أسئلة الهيكل الوزاري – الجزء الكتابي مع الحل في اتصال الدالة

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول ⇦ حلول ⇦ الملف
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 12-11-2026 05:58:22
المزيد من مادة رياضيات: ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس
إعداد: محمد طه

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم					
صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول	
1	أسئلة الهيكل الوزاري – الجزء الكتابي مع الحل في اتصال الدالة
2	أسئلة الهيكل الوزاري – الجزء الإلكتروني (البنود 11-20)
3	أسئلة الهيكل الوزاري في – الجزء الإلكتروني (البنود 11-20) مع الحلول
4	أسئلة الهيكل الوزاري الجزء الإلكتروني: مشتقات الدوال الأسية والمماس الأفقي – البند 16
5	أسئلة الهيكل الوزاري وملخص قوانين المشتقات – قاعدة القوة والمشتقة عند نقطة Reveal

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية	
تطبيق المناهج على Store App (آبل)	تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

Reveal • Bridge • 12 متقدم

أكاديمية طه للرياضيات
خاص وحصري
0566151988

أكاديمية طه للرياضيات

TAHA MATH ACADEMY

الصف الثاني عشر • المسار المتقدم

ADVANCED • Reveal

الأسئلة

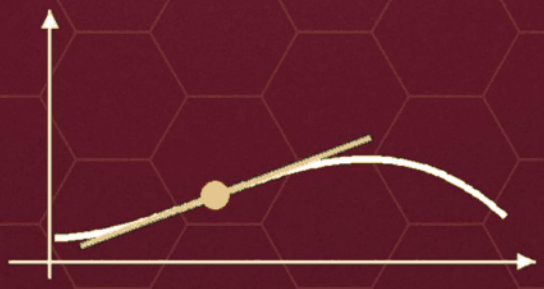
56

أسئلة الهيكل الوزاري • الفصل الدراسي الأول

الجزء الكتابي

Written Part • Free Response

البنود 21a إلى 26



إعداد وتقديم: الأستاذ محمد طه • 0566151988

انضم إلى مجتمع 12 متقدم • Reveal

يوتيوب

الموقع
tahamath.com

واتساب

G12-ADV • T1 • STR • W

البند 21a: البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة

Determine the continuity of a function at a given point.

الدرس 4-2: الاتصال ونتائجه • الكتاب ص 88 إنجليزي • العربي ص 90 • تعريف 4.1

الأسئلة: سؤالان من إعداد المعلم + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 21a • Summary of Rules

تعريف الاتصال عند نقطة — Definition of Continuity (4.1)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

شروط الاتصال الثلاثة — Three Conditions of Continuity

$$(1)\ f(a) \qquad (2)\ \lim_{x \to a} f(x) \qquad (3)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

قيمة الدالة معرّفة، والنهاية موجودة، وهما متساويتان

الاتصال من اليمين ومن اليسار — One-sided Continuity

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

عند نقطة التقاء دالة متعددة التعريف — Continuity at a Joint

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | من إعداد المعلم

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

ادرس اتصال الدالة الآتية عند النقطة المعطاة باستخدام تعريف الاتصال:

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 3x-1, & x\geq 1\end{cases}, \qquad x=1$$

الحل:

الشرط الأول: الدالة معرّفة: $f(1)=3(1)-1=2$

الشرط الثاني: النهاية موجودة: $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2, \quad \lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

الشرط الثالث متحقق: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$

الدالة متصلة عند $x=1$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | من إعداد المعلم

الاتصال | Continuity | عدم اتصال قابل للإزالة | Removable Discontinuity

ادرس اتصال الدالة الآتية عند النقطة المعطاة باستخدام تعريف الاتصال:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, \qquad x=2$$

الحل:

غير معرّفة فالشرط الأول غير متحقق: $x-2=0 \Rightarrow f(2)$

الدالة غير متصلة عند $x=2$

النهاية موجودة فعدم الاتصال قابل للإزالة: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 21a

Previous MOE Exam Questions • Determine the continuity of a function at a given point.

ناتج التعلم: البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • مقالي 1a | 2024-2025

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

حدّد قيمتي a و b اللتين تجعلان الدالة الآتية متصلة:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\le -1\\ ax+b, & -1<x<3\\ -2, & x\ge 3\end{cases}$$

الحل:

$x=-1:\quad f(-1)=2,\qquad \lim\limits_{x\to -1^+}(ax+b)=-a+b \;\Rightarrow\; -a+b=2$

$x=3:\quad f(3)=-2,\qquad \lim\limits_{x\to 3^-}(ax+b)=3a+b \;\Rightarrow\; 3a+b=-2$

