= \int \frac{\cancel{x^2}}{u^2+1} \cdot \frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1} x^3 + c.$$

---

(2) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c.$$

---

(3) $$\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\,dx.$$

$$= \int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx.$

$$= \int \cancel{x}\, u^{1/3}\,\frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3} + c$$

$$= \frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3} + c$$

الخطوة الرابعة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 = u$. خطوة الرابعة

$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}$.

$= \boxed{\int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\,du}$

لا يجوز وجود x و u في التكامل.

$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \frac{1}{2|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1} u + c . = \frac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + c .$

---

(2) $\int x(x-2)^5\,dx$

$u = x-2$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x-2 = u$

$x = u+2$

$= \boxed{\int x\, u^5\, du}$

$= \int (u+2)\, u^5\, du$

$= \int u^6 + 2u^5\ du.$

$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{6}u^6 + c.$

$= \frac{1}{7}(x-2)^7 + \frac{1}{3}(x-2)^6 + c .$

---

(3) $\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt = \int t\,(2t-1)^{-1/2}\,dt.$

$u = 2t-1$

$\frac{du}{dt} = 2$

$\frac{du}{2} = dt$

$2t-1 = u$

$2t = u+1$

$t = \frac{u+1}{2}$

$= \int t\, u^{-1/2}\, \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int t\, u^{-1/2}\, du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{u+1}{2} \cdot u^{-1/2}\, du.$

$= \frac{1}{4}\int u^{1/2} + u^{-1/2}\, du = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2}\right) + c . = \frac{1}{6}(2t-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2t-1)^{1/2} + c .$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \int x^3(x^2-1)^{1/2}\,dx$

$= \int x^3 \, u^{1/2} \, \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^2 \, u^{1/2} \, du.$

$= \frac{1}{2}\int (u+1) \, u^{1/2} \, du$

$= \frac{1}{2}\int u^{3/2} + u^{1/2} \, du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + c.$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2-1 = u$

$x^2 = u+1$

---

(2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-25}}\,dx = \int \frac{1}{5|x|\sqrt{(\frac{x}{5})^2-1}}\,dx$

$= \int \frac{1}{\cancel{5}|x|\sqrt{u^2-1}} \cdot \cancel{5}\,du.$

$= \int \frac{1}{|5u|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{5}\sec^{-1}u + c = \frac{1}{5}\sec^{-1}(x/5) + c$

$u = \frac{x}{5}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}$

$5\,dx = dx$

$\rightarrow \frac{x}{5} = u$

$x = 5u$

---

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

$= \int \sqrt{u} \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= \int \sqrt{u} \cdot 2\,(u-1)\,du$

$= 2\int u^{3/2} - u^{1/2}\,du.$

$= 2\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right] + c$

$= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x}) + c.$

$u = 1+\sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$1+\sqrt{x} = u$

$\sqrt{x} = u-1$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

$= \int \cancel{\cos^3}^{2} x \; u^5 \; \frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$= \int \cos^2 x \quad u^5 \, du$

$= \int (1-u^2) u^5 \, du$

$= \int u^5 - u^7 \, du$

$= \frac{1}{6} u^6 - \frac{1}{8} u^8 + c = \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + c$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - u^2$

---

(2) $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

$= \int u \cdot \cancel{\sec^4}^{2} x \; \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$

$= \int u \quad \sec^2 x \quad du$

$= \int u(u^2+1) \, du$

$= \int u^3 + u \quad du$

$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + c$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$= u^2 +$

يمكن حل السؤال بالتعويض

$u = \sec x$

---

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$

(1)

$= \int \frac{3u}{1+u^6} \cdot 2\sqrt{x} \, du$

$= \int \frac{3u}{1+u^6} \cdot 2u \, du$

$= \int \frac{6u^2}{1+u^6} du$

$= \int \frac{6u^2}{1+(u^3)^2} du$

يمكن حل السؤال بتعويض واحد ولكن الأفضل استخدام التعويض مرتين

(2)

$= \int \frac{\cancel{6}^{2} \cancel{u^2}}{1+w^2} \cdot \frac{dw}{\cancel{3u^2}}$

$= \int \frac{2}{1+w^2} dw$

$= 2 \tan^{-1} w + C$

$= 2 \tan^{-1} u^3 + c$

$= 2 \tan^{-1} (\sqrt{x})^3 + c$

$= 2 \tan^{-1} x^{3/2} + c$

(1) $u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \, du = dx$

$\sqrt{x} = u$

$x = u^2$

$x^3 = (u^2)^3 = u^6$

(2) $w = u^3$

$\frac{dw}{du} = 3u^2$

$\frac{dw}{3u^2} = du$

يمكن التعويض مرة واحدة باستخدام $u = x^{3/2}$

الخطوة الخامسه (تغير الحدود)

اوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(1) $$\int_1^e \frac{1}{x+x\ln x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\cancel{x}\,u}\cdot \cancel{x}\,du$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{u}\,du$$

$$= \ln|u|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2$$

$u = 1+\ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

تغير الحدود

$x=1 \Rightarrow u = 1+\ln 1 = 1$

$x=e \Rightarrow u = 1+\ln e = 2$

---

(2) $$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{x^3}}{u^2+1}\cdot\frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}u\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\left[\tan^{-1}1 - \cancel{\tan^{-1}0}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{4}-0\right] = \frac{\pi}{16}$$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

تغير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=1$

---

(3) $$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int 4x^3(x^2+1)^{-2}\,dx$$

$$= \int 4x^3\,u^{-2}\,\frac{du}{2x}$$

$$= \int 2x^2\,u^{-2}\,du$$

$$= \int_1^5 2(u-1)u^{-2}\,du$$

$$= 2\int_1^5 u^{-1} - u^{-2}\,du$$

$$= 2\int_1^5 \frac{1}{u} - u^{-2}\,du$$

$$= 2\left(\ln|u| - \frac{u^{-1}}{-1}\right)\Big]_1^5$$

$$= 2\left(\ln|u| + \frac{1}{u}\right)\Big]_1^5$$

$$= 2\ln 5 - \frac{8}{5}$$

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\rightarrow x^2+1 = u$

$x^2 = u-1$

تغير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=5$

(1 اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx=-6$ ، اوجد $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

$u=\frac{x}{3}$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}$

$3\,du=dx$

تغير الحدود

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=3 \Rightarrow u=1$

$=\int_0^1 f(u)\cdot 3\,du$

$=3\int_0^1 f(u)\,du$

$=3(-6)=-18$

(2 اذا كان $f(4)=-5\,,\ f(1)=3$ ، فأوجد $\int_1^2 x\ f'(x^2)\,dx$

$u=x^2$

$\frac{du}{dx}=2x$

$\frac{du}{2x}=dx$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=4$

$\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$=\int \cancel{x}\ f'(u)\ \frac{du}{2\cancel{x}}$

$=\frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)\,du$

$=\frac{1}{2}\left[f(4)-f(1)\right]=\frac{1}{2}\left[-5-3\right]=-4$

(3 اذا كان $f(0)=1\,,\ f(1)=9$ ، فأوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\ f'(x)\,dx$

$u=f(x)$

$\frac{du}{dx}=f'(x)$

$\frac{du}{f'(x)}=dx$

$x=0 \Rightarrow u=f(0)=1$

$x=1 \Rightarrow u=f(1)=9$

$=\int 3\sqrt{u}\cdot \cancel{f'(x)}\cdot \frac{du}{\cancel{f'(x)}}$

$=3\int_1^9 u^{1/2}\,du$

$=3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$

$=2\left[9^{3/2}-1^{3/2}\right]=52$

(1) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$u = 1-x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

ملاحظة

$\int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx$

$= \int_0^1 f(t)\,dt$

الاثبات $\int_0^1 f(1-x)\,dx$

$= \int_1^0 f(u)\,(-1)\cdot du$

$= -\int_1^0 f(u)\,du = \int_0^1 f(u)\,du = \int_0^1 f(x)\,dx$ #

---

(2) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن نمذجتها بالعلاقة $T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2 \quad C$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءً (الساعة 17)

$T_{ave} = \frac{1}{17-8} \int_8^{17} 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2 \; dt$

$= \frac{1}{9}\left[3t - \frac{1}{3} \cdot \frac{(t-5)^3}{3} \right]_8^{17}$

$= -18 \quad C^{\circ}$

يمكن حل السؤال مباشرة

او بالتعويض

$u = t-5$

انتهت الوحدة الخامسة بحمد الله....