$4a=-4 \;\Rightarrow\; a=-1$

$b=2+a=1$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س13 | 2020-2021

الاتصال | Continuity | عدم اتصال قابل للإزالة | Removable Discontinuity

حدّد قيمتي الثابتين m و n اللتين تجعلان الدالة الآتية متصلة عند النقطة المعطاة:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-mx+2}{x-1}, & x\neq 1\\ n, & x=1\end{cases} \qquad x=1$$

الحل:

لتكون النهاية عدداً يجب أن ينعدم البسط أيضاً: $x\to 1:\ x-1\to 0$

$$1-m+2=0 \ \Rightarrow\ m=3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$$

$$n=h(1)=-1$$

إجابة س5 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س9 | 2019-2020

الاتصال | Continuity | عدم اتصال غير قابل للإزالة | Nonremovable Discontinuity

أوجد جميع النقاط التي تكون عندها الدالة الآتية غير متصلة، وحدّد ما إذا كان عدم الاتصال قابلاً للإزالة:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x^2, & 0\le x\le 2\\ 4x-3, & x>2\end{cases}$$

الحل:

متصلة: $x=0:\ \lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2$

$x=2:\ \lim\limits_{x\to 2^-}x^2=4,\qquad \lim\limits_{x\to 2^+}(4x-3)=5$

عدم اتصال غير قابل للإزالة: $4\neq 5\ \Rightarrow\ x=2$

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | ★ وزاري • س8 | 2018-2019

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

حدّد قيمتي a و b اللتين تجعلان الدالة الآتية متصلة:

$$f(x)=\begin{cases} a\left(\tan^{-1}x+2\right), & x<0 \\ b\cos\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi\right], & 0\le x\le 3 \\ \ln(x-2)+x^2+1, & x>3 \end{cases}$$

الحل:

$x=0:\quad 2a=b\cos\frac{\pi}{3}=\frac{b}{2}\ \Rightarrow\ b=4a$

$x=3:\quad b\cos\frac{10\pi}{3}=-\frac{b}{2},\qquad \lim_{x\to 3^+}\left[\ln(x-2)+x^2+1\right]=10$

$-\frac{b}{2}=10\ \Rightarrow\ b=-20$

$a=\frac{b}{4}=-5$

إجابة س7 | المستوى: أساسي | درجتان | ★ وزاري • س2 | 2016-2017

الاتصال | Continuity | عدم اتصال قابل للإزالة | Removable Discontinuity

الدالة الآتية معرّفة لجميع الأعداد الحقيقية عدا النقطة المعطاة. أوجد القيمة التي نعرّف بها الدالة عند هذه النقطة لتصبح متصلة عندها:

$$g(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x}, \qquad x \neq 1$$

الحل:

فرق بين مكعبين: $1 - x^3 = (1 - x)\left(1 + x + x^2\right)$

نختصر ثم نعوّض: $\lim\limits_{x \to 1}\left(1 + x + x^2\right) = 3$

نعرّف الدالة بقيمة النهاية: $g(1) = 3$

البند 21b: استخدام خصائص الاتصال لدراسة اتصال دالة أو تركيب دوال عند نقطة معينة

Use the continuity properties to study the continuity of a function or a composition of functions at a given point.

الدرس 4-2: الاتصال ونتائجه • الكتاب ص 95 إنجليزي • العربي ص 97

أسئلة الكتاب: تمارين 29 إلى 32 • سؤالان من إعداد المعلم

ملخص قوانين البند 21b • Summary of Rules

الاتصال عند نقطة — Continuity at a Point

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

خصائص الاتصال — Properties (Thm 4.2)

$$f \pm g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0)$$

متصلة عند النقطة إذا كانت الدالتان متصلتين عندها

اتصال الدالة المركبة — Composition (Corollary 4.1)

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

الدالة الداخلية متصلة عند النقطة، والخارجية متصلة عند صورتها

كثيرات الحدود — Polynomials (Theorem 4.1)

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

كل جزء خطي في دالة الضريبة متصل

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 95 إنجليزي • العربي ص 97 • تمرين 29

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

تمثل الدالة الآتية الضريبة التي يدفعها الأستاذ محمد طه على دخل مقداره x. أوجد قيمة الثابت c التي تجعل الدالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$T(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 0.14x, & 0<x<10000\\ c+0.21x, & 10000\le x\end{cases}$$

الحل:

متصلة: $x=0:\quad T(0)=0=\lim_{x\to 0+} 0.14x$

$x=10000:\quad \lim_{x\to 10000-} 0.14x=1400$

قيمة الدالة: $T(10000)=c+0.21(10000)=c+2100$

شرط الاتصال: $c+2100=1400 \Rightarrow c=-700$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 95 إنجليزي • العربي ص 97 • تمرين 32

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

تمثل الدالة الآتية جزءاً من دالة الضريبة على دخل مقداره x. بيّن أن الدالة متصلة عند النقطة المعطاة:

$$T(x) = \begin{cases} 0.10x, & 0 < x \le 6000 \\ 0.15x - 300, & 6000 < x \le 27950 \end{cases} \qquad x = 6000$$

الحل:

قيمة الدالة: $T(6000) = 0.10(6000) = 600$

$$\lim_{x \to 6000^-} 0.10x = 600, \qquad \lim_{x \to 6000^+} (0.15x - 300) = 900 - 300 = 600$$

الدالة متصلة: $\lim_{x \to 6000} T(x) = 600 = T(6000)$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 95 إنجليزي • العربي ص 97 • تمرين 30

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

تمثل الدالة الآتية الضريبة على دخل مقداره x. أوجد قيمتي الثابتين a و b اللتين تجعلان الدالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية:

$$T(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ a+0.12x, & 0<x\le 20000\\ b+0.16(x-20000), & x>20000\end{cases}$$

الحل:

$x=0:\quad \lim\limits_{x\to 0+}(a+0.12x)=a=T(0)=0 \Rightarrow a=0$

$x=20000:\quad T(20000)=0+0.12(20000)=2400$

$\lim\limits_{x\to 20000+}[b+0.16(x-20000)]=b$

شرط الاتصال: $b=2400$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | من إعداد المعلم

الدالة المركبة | Composite Function | الاتصال | Continuity

استخدم خصائص الاتصال لدراسة اتصال الدالة المركبة h عند النقطة المعطاة:

$$h(x) = f(g(x)), \qquad f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = x^2 - 5, \qquad x = 3$$

الحل:

كثيرة حدود متصلة: $g(x) = x^2 - 5, \quad g(3) = 4$

دالة الجذر متصلة للأعداد الموجبة: $f(x) = \sqrt{x}, \quad 4 > 0$

$$\lim_{x \to 3} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to 3} g(x)\right) = f(4) = 2 = h(3)$$

الدالة المركبة متصلة عند هذه النقطة: h

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 95 إنجليزي • العربي ص 97 • تمرين 31

الاتصال | Continuity | دالة متعددة التعريف | Piecewise Function

تمثل الدالة الآتية جزءاً من دالة الضريبة على دخل مقداره x. أوجد قيمتي الثابتين b و c اللتين تجعلان الدالة متصلة:

$$T(x) = \begin{cases} 0.30x - 5685, & 67700 < x \le 141250 \\ 0.35x - b, & 141250 < x \le 307050 \\ 0.386x - c, & x > 307050 \end{cases}$$

الحل:

قيمة الدالة من اليسار: $x = 141250 : \quad 0.30(141250) - 5685 = 36690$

نساوي من اليمين: $0.35(141250) - b = 49437.5 - b = 36690 \Rightarrow b = 12747.5$

قيمة الدالة من اليسار: $x = 307050 : \quad 0.35(307050) - 12747.5 = 94720$

نساوي من اليمين: $0.386(307050) - c = 118521.3 - c = 94720 \Rightarrow c = 23801.3$

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | من إعداد المعلم

الاتصال | Continuity | عدم اتصال قابل للإزالة | Removable Discontinuity

ادرس اتصال الدالة الآتية عند النقطة المعطاة، وحدّد نوع عدم الاتصال إن وُجد:

$$h(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, \qquad x=2$$

الحل:

$\sqrt{x+2}-2,\quad x-2$: 2 دالتان متصلتان عند

$x=2:\quad x-2=0$: المقام ينعدم فالدالة غير معرّفة وغير متصلة

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$: موجودة فعدم الاتصال قابل للإزالة

البند 22: أوجد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات

Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits

الدرس 5-2: النهايات التي تتضمن اللانهاية وخطوط التقارب • الكتاب ص 106 إنجليزي • العربي ص 108

أسئلة الكتاب: تمارين 29 إلى 32 • سؤالان من إعداد المعلم + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 22 • Summary of Rules

خط التقارب الرأسي — Vertical Asymptote

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; x = a$$

أصفار المقام التي لا تُلغى

خط التقارب المائل — Slant Asymptote

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \;\Rightarrow\; y = mx + b$$

درجة البسط أكبر من درجة المقام بواحد

القسمة الطويلة — Long Division

$$\frac{p(x)}{q(x)} = mx + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

درجة الباقي أقل من درجة المقام

خط التقارب الأفقي — Horizontal Asymptote

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \;\Rightarrow\; y = L$$

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 106 إنجليزي • العربي ص 108 • تمرين 30 • وزاري | 2017-2018

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

الحل:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad \lim_{x \to 2^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} y = \infty$

خط تقارب رأسي: $x = 2$

القسمة الطويلة: $\frac{x^2 + 1}{x - 2} = x + 2 + \frac{5}{x - 2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x - 2} = 0 \Rightarrow y = x + 2$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | من إعداد المعلم