وأعتذر للجميع عن أي تقصير او خطأ.

اجابات الدرس الأول

① Ⓒ

$$F(x)=\int \sin 2x\,dx=\frac{-\cos 2x}{2}+c=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

② Ⓑ

$$\int t^2\left(4t-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int(4t^3-1)\,dt=t^4-t+c$$

③ Ⓒ

$$\int(\cos^2x-\sin^2x)\,dx=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

④ Ⓒ

$$\int 2x^{-1}+\frac{1}{\sqrt{e^{2x}}}\,dx=\int\frac{2}{x}+\frac{1}{(e^{2x})^{1/2}}\,dx=\int\frac{2}{x}+\frac{1}{e^x}\,dx$$

$$=\int\frac{2}{x}+e^{-x}\,dx=2\ln|x|-e^{-x}+c$$

⑤ Ⓐ

$$\int\frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int\frac{x^{1/3}-3}{x^{2/3}}\,dx=\int\frac{x^{1/3}}{x^{2/3}}-\frac{3}{x^{2/3}}\,dx$$

$$=\int x^{-1/3}-3x^{-2/3}\,dx$$

$$=\frac{3}{2}x^{2/3}-3\cdot\frac{3}{1}x^{1/3}+c$$

$$=\frac{3}{2}x^{2/3}-9x^{1/3}+c$$

⑥ Ⓓ

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$$

⑦ Ⓐ

$$\int\sec x(\tan x-\sec x)\,dx=\int(\sec x\tan x-\sec^2x)\,dx$$

$$=\sec x-\tan x+c$$

⑧ Ⓓ

$$\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x-\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$=\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c$$

⑨ Ⓐ

$$\int\frac{\cos^2x}{1-\sin x}\,dx=\int\frac{1-\sin^2x}{1-\sin x}\,dx=\int\frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{1-\sin x}}=\int(1+\sin x)\,dx$$

$$=x-\cos x+c$$

☆ ممكن حل السؤال باطرافه

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الأول

⑩ Ⓑ

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{x}} - \frac{1}{e^{x}}\,dx = \int e^{x} - e^{-x}\,dx = e^{x} + e^{-x} + c$$

---

⑪ Ⓓ

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$$

---

⑫ Ⓒ

$$\int \frac{3}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\tan^{-1}x + c$$

---

⑬ Ⓐ

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\,dx = \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$$

---

⑭ Ⓒ

$$\int \frac{x^2+e^{3x}}{x^3+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+e^{3x})}{x^3+e^{3x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3e^{3x}}{x^3+e^{3x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+e^{3x}| + c$$

---

⑮ Ⓐ

$$\int e^{x^2+\ln 2x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot e^{\ln 2x}\,dx = \int e^{x^2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \int 2x\,e^{x^2}\,dx$$

$$= e^{x^2} + c$$

---

⑯ Ⓐ

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

---

⑰ Ⓐ

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\,dx = \int \sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + c$$

⑱ Ⓓ

$$\int 3x\, e^{x^2+1}\, dx = 3\int x\, e^{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2}\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{3}{2} e^{x^2+1} + c$$

---

⑲ Ⓑ

$$\int \csc^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int \csc x \cdot \cot x\, dx$$

$$= -\csc x + c$$

---

⑳ Ⓒ

$$\int \frac{t+1}{t+2}\, dt = \int 1 + \frac{-1}{t+2}\, dt$$

$$= t - \ln|t+2| + c$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ t+2 & t+1 \\ & \ominus t \ominus 2 \\ \hline & -1 \end{array}$$

㉑ Ⓒ

$$\int (e^x - 2)^2\, dx = \int (e^x)^2 - 4e^x + 4\, dx$$

$$= \int e^{2x} - 4e^x + 4\, dx$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} - 4e^x + 4x + c$$

㉒ Ⓐ

$$\int \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \sec x \cdot \tan x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| + \sec x + c$$

㉓ Ⓒ

$$\int \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \csc x \cot x - \csc^2 x\, dx = -\csc x + \cot x + c$$

ويمكن حل السؤال بالمرافق .

(24) Ⓐ

$$\int \sec x \, dx \quad \times \quad \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx .$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

(25) Ⓐ

$$\int (\sin x + x\cos x) \, dx$$

تخمين

$$= \int \frac{d}{dx}(x \sin x) \, dx$$

$$= x \sin x + c$$

التكامل يلغي الاشتقاق ،

(26) Ⓑ

$$\int \frac{1}{e^x+1} \, dx \quad \times \quad \frac{e^{-x}}{e^{-x}} .$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{e^x . e^{-x} + e^{-x}} \, dx$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = -\ln|1+e^{-x}| + c .$$

(27) Ⓑ

$$F(x) = \int f(x) \, dx = \int 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = x^2 + \sqrt{x} + c$$

$$F(1) = 3$$ الشرط

$$1 + 1 + c = 3 \Rightarrow c = 1 .$$

$$F(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$$

$$\therefore F(4) = 19$$

(28) Ⓒ

$$\int \frac{bx^2+10}{x^3+5x+1} \, dx = 2\ln|x^3+5x+1| + c .$$

اشتق الطرفين ،

$$\frac{bx^3+10}{x^3+5x+1} = 2 \cdot \frac{3x^2+5}{x^3+5x+1} = \frac{6x^2+10}{x^3+5x+1} \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

㉙ Ⓑ

$$\int \frac{bx}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1}x^2 + c.$$

نشتق الطرفين :

$$\frac{bx}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2)^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^4+1} \Rightarrow \boxed{b=2}$$

㉚ Ⓒ

$$\int \left(3x^2 + f(x)\right) dx = x^3 + \sin x + c.$$

نشتق الطرفين :

$$3x^2 + f(x) = 3x^2 + \cos x \Rightarrow f(x) = \cos x.$$

㉛ Ⓒ

$$\int \tan x \sec^n x\,dx = \frac{1}{3}\sec^3 x + c.$$

نشتق الطرفين :

$$\tan x \sec^n x = \frac{1}{3}\cdot 3\sec^2 x \cdot \sec x \tan x = \sec^3 x \tan x$$

$$\therefore \boxed{n=1}$$

㉜ Ⓐ

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة .

المسافة = مجموع [طول الفترة الزمنية × متوسط السرعة]

$$d = 41(1-0) + 41(2-1) + 42(3-2) + 46(4-3) = 170$$

ملاحظة : اي جواب قريب من هذا العدد يعتبر صحيح .

㉝ Ⓓ

$$f'(x) = 3e^x + 2x$$

$$f(x) = \int 3e^x + 2x\ dx$$

$$= 3e^x + x^2 + c.$$

الشرط : $f(0) = 4.$

$$3e^0 + 0 + c = 4$$

$$c = 1$$

$$f(x) = 3e^x + x^2 + 1$$

㉞ Ⓒ

$v(t) = 10t+2, \quad s(0) = 10$

$s(t) = \int v(t)\,dt$

$= \int 10t+2 \ dt$

$= 5t^2+2t+c$

$s(0) = 10$

$c = 10$

$s(t) = 5t^2+2t+10$

㉟ Ⓑ

$a(t) = 12t^2+4, \quad v(0) = 4, \quad s(0)=1$

$v(t) = \int 12t^2+4 \ dt$

$= 4t^3+4t+c_1$

$v(0) = 4$ الشرط

$c_1 = 4$

$v(t) = 4t^3+4t+4$

$s(t) = \int v(t)\,dt$

$= \int 4t^3+4t+4 \ dt$

$= t^4+2t^2+4t+c_2$

$s(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$s(t) = t^4+2t^2+4t+1$

$s(2) = 33$

㊱ Ⓑ

$v'(t) = f(t) = 20(t^2-1)$

$v(t) = \int 20(t^2-1)\,dt$

$= 200\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c$

$v(0) = 200 \Rightarrow c = 200$

حجم الماء في الخزان

$v(t) = 200\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+200$

$v(3) = 320 \ m^3$

㊲ Ⓐ

$f''(x) = 6x, \quad f(0)=1, \quad f'(0)=0$

$f'(x) = \int 6x \ dx = 3x^2+c_1$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$f(x) = 3x^2$

$f(x) = \int 3x^2\,dx$

$= x^3+c_2$

$f(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$

$f(x) = x^3+1$

㊳

Ⓐ

$$\int_0^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2x e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-4}-1\right] = 0.491$$ ألف

$\therefore$ عدد الحيوانات 491

انتهت اجابات الدرس الأول

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الثاني

① ⓒ

$$\sum_{i=2}^{7}(4i-3) = 5+9+13+17+21+25$$

---

② Ⓑ

حسابية

$a_1=2,\ d=3.$

$a_i = a_1+(i-1)d.$

$= 2+3(i-1)$

$= 3i-1$

لمعرفة حد الاعلى في الجمع

$3i-1=65$

$3i=66$

$i=22$

$$2+5+8+\dots+65$$

$$=\sum_{i=1}^{22}3i-1$$

---

③ Ⓓ

ليست حسابية وليست هندسية

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\dots+\frac{1}{900}$$

$$=\sum_{i=1}^{30}(-1)^{i+1}\frac{1}{i^2}$$

---

④ Ⓐ

تأكد من الخاصية المناسبه

$$\sum_{i=1}^{20}2i+1 = 2\sum_{i=1}^{20}i+\sum_{i=1}^{20}1$$

$$=2\cdot\frac{20(21)}{2}+20(1) = 440$$

---

⑤ ⓒ

تأكد من الخاصية المناسبه

$$\sum_{i=1}^{20}(i-1)(i+1) = \sum_{i=1}^{20}i^2-1 = \sum_{i=1}^{20}i^2-\sum_{i=1}^{20}1$$

$$=\frac{20(21)(41)}{6}-20(1) = \frac{20(21)(41)}{6}-20.$$

---

⑥ Ⓑ

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, \dots, 20$

$\times\ \ \times\ \ \times\ \ \times$

$$\sum_{i=1}^{20}i^2-\sum_{i=1}^{4}i^2 = \sum_{i=5}^{20}i^2$$

---

⑦ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+n(1)\right]$$

$$=\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{n} = \frac{n+1+2}{2n} = \frac{n+3}{2n}.$$

⑧ Ⓒ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1/3$$

---

⑨ Ⓐ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 = \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

---

⑩ Ⓑ

$$\sum_{i=1}^{10} (2i + c) = 140$$

$$2\frac{(10)(11)}{2} + 10c = 140$$

$$110 + 10c = 140 \rightarrow c = 3 \ .$$

---

⑪ Ⓐ

هندسية غير منتهية

$a_1 = 1/e \ , \ r = 1/e$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^i$$

$$= \frac{1/e}{1 - 1/e}$$

$$= \frac{1/e}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

---

⑫ Ⓒ

المطلوب

$$f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(10)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} f(0.1\,i)$$

$$= \sum_{i=1}^{100} 0.3i + 1 = 0.3 \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} 1$$

$$= 0.3 \frac{(100)(101)}{2} + 100(1) = 1615$$

قيم x_i متتالية حسابية

$a_1 = 0.1 \ , \ d = 0.1$

$x_i = 0.1\,i$

$0.1\,i = 10$

$i = 100$

$f(0.1\,i)$

$= 3(0.1\,i) + 1$

$= 0.3i + 1$

ق

⑬

$f(x) = x^2$, $x_i = 2, 4, \cdots, 100$

قيم x_i ه متتاليه حسابيه

$a_1 = 2$, $d = 2$

$x_i = 2 + (i-1)(2)$

$= 2i$

$f(x_i) = x_i^2$

$= (2i)^2$

$= 4i^2$

$2i = 100$

$i = 50$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{50} 4i^2 \cdot 2$$

$$= 8 \sum_{i=1}^{50} i^2$$

$$= 8 \cdot \frac{50(51)(101)}{6} = 343\,400 .$$

انتهت اجابات الدرس الثاني

اجابات الدرس الثالث

①
Ⓐ

لاحظ ان عدد العناصر 15
فان n = ١٤.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2--1}{14} = \frac{3}{14}$$

---

②
Ⓒ

لاحظ ان عدد العناصر 11
فان n = 10

$n = 10$

$$\Delta x = \frac{2-0}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P = \{0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \ldots, 2\}$$

---

③
Ⓑ

العنصر السابع هو x_6

$n = 30$, $[2,5]$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$x_6 = 2 + \frac{5-2}{30}(6) = 2 + \frac{3}{30} \times 6$$

---

④
Ⓒ

$f(x) = 3x^2$, $[0,4]$, $n = 4$

$$\Delta = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$c_i = 1, 2, 3, 4$$

$$A_R = \Delta x[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 1[3 + 12 + 27 + 48] = 90$$

---

⑤
Ⓐ

$$A_L = \Delta x[f(0) + f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)]$$

$$= 0.25[2 + 2.2 + 1.6 + 1.4]$$

$$= 1.8$$

---

⑥
Ⓒ

$$A_R = \Delta x[f(0.1) + f(0.2) + \cdots + f(0.8)]$$

$$= 0.1[2.4 + 2.6 + 2.7 + 2.6 + 2.4 + 2 + 1.4 + 0.6]$$

$$= 1.67$$

⑦ Ⓑ

$f(x) = 3x+5$, $x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2$

نجد x_i متتابعة حسابية

$a_1 = 0.4$, $d = 0.4$

$x_i = 0.4i$

$f(x_i) = 3x_i + 5$

$= 3(0.4i)+5$

$= 1.2i + 5$

$$= \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{5} f(0.4i) \cdot 0.4$$

$$= \sum_{i=1}^{5} (1.2i+5)\, 0.4$$

$$= 0.4\left[1.2\,\frac{(5)(6)}{2} + 5(5)\right] = 17.2$$

---

⑧ Ⓒ

$f(x) = 2x$, $[0,4]$, $n = 16$

$\Delta x = \frac{4-0}{16} = \frac{1}{4}$

$c_i = x_i$

$= 0 + \frac{1}{4} i$

$= \frac{1}{4} i$

$f(x_i) = 2\,\frac{1}{4} i$

$= \frac{1}{2} i$

$$A_R = \sum_{i=1}^{16} f(c_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{16} f\left(\tfrac{1}{4} i\right) \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{16} \frac{1}{2} i \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{16} i = \frac{1}{8} \cdot \frac{16(17)}{2} = 17$$

---

⑨ Ⓐ

$f(x) = x^2$, $[0,4]$

$\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

$c_i = x_i = 0 + \frac{4}{n} i$

$= \frac{4}{n} i$

$f(x_i) = \left(\frac{4}{n} i\right)^2$

$= \frac{16}{n^2} i^2$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{16}{n^2} i^2 \cdot \frac{4}{n}$$

$$= \lim \frac{64}{n^3} \sum i^2$$

⑩ Ⓑ

$$A = \lim A_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum \frac{i^2}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 1/3$$

---

⑪ Ⓐ

$$c_i = \{c, d\} \Rightarrow n = 2$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{2} f(c_i)\Delta x = \frac{2}{3}$$

$$[f(c) + f(d)] \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}[c^2 + d^2] = \frac{2}{3}$$

$$c^2 + d^2 = \frac{4}{3}$$

---

⑫ Ⓑ

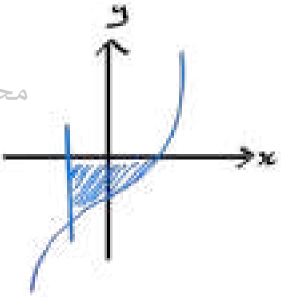
بما أن الدالة تحت محور x فإن .

من اليمين

$$\Delta x = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$c_i = x_i$$
$$= -1 + \frac{1}{50} i$$

$$f(c_i) = c_i^3 - 1$$
$$= (-1 + \frac{1}{50} i)^3 - 1$$



$$A_R = \sum_{i=1}^{100} \boxed{-} f(c_i) \cdot \Delta x$$

$$= \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{100} \boxed{-} [(-1 + \frac{1}{50} i)^3 - 1]$$

[illegible]

$$= 1.98 .$$

انتهت اجابات الدرس الثالث

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الرابع

① Ⓑ

$$\int_3^1 [f(x)+g(x)]\,dx = -\int_1^3 f(x)+g(x)\,dx = -[2(3)-^-2]=-8$$

---

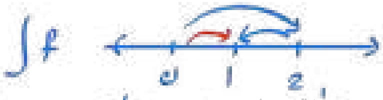
② Ⓑ

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \cancel{\int_1^2 f(x)\,dx} - \cancel{\int_1^2 f(x)\,dx}$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$

يمكن حل السؤال بخط التكامل



$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

---

③ Ⓑ

$$\int_1^7 (g(x)+1)\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + \int_1^7 1\,dx = 10$$

$$\int_1^7 g(x)\,dx + 1(7-1) = 10$$

$$\therefore \int_1^7 g(x) = 10-6 = 4 \Rightarrow \int_7^1 g(x)\,dx = -4$$

$$\therefore \int_7^1 3g(x)\,dx = 3(-4) = -12$$

---

④ Ⓓ

$$\int_3^5 f(x)\,dx = -7-5 = -12$$

من خط التكامل

او

$$\int_1^5 f(x)\,dx = -7$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = -7$$

$$5 + \int_3^5 f(x)\,dx = -7 \Rightarrow \int_3^5 f(x)\,dx = -7$$

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الرابع

---

⑤ Ⓑ

اجعل الحد الاعلى للتكامل يساوي -2

(نفس الحد الأدنى)

$3k+10=-2$

$3k=-12$

$k=-4$

---

⑥ Ⓒ

عندما تكون $2x=6$ فان $x=3$

$$\int_6^6 f(t)\,dt = \cos(3-3)+k$$

$$0 = 1+k \Rightarrow \boxed{k=-1.}$$

---

⑦ Ⓑ

اختار قيمة لـ x.

حيث يكون

الحد الأدنى = الحد الأعلى

$2x=2 \Rightarrow x=1$

$$\int_2^2 f(t)\,dt = 4(1)^2+b(1)-1$$

$$0 = 4+b-1$$

$$0=3+b. \Rightarrow b=-3$$

---

⑧ Ⓓ

$$\int_0^3 (3x^2+k)\,dx = 3.$$

$$x^3+kx\Big]_0^3 = 3$$

$27+3k=3.$

$3k=-24$

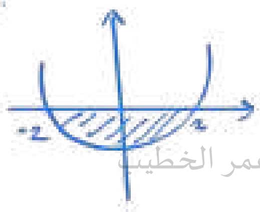
$\boxed{k=-8}$

---

⑨ Ⓒ

$y_1=0$

$y_2=x^2-4.$



$x^2-4=0$

$x=\pm 2$

$$A=\int_{-2}^{2} y_1-y_2\;dx$$

$$=\int_{-2}^{2} 0-(x^2-4)\,dx.$$

$$=-\int_{-2}^{2} x^2-4\;dx$$

---

⑩ Ⓑ

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + k = \int_5^c (2x-1)\,dx.$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx - \int_5^c (2x-1)\,dx = -k.$$

$$\int_1^c (2x-1)\,dx + \int_c^5 (2x-1)\,dx = -k.$$

$$\int_1^5 (2x-1)\,dx = -k$$

$$x^2-x\Big]_1^5 = -k.$$

$$20=-k.$$

$$\therefore \boxed{k=-20}$$

⑪ Ⓓ

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

---

⑫ Ⓑ

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,(x+1)\,dx = \int_0^1 x^{1/2}(x+1)\,dx = \int_0^1 x^{3/2} + x^{1/2}\;dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{16}{15}$$

---

⑬ Ⓑ

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

---

⑭ Ⓒ

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi(1)^2$$

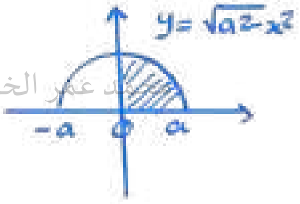
قيمة التكامل تساوي
مساحة ربع دائرة
نصف قطرها a

---

⑮ Ⓓ

$$\int_0^a \sqrt{a-x^2}\;dx$$

$$= \frac{1}{4}\pi(a^2) = \frac{1}{4}\pi a^2$$



قيمة التكامل تساوي
مساحة ربع دائرة
نصف قطرها a

---

⑯ Ⓒ

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 2x\,dx + \int_2^4 4\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^2 + 4(4-2)$$

$$= 12$$

---

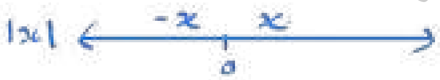
⑰ Ⓒ

$$\int_{-2}^2 |x|\,dx = \int_{-2}^0 -x\;dx + \int_0^2 x\;dx$$

$$-\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big]_0^2$$

$$= 2+2$$

$$= 4$$



---

⑱ Ⓓ

$\int_0^3 f(x)\,dx$

$|2x-2|$: $2-2x$ | $2x-2$ (1)

$= \int_0^1 (2-2x)\,dx + \int_1^3 (2x-2)\,dx$

$= 2x - x^2 \Big]_0^1 + x^2 - 2x \Big]_1^3 = 5$

---

⑲ Ⓐ

$\int_{-5}^{3} f(x)\,dx = \int_{-5}^{0} -1\,dx + \int_0^3 1\,dx$

$= -1(0 - {}^-5) + 1(3-0)$

$= -2$

$|x|$: $-x$ | x (0)

$f(x) = \frac{|x|}{x}$: -1 | 1 (0)

---

⑳ Ⓑ

$f_{ave} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x^2\,dx = \frac{1}{2}(8) = 4$

$f(c) = f_{ave}$

$3c^2 = 4$

$c^2 = \frac{4}{3}$

$c = +\sqrt{\frac{4}{3}} = +\frac{2}{\sqrt{3}} \in (0,2)$

$c = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,2)$

مرفوض

㉑ Ⓑ

$f(c) = f_{ave}$

$3c^2 + 1 = 17$

$3c^2 = 16$

$c^2 = \frac{16}{3}$

$c = +\sqrt{\frac{16}{3}}$, $c = -\sqrt{\frac{16}{3}}$ ✓

$c = \frac{4}{3}$, $c = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ ✗

مرفوض

㉒ Ⓓ

$f_{ave} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 4x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^2 = 8$

$f(c) = f_{ave}$

$4c^3 = 8$

$c^3 = 2$

$c = \sqrt[3]{2} \in (0,2)$ ✓

اجابات الدرس الرابع

㉓ Ⓓ

$$f_{ave} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0.$$

$f(c) = f_{ave}$

$\sin c = 0$

$c = n\pi \ , n \in Z$

$c = 0 \quad \notin (0, 2\pi)$ ✗

$c = \pi \quad \in (0, 2\pi)$ ✓

$c = 2\pi \quad \notin (0, 2\pi)$ ✗

㉔ Ⓓ

$f_{ave} = 2$

$$\frac{1}{k}\int_0^k \sqrt{x}\,dx = 2$$

$$\frac{1}{k}\int_0^k x^{1/2} = 2$$

$$\frac{1}{k}\ \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^k = 2$$

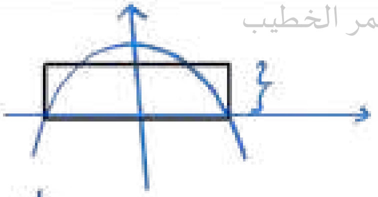
$\frac{2}{3k} \cdot k^{3/2} = 2$

$\frac{2}{3} k^{1/2} = 2$

$k^{1/2} = 3$

$k = 9.$

㉕ Ⓑ



$f(c)$ عرض المستطيل

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{2=2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

مساحة المستطيل .

$\therefore \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ عرض المستطيل

㉖ Ⓑ

$$f_{ave} = \frac{1}{9-2}\int_2^9 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{7}(5 + -3)$$

$$= \frac{2}{7}$$

اجابات التمرين الرابع

㉗ (c)

$$|f(x)| \le 0.1$$

$$-0.1 \le f(x) \le 0.1$$

$$\int_{-1}^{2} -0.1\,dx \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le \int_{-1}^{2} 0.1\,dx$$

$$-0.3 \le \int_{-1}^{2} f(x) \le 0.3$$

اقل قيمة للتكامل هي -0.3

㉘ (c)

$$\int_0^1 e^{-1}\,dx \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$$

$$1/e \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le 1$$

الحد الأدنى هو $1/e$ ، والحد الأعلى هو 1

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le x^2 \le 1$$

$$0 \ge -x^2 \ge -1$$

$$-1 \le -x^2 \le 0$$

$$e^{-1} \le e^{-x^2} \le e^0$$

㉙ (A)

$$\int_0^{\pi} 1\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dx$$

$$\pi \le \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \le \sqrt{2}\pi$$

والحد الأدنى هو π ، الأعلى هو $\sqrt{2}\pi$

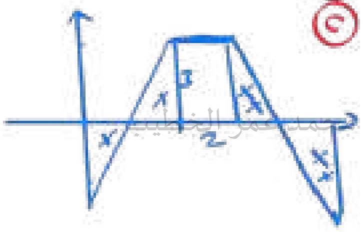
$0 \le x \le \pi$ (الربع الأول، والثاني)

$$0 \le \sin \le 1$$

$$1 \le 1+\sin x \le 2$$

$$1 \le \sqrt{1+\sin x} \le \sqrt{2}$$

㉚ (c)



قيمة التكامل تساوي المساحة بعد حذف المساحات المتساوية فوق محور x وتحته

$$\int_0^{7} f(x)\,dx = 2 \times 3 = 6$$

㉛ (c)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -A_1 + A_2 -$$

$$= -\tfrac{1}{2}(2)(2) + 2 + \tfrac{1}{2}(2)(2) = 2$$

اجابات الدرس الرابع

㉜ ⓒ

$= 2$ $\qquad = 2-1=1$ $\qquad = 2-2=0$

عين مساحات تقريبية .

$$\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0 f(x)\,dx$$

㉝ Ⓓ

$$\int_1^8 \sqrt{x^{-2/3}}\;dx$$

$$\int_1^8 \left(x^{-2/3}\right)^{1/2} dx$$

$$= \int_1^8 x^{-1/3}\;dx$$

$$= \frac{3}{2}\,x^{2/3}\Big]_1^8$$

$$= \frac{3}{2}\left[8^{2/3} - 1^{2/3}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[4-1\right] = \frac{9}{2}$$

㉞ Ⓓ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin c_i^2\,\Delta x = \int_0^2 \sin x^2\,dx.$$

㉟ Ⓑ

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 2 + \frac{6}{6} = 3$$

㊱ Ⓓ

$$\int_2^5 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2+\frac{3}{n}i\right)^2 \cdot \frac{3}{n}$$

$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$

$x_i = 2+\frac{3}{n}i$

$f(x_i) = x_i^2$

$= \left(2+\frac{3}{n}i\right)^2$

㊲ Ⓑ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x = \int_0^2 3x^2\,dx = x^3\Big]_0^2 = 8$$

(38) Ⓓ

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{6}{n} i + 1 \right) \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 6n \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{n} + 6 = 3 + 6 = 9$$

---

(39) Ⓐ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2i/n} \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} \Delta x$$

$$= \int_0^2 e^x \, dx = e^x \Big]_0^2 = e^2 - 1 .$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$b - a = 2$

$a = 0$ نفرض

$b = 2 .$

$x_i = 0 + \Delta x\, i$

$= \frac{2}{n} i$

انتهت اجابات الدرس الرابع

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

① Ⓔ

$$\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\tan^{-1}x\Big]_{-1}^{1} = 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4}\right] = 2\pi$$

② Ⓑ

$$\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^t 1\,dt = 1(t-0) = t.$$

③ Ⓐ

$$\int_1^e \frac{t-3}{t}\,dt = \int_1^e \frac{t}{t} - \frac{3}{t}\,dt = \int_1^e 1 - \frac{3}{t}\,dt$$

$$= t - 3\ln|t|\Big]_1^e$$

$$= (e-3) - (1) = e-4.$$

④ Ⓑ

$$\int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 3\sin^{-1}x\Big]_0^{1/2} = 3\left[\sin^{-1}\tfrac{1}{2} - \sin^{-1}0\right] = 3\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

⑤ Ⓐ

$$\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)dx = \int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{5/2} + 3\ln|x|\Big]_1^4$$

$$= \frac{62}{5} + 3\ln 4$$

⑥ Ⓓ

$$\int_0^2 \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx = \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx$$

$$= \int_0^2 e^{-x} - 2\,dx$$

$$= -e^{-x} - 2x\Big]_0^2 = \frac{-1}{e^2} - 3$$

⑦ Ⓒ

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec x\cdot\tan x\,dx = \sec x\Big]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1.$$

⑧ (ج)

$$f(x) = \int_x^2 \sec t \, dt = -\int_2^x \sec t \, dt$$

$$f'(x) = -\sec x$$

---

⑨ (٩)

$$f(x) = \int_1^2 (t^3 - 5t)\, dt$$ تكامل محدد

$$f'(x) = 0$$

---

⑩ (د)

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin 3t \, dt = \int_c^{x^3} \sin 3t \, dt - \int_c^{x^2} \sin 3t \, dt$$

$$f'(x) = \sin 3x^3 \, (3x^2) - \sin 3x^2 \cdot (2x)$$

$$= 3x^2 \sin 3x^3 - 2x \sin 3x^2$$

---

⑪ (ج)

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2+1} \, dt$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x})^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$$

---

⑫ (ج)

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{d}{dx} \left[\int_c^{\cos x} \sqrt{1-t^2} \, dt - \int_c^{\sin x} \sqrt{1-t^2} \, dt \right]$$

$$= \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x} \, (\cos x)$$

$$= \sqrt{\sin^2 x} \, (-\sin x) - \sqrt{\cos^2 x} \cdot \cos x$$

$$= |\sin x| \, (-\sin x) - |\cos x| \cdot \cos x$$

$$= \sin x \, (-\sin x) - \cos x \, (\cos x)$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1(1) = -1 \quad \#$$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

⑬ Ⓓ

$f'(x) = e^{-(2x)^2} \cdot 2$

$= 2e^{-4x^2}$

$f(x) = 5 + \int_2^{2x} e^{-t^2}\,dt$

$f(1) = 5 + \int_2^2 e^{-t^2}\,dt = 5$

---

⑭ Ⓐ

$\int_1^3 2x\,dx = F(3) - F(1)$

$x^2\Big]_1^3 = F(3) - 5$

$8 = F(3) - 5$

$F(3) = 13$

---

⑮ Ⓐ

$h'(3) = f(g(3)) \cdot g'(3)$

$= f(4) \cdot 2$

$= -1\,(2)$

$= -2$

$h(x) = \int_1^{g(x)} f(t)\,dt$

$h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

---

⑯ Ⓑ

$\int_1^x f(t)\,dt = e^{\sin 2x} - \ln \cos x - 1$

نشتق الطرفين ،

$f(x) = e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 - \frac{-\sin x}{\cos x}$

$f(0) = e^0 \cdot (1) \cdot 2 - 0 = 2$

---

⑰ Ⓐ

$\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx = x^3 + 9x\Big]_{-1}^{2}$

$f(2) - f(-1) = 26 - (-10)$

$7 - f(-1) = 36 \Rightarrow f(-1) = -29$

---

⑱ Ⓓ

لوبيتال .

$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x^2 - 1} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{e}{2}$

---

⑲ Ⓓ

عند $x = 1$ فان

$f(2) \cdot 2 = 9(1)^2 - 1$

$f(2) = 4$

$\int_0^{2x} f(t)\,dt = 3x^3 - x + 5$

$f(2x) \cdot 2 = 9x^2 - 1$

اجابات التمرين الخامس

⑳ Ⓑ

$$\int_0^K (2Kx - x^2)\, dx = 18$$

$$Kx^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^K = 18$$

$$K^3 - \frac{K^3}{3} = 18$$

$$\frac{2K^3}{3} = 18$$

$$K^3 = 27$$

$$K = 3$$

㉑ Ⓒ

$$\int_1^{2x} f(t)\, dt = 2x^2 - 2x + 1$$

$$f(2x) \cdot 2 = 4x - 2$$

$$f(2x) = 2x - 1$$

ارمز $u = 2x$

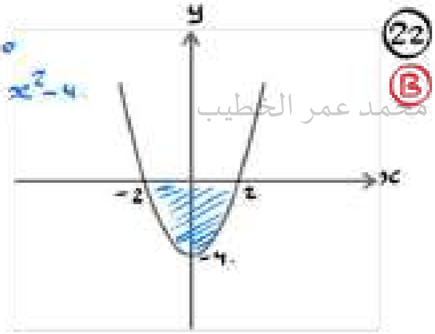
$$f(u) = 2u - 1$$

$$f(x) = 2x - 1$$

㉒ Ⓑ

$g(x) = 0$

$f(x) = x^2 - 4$



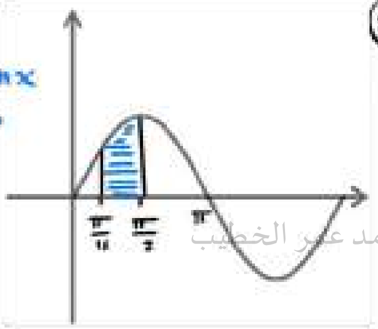
$$A = \int_{-2}^{2} g(x) - f(x)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 0 - (x^2 - 4)\, dx = -\int_{-2}^{2} x^2 - 4\, dx$$

㉓ Ⓒ

$f(x) = \sin x$

$g(x) = 0$



$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -(\cos\tfrac{\pi}{2} - \cos\tfrac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}$$

㉔ Ⓑ

$f(x) = 4x - x^2$

$g(x) = 0$

$$A = \int_0^4 4x - x^2\, dx$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^4$$

$$= \frac{32}{3}$$

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات التمرين الخامس

㉕ Ⓑ

$H(x) = \int_1^{x^2} (2t-1)\,dt$

$H(1) = \int_1^1 2t-1 \;dt = 0$

∴ نقطة التماس $(1,0)$

$H'(x) = (2x^2-1) \cdot 2x$

$m = H'(1) = 2.$

∴ معادلة المماس هي

$y - 0 = 2(x-1)$

$y = 2x - 2$

㉖ Ⓐ

متطابقة

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$= \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\; dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x}\; dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} |\cos x|\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

㉗ Ⓐ

ملاحظة.

بما ان الدالة

تكون غير سالب (موجبة)

فان الازاحة = المسافة

∴ المسافة = التكامل

$$= \int_0^5 9(1-e^{-t})\, dt$$

$$= 9(1+e^{-t})\Big]_0^5$$

$\simeq 36.$

㉘ Ⓓ

$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = y(2) = \int_2^2 \cos(\pi x)\, dx = 0 \Rightarrow (2,0)$

$y' = \cos(\pi x^3)$

$m = y'(2) = \cos 8\pi = 1.$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

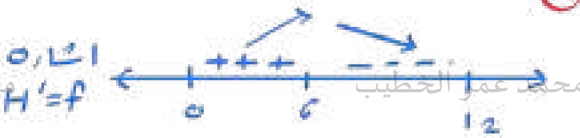
$y - 0 = 1(x-2) \Rightarrow y = x - 2.$

---

(29) (A)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$



فترة التزايد $(0,6)$

---

(30) (B)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$

$H'(x) = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6 , 12$ الأعداد الحرجة

اختبار القيم

$H(0) = 0$

$H(6) > H(12)$

القيمة العظمى المطلقة

عند $x = 6$

---

(31) (C)

$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x)$

$H''(x) = f'(x)$

لاحظ من الرسم ان الدالة f

متناقصة على الفترة $(0,9)$

أي ان $f' < 0$

ومتزايدة على الفترة $(9,12)$

أي ان $f' > 0$

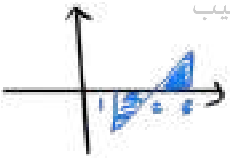
فترة التقعر للأعلى هي $(9,12)$

---

(32) (B)

$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$H(3) = \int_1^3 f(t)\,dt = 0$



---

(33) (C)

$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

$H'(x) = f(x) \Rightarrow H'(4) = f(4) = 2$

---

(34) (B)

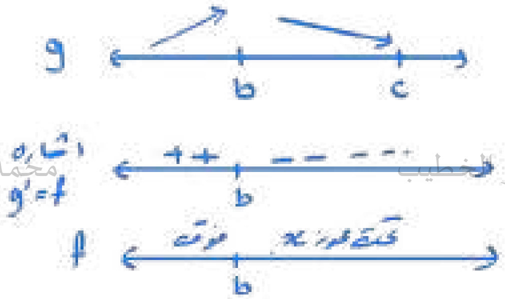
$f_{ave} = \frac{1}{6-1} \int_1^6 f(t)\,dt = \frac{1}{5}[\ 5\ ] = 1$

المساحة = عدد المربعات

㉟ Ⓑ

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$g'(x) = f(x)$$



نلاحظ عندما g(x) خط تقارب افقي كان المشتقه f(x) لا خط تقارب افقي

㊱ Ⓑ

نفرض ان $F(x) - G(x) = c$.

$$\int_0^4 F(x) - G(x)\,dx = 12.$$

$$\int_0^4 c\,dx = 12$$

$$c(4-0) = 12$$

$$c = 3.$$

$$\therefore F(x) - G(x) = 3.$$

$$\therefore \int_0^4 (F(x) - G(x))x^2\,dx$$

$$= \int_0^4 3x^2\,dx$$

$$= x^3\Big]_0^4 = 64.$$

㊲ Ⓑ

$$f(x) = \int_0^x t^2 - 3t + 2\,dt.$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2.$$

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = 1, 2$$

القيمة العظمى للدالة f(x) عند x=1

㊳ Ⓑ

$$f(x) = \int_{-2}^{x^2-6x} e^t\,dt.$$

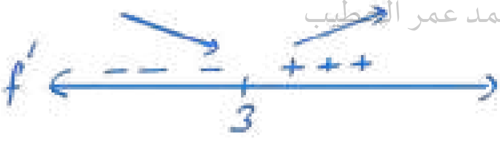
$$f'(x) = e^{x^2-6x}(2x-6).$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^{x^2-6x}\cdot(2x-6) = 0$$

$e^{x^2-6x} = 0$ ، $2x-6=0$

لا يوجد حل $\quad x = 3$



القيمة الصغرى المحلية للدالة عند x=3

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

(39) (B)

$$\int f(x)+2x \, dx = x^3+ax+1$$

اشتق الطرفين ،

$$f(x)+2x = 3x^2+a$$

عوض بدل $x=1$

$$f(1)+2(1) = 3(1)^2+a$$

$$5+2 = 3+a$$

$$\boxed{a=4}$$

---

(40) (A)

$$K+L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx + \int_{\pi/3}^{\pi/6} \tan^2 x \, dx .$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x \, dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^2 x \, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec^2 x - \tan^2 x \, dx$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 \, dx .$$

$$= 1\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

---

(41) (B) سؤال صعب

يمكن حل السؤال بأكثر من طريقة

(1) $0 \leq x < 1$

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,dt = 2x .$$

(2) $x \geq 1$

$$H(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 2\,dt + \int_1^x 2t\,dt$$

$$= 2 + t^2\Big]_1^x$$

$$= 2 + x^2 - 1$$

$$= x^2+1$$

$$\therefore H(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1 \\ x^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

اجابات الدرس الخامس

حل اسئلة الوحدة الخامسة

㊷ سؤال صعب

ⓒ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots+\frac{2n}{n}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1+\frac{1}{n}i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}i\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x$$

$$= \int_0^1 (1+x)\,dx = 3/2 .$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

$b-a=1$

افرض $a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0+\frac{1}{n}i$

$= \frac{1}{n}i$

ويمكن ان يكون $\int_1^2 x\,dx = 3/2 .$

㊸ سؤال صعب

ⓒ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n}i\cdot\frac{1}{n}.$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\pi x_i\cdot\Delta x$$

$$= \int_0^1 \sin\pi x\,dx$$

$$= -\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}.$$

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$a=0 \Rightarrow b=1$

$x_i = 0+\Delta x i$

$= \frac{1}{n}i$

حل أسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس الخامس

㊹ Ⓑ

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$H'(x) = f(x)$$

$H'(x) = 0$

$f(x) = 0$

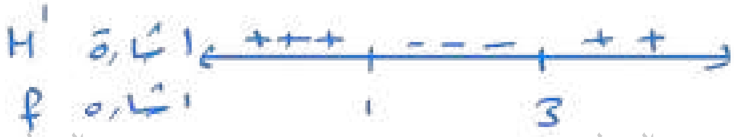
$x = 1 , 3$

الاعداد الحرجة لـ H

㊺ Ⓓ

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$H'(x) = f(x)$$



$H'(x) = 0$

$f(x) = 0$

$x = 1 , 3$

الاعداد الحرجة لـ H

فترة تزايد

$(-\infty , 1) \cup (3 , \infty)$

انتهت اجابات الدرس الخامس

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس السادس

①
Ⓑ

$$\int x^2(x^3+1)^5\,dx$$

$$= \int \cancel{x^2}\, u^5 \,\frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^5\,du$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{18}\,(x^3+1)^6 + c.$$

$u = x^3+1$

$\frac{du}{dx} = 3x^2$

$\frac{du}{3x^2} = dx$

---

②
Ⓐ

$$\int \sec^2 x\,\sqrt{\tan x}\,dx.$$

$$= \int \cancel{\sec^2 x}\cdot\sqrt{u}\,\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$$

$$= \int u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + c = \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + c.$$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx.$

---

③
Ⓑ

$$\int \sin x\,\cos^6 x\,dx$$

$$= \int \cancel{\sin x}\; u^6\,\frac{du}{-\cancel{\sin x}}$$

$$= -\int u^6\,du$$

$$= -\frac{1}{7}u^7 + c = -\frac{1}{7}\cos^7 x + c.$$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

---

④
Ⓐ

$$\int x^2 \cos x^3\,dx$$

$$= \int \cancel{x^2}\,\cos u\,\frac{du}{3\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\sin u + c = \frac{1}{3}\sin x^3 + c.$$

اجابات الدرس الخامس

حل أسئلة الوحدة الخامسة

⑤ Ⓒ

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}}\,dx = \int x^2 e^{-x^3}\,dx$$

$u = -x^3$

$\frac{du}{dx} = -3x^2$

$\frac{du}{-3x^2} = dx$

$$= \int \cancel{x^2}\, e^{u}\, \frac{du}{-3\cancel{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int e^{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{3} e^{u} + c = -\frac{1}{3} e^{-x^3}$$

يمكن حل السؤال مباشرة . معلومات الدرس الاول .

---

⑥ Ⓑ

يمكن حل السؤال بدون تعويض (وهو الافضل) .

$$\int \tan 2x \; dx$$

$$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx$$

$u = \cos 2x$

$\frac{du}{dx} = -2\sin 2x$

$\frac{du}{-2\sin 2x} = dx$

$$= \int \frac{\cancel{\sin 2x}}{u} \cdot \frac{du}{-2\cancel{\sin 2x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + c.$$

---

⑦ Ⓐ

$$\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2}\,dx.$$

$u = \ln x + 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$$= \int \frac{1}{\cancel{x}\cdot u^2} \cdot \cancel{x}\,du$$

$$= \int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{-1}{u} + c = \frac{-1}{\ln x + 1} + c.$$

حل اسئلة الوحدة الخامسة

اجابات الدرس السادس

(٨) (ج)

$$\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1}\,dx$$

$u=\tan^{-1}x$

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$

$(x^2+1)\,du=dx$

$$=\int \frac{u^2}{\cancel{x^2+1}}\cdot\cancel{(x^2+1)}\,du$$

$$=\int u^2\,du$$

$$=\frac{1}{3}u^3+c=\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$$

---

(٩) (د)

$$\int\frac{1}{4x^2+25}\,dx=\frac{1}{25}\int\frac{1}{\frac{4x^2}{25}+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{25}\int\frac{1}{(\frac{2x}{5})^2+1}\,dx$$

$u=\frac{2x}{5}=\frac{2}{5}x$

$\frac{du}{dx}=\frac{2}{5}$

$\frac{5\,du}{2}=dx$

$$=\frac{1}{\cancel{25}_{5}}\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{\cancel{5}\,du}{2}$$

$$=\frac{1}{10}\tan^{-1}u+c=\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+c$$

---

(١٥) (ج)

$$\int\sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx=\int\sqrt[3]{x^3(x^2-1)}\,dx$$

$$=\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$$

$u=x^2-1$

$\frac{du}{dx}=2x$

$\frac{du}{2x}=dx$

$$=\int\cancel{x}\;u^{1/3}\;\frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}u^{4/3}+c$$

$$=\frac{3}{8}(x^2-1)^{4/3}+c$$

⑪ Ⓑ

$$\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^{x}}{1+(e^{x})^{2}}$$

$$= \int \frac{\cancel{e^{x}}}{1+u^{2}} \cdot \frac{du}{\cancel{e^{x}}}$$

$$= \int \frac{1}{1+u^{2}}\,du$$

$$= \tan^{-1} u + c$$

$$= \tan^{-1} e^{x} + c.$$

$u = e^{x}$

$\frac{du}{dx} = e^{x}$

$\frac{du}{e^{x}} = dx.$

---

⑫ Ⓑ

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^{2}}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}} \cdot du$$

$$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}(x-1) + c.$$

أكمال المربع

$x - x^{2}$

$= -(x^{2} - 2x)$

$= -(x^{2} - 2x + 1 - 1)$

$= -((x-1)^{2} - 1)$

$= 1 - (x-1)^{2}$

أفرض

$u = x - 1$

$du = dx.$

---

⑬ ☆ Ⓑ

$$\int \frac{3x\sqrt{x}}{1+x^{5}}\,dx = \int \frac{3x^{3/2}}{1+x^{5}}\cdot dx = \int \frac{3x^{3/2}}{1+(x^{5/2})^{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{3\cancel{x^{3/2}}}{1+u^{2}} \cdot \frac{2du}{5\cancel{x^{3/2}}}$$

$$= \frac{6}{5}\int \frac{1}{1+u^{2}}\,du$$

$$= \frac{6}{5}\tan^{-1} u + c = \frac{6}{c}\tan^{-1}(x^{3/2}) + c.$$

$u = x^{5/2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{5}{2}x^{3/2}$

$\frac{2du}{5x^{3/2}} = dx$

ممكن حل السؤال بالتعويض مرتين

⑭ Ⓐ

$$\int t\sqrt{t-1}\,dt = \int t\,(t-1)^{1/2}\,dt$$

$$= \int t\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int t\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int (u+1).\,u^{1/2}\,du$$

$$= \int (u^{3/2} + u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{3}{2}u^{3/2} + c = \frac{2}{5}(t-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + c$$

$u = t-1$

$\frac{du}{dt} = 1$

$du = dt$

$t-1 = u$

$t = u+1$

$t = u+1$

---

⑮ Ⓐ

$$\int (1+e^{\tan x})\sec^2 x\,dx$$

$$= \int (1+e^{u})\,\cancel{\sec^2 x}\cdot\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$$

$$= \int (1+e^{u})\,du$$

$$= u + e^{u} + c$$

$$= \tan x + e^{\tan u} + c.$$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

---

⑯ Ⓒ

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}}\,dx = \int x\,(3x^2+5)^{-1/2}\,dx$$

$$= \int \cancel{x}\,u^{-1/2}\,\frac{du}{6\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{6}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 2u^{1/2} + c = \frac{1}{3}(3x^2+5)^{1/2} + c$$

$u = 3x^2+5$

$\frac{du}{dx} = 6x.$

$\frac{du}{6x} = dx$

⑰ Ⓐ

$$\int \frac{3}{x^{1/4}+x}\,dx = \int \frac{3}{x^{1/4}(1+x^{3/4})}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{3}}{\cancel{x^{1/4}}\;u} \cdot \frac{4}{\cancel{3}}\cancel{x^{1/4}}\,du.$$

$$= \int \frac{4}{u}\,du$$

$$= 4\,\mathrm{Ln}|u| + c = 4\,\mathrm{Ln}|1+x^{3/4}| + c$$

$u = 1+x^{3/4}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4}x^{-1/4}$

$\frac{4}{3}\frac{du}{x^{-1/4}} = dx$

$\frac{4}{3}x^{1/4}\,du = dx$

---

⑱ Ⓒ

$$\int \frac{1}{x^2-6x-10}$$

$$= \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx$$

$u = x-3$

$du = dx$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \tan^{-1}u + c = \tan^{-1}(x-3) + c$$

اكمال المربع

$x^2-6x+10$

$= x^2-6x+9+10-9$

$= (x-3)^2+1$

---

⑲ Ⓓ

$$\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int \frac{x}{(x^4)^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x^3}}{u^2+1} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}u + c$$

$$= \frac{1}{4}\tan^{-1}x^3 + c.$$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

اجابات الدرس الخامس

⑳ Ⓒ

$$\int \frac{x^5}{x^{12}+4}\,dx = \frac{x^5}{(x^6)^2+4}\,dx.$$

$u = x^6$

$\frac{du}{dx} = 6x^5$

$\frac{du}{6x^5} = dx$

$$= \int \frac{\cancel{x^5}}{u^2+4}\,\frac{du}{\cancel{6x^5}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{u}{2})^2+1}\,du.$$

$w = \frac{u}{2} = \frac{1}{2}u$

$\frac{dw}{du} = \frac{1}{2}$

$2\,dw = du.$

$$= \frac{1}{24}\int \frac{1}{w^2+1}\cdot 2\,dw$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1} w + c$$

$$= \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{u}{2} + c = \frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{1}{2}x^6 + c.$$

㉑ Ⓐ

$$\int 2(\tan x + \tan^3 x)\,dx = \int 2\tan(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int 2\tan x\cdot\sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$$= \int 2u\cdot\cancel{\sec^2 x}\cdot\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}.$$

$$= \int 2u\,du.$$

$$= u^2 + C = \tan^2 x + C.$$

㉒ Ⓐ

$$\int 18(3\tan x+4)^5\sec^2 x\,dx$$

$u = 3\tan x + 4.$

$\frac{du}{dx} = 3\sec^2 x$

$\frac{du}{3\sec^2 x} = dx$

$$= \int 18u^5\cdot\cancel{\sec^2 x}\cdot\frac{du}{3\cancel{\sec^2 x}}$$

$$= \int 6u^5\,du = u^6 + c = (3\tan x+4)^6 + c$$

㉓ Ⓒ

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c.$$

㉔ Ⓑ

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = du$

$\to x^2 = u$ خطوة رابعة

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int \frac{1}{x\sqrt{(x^2)^2-1}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{2x}.$$

$$= \boxed{\int \frac{1}{2x^2\sqrt{u^2-1}}\,du}$$ لا يجوز وجود x و u في التكامل.

$$= \int \frac{1}{2u\sqrt{u^2-1}}\,du = \int \frac{1}{2|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{1}{2}\sec^{-1} u + c. = \frac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + c.$$

㉕ Ⓑ

$$\int_0^1 x\sqrt{8x^2+1}\,dx = \int_0^1 x(8x^2+1)^{1/2}\,dx$$

$u = 8x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 16x$

$\frac{du}{16x} = dx$

$x = 0 \to u = 1$

$x = 1 \to u = 9.$

$$= \int \cancel{x}\, u^{1/2}\,\frac{du}{16\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{16}\int_1^9 u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9 = \frac{1}{24}[27-1] = \frac{13}{12}.$$

㉖ Ⓒ

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{u}}{\cancel{\sqrt{x}}}\cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$$

$$= \int_1^2 2e^{u}\,du$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$u = 4 \Rightarrow u = 2$

㉗ Ⓐ

$$\int_0^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$$

$$= \int \cancel{x}\sin u\,\frac{du}{2\pi\cancel{x}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{9\pi}\sin u\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos u\right]_0^{9\pi} = \frac{-1}{2\pi}\left[\cos 9\pi - \cos 0\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[-2\right] = \frac{1}{\pi}$$

$u = \pi x^2$

$\frac{du}{dx} = 2\pi x$

$\frac{du}{2\pi x} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 3 \Rightarrow u = 9\pi$

㉘ Ⓒ

$$\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int \cancel{x}\,e^{u}\,\frac{du}{-2\cancel{x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^{u}\,du$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^{u}\Big]_0^{-1} = \frac{-1}{2}\left[e^{-1} - 1\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$u = -x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$

$\frac{du}{-2x} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 1 \Rightarrow u = -1$

㉙ Ⓓ

$$\int_1^2 2\,f(x-1)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 f(u)\,du$$

$$= 2(-3) = -6$$

$u = x - 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

(30) Ⓒ

$$\int_2^6 f(4-x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} f(u) \cdot (-du)$$

$$= -\int_2^{-2} f(u)\,du$$

$$= \int_{-2}^{2} f(u)\,du$$

$$= 10 - 3 = 7$$

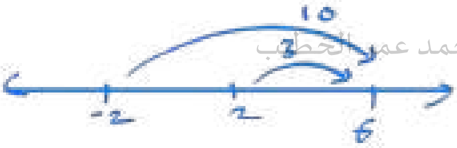
$u = 4 - x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$-du = dx$

$x = 2 \Rightarrow u = 2$

$x = 6 \Rightarrow u = -2$



---

(31) Ⓒ

$$\int_0^{\pi} \cos x \, f'(\sin x)\,dx$$

$$= \int \cancel{\cos x}\, f'(u)\, \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int_0^{2} f'(u)\,du$$

$$= 0$$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = \pi \Rightarrow u = 0$

---

(32) Ⓒ

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx = \ln|f(x)+1|\Big]_0^1$$

$$= \ln|f(1)+1| - \ln|f(0)+0|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|-2+1|$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

معطى من
السؤال السابق
بالتعويض

---

(33) Ⓒ

$$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{f(u)}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot 2\cancel{\sqrt{x}}\,du$$

$$= 2\int_1^2 f(u)\,du = 2[f(2) - f(1)] = 2(5-1)$$

$$= 12$$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$x = 4 \Rightarrow u = 2$

اجابات الدرس الخامس

حل أسئلة الوحدة الخامسة

③④ ⓒ

$$\int_0^3 2\,f(x)\,F(x)\,dx$$

$$= \int 2\,\cancel{f(x)}\cdot u\ \frac{du}{\cancel{f(x)}}$$

$$= 2\int_1^4 u\,du$$

$$= 2\,\frac{u^2}{2}\Big]_1^4 = 4^2-1^2=15$$

لاحظ ان $F'(x)=f(x)$

$u = F(x)$

$\frac{du}{dx} = F'(x)$

$\frac{du}{dx} = f(x)$

$\frac{du}{f(x)} = dx$

$x=0 \Rightarrow u=F(0)=1$

$x=3 \Rightarrow u=F(3)=4$

---

③⑤ Ⓓ

$$\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\,dx$$

$$= \int x\sqrt{u}\ \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_5^9 \left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_5^9 (u+1)\sqrt{u}\,du$$

$\therefore\ k = 1/4.$

$u = 2x-1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$2x-1=u$

$2x = u+1$

$x = \frac{u+1}{2}$

$x=3 \Rightarrow u=5$

$x=5 \Rightarrow u=9$

---

③⑥ ⓒ

$$\int\left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{u}\,du\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\cdot \ln x\ dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\cdot w\cdot x\,dw.$$

$$= \int w\,dw.$$

$$= \frac{1}{2}w^2+c$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

$\int_1^x \frac{1}{u}\,du = \ln u\Big]_1^x$

$= \ln x - \ln 1$

$= \ln x.$

$w = \ln x$

$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,dw = dx$

㊲ Ⓓ

$$g(x) = \int_0^{2x} \left(\int_0^u \sqrt{t^2+1}\, dt \right) du.$$

نفرض

$$\int_0^u \sqrt{t^2+1}\, dt = f(u)$$

$$= \int_0^{2x} f(u)\, du.$$

$$g'(x) = f(2x) \cdot 2.$$

$$= 2 \int_0^{2x} \sqrt{t^2+1}\, dt$$

$$g''(x) = 2 \cdot \sqrt{(2x)^2+1} \cdot 2$$

$$= 4\sqrt{4x^2+1}$$

㊳ Ⓑ

$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$u = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$$

$$3\, du = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow u = 1.$$

$$= \int_0^1 f(u) \cdot 3\, du$$

$$= 3\int_0^1 f(u)\, du = 3(-6) = -18$$

㊴ Ⓑ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$f(x) = \sin x$$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)}\, dx = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

انتهت اجابات الدرس السادس

ونتمنى للجميع التوفيق