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$$

الحل:

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad \lim_{x \to -1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} y = \infty$

خط تقارب رأسي: $x = -1$

القسمة الطويلة: $\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = x - 4 + \frac{4}{x + 1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0 \Rightarrow y = x - 4$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 106 إنجليزي • العربي ص 108 • تمرين 29 • وزاري | 2021-2022

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

الحل:

أصفار المقام، والبسط لا ينعدم عندها: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$\lim_{x \to 2^-} y = \infty, \quad \lim_{x \to 2^+} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^-} y = \infty, \quad \lim_{x \to -2^+} y = -\infty$

القسمة الطويلة: $\frac{x^3}{4 - x^2} = -x + \frac{4x}{4 - x^2}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow y = -x$

$x = -2, \quad x = 2, \quad y = -x$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 106 إنجليزي • العربي ص 108 • تمرين 31 • وزاري | 2020-2021

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^3}{x^2 + x - 4}$$

الحل:

أصفار المقام: $x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

لأن البسط لا ينعدم عندهما: $x \to \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} : \quad y \to \pm\infty$

القسمة الطويلة: $\frac{x^3}{x^2 + x - 4} = x - 1 + \frac{5x - 4}{x^2 + x - 4}$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x - 4}{x^2 + x - 4} = 0 \Rightarrow y = x - 1$

$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad y = x - 1$

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 106 إنجليزي • العربي ص 108 • تمرين 32

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^4}{x^3 + 2}$$

الحل:

صفر المقام: $x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$

$$\lim_{x \to -\sqrt[3]{2}^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -\sqrt[3]{2}^+} y = \infty$$

القسمة الطويلة: $\frac{x^4}{x^3 + 2} = x - \frac{2x}{x^3 + 2}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^3 + 2} = 0 \Rightarrow y = x$$

$x = -\sqrt[3]{2}, \quad y = x$

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | من إعداد المعلم

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$y = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$

الحل:

والبسط لا ينعدم عندهما: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x \to 1^-} y = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} y = \infty, \quad \lim_{x \to -1^-} y = \infty, \quad \lim_{x \to -1^+} y = -\infty$$

القسمة الطويلة: $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow y = x + 2$$

$x = -1, \quad x = 1, \quad y = x + 2$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 22

Previous MOE Exam Questions • Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits

ناتج التعلم: أوجد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات

إجابة س7 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • مقالي 1b | 2024-2025

النهاية عند اللانهاية | Limit at Infinity | خط تقارب أفقي | Horizontal Asymptote

يُعطى طول حيوان صغير بالمليمتر بعد t يوماً من ولادته بالدالة الآتية. أوجد طوله عند الولادة، ثم أوجد طوله النهائي على المدى البعيد:

$$h(t) = \frac{350}{2 + 8(0.8)^t}$$

الحل:

عند الولادة: $h(0) = \frac{350}{2+8(1)} = \frac{350}{10} = 35 \text{ mm}$

$0 < 0.8 < 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} (0.8)^t = 0$

الطول النهائي: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{350}{2+0} = 175 \text{ mm}$

إجابة س8 | المستوى: متقدم | 4 درجات | ★ وزاري • مقالي 1b | 2023-2024

النهاية عند اللانهاية | Limit at Infinity | المرافق | Conjugate

أوجد قيمة النهاية الآتية:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$$

الحل:

نضرب في المرافق: $\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)\cdot\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}+2x}$

نقسم البسط والمقام على أكبر قوة: $=\dfrac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{-2}{2+2}=-\frac{1}{2}$$

إجابة س9 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س5 • محوّل إلى مقالي | 2023-2024

خط تقارب رأسي | Vertical Asymptote | خط تقارب مائل | Slant Asymptote

حدّد جميع خطوط التقارب الرأسية والمائلة لمنحنى الدالة الآتية:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x-6}$$

الحل:

خطا تقارب رأسيان: $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0\ \Rightarrow\ x=-3,\ x=2$

القسمة الطويلة: $x^3=(x^2+x-6)(x-1)+(7x-6)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x-6}{x^2+x-6}=0$$

خط التقارب المائل: $y=x-1$

البند 23: تطبيق قاعدة الضرب على المشتقات

Apply the Product Rule on derivatives

الدرس 4-3: قاعدتا الضرب والقسمة • الكتاب ص 169 إنجليزي • العربي ص 171

أسئلة الكتاب: تمارين 17 إلى 20 • سؤال من إعداد المعلم + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 23 • Summary of Rules

قاعدة الضرب — Product Rule

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

قاعدة القسمة — Quotient Rule

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

معادلة المماس — Equation of the Tangent Line

$$y = f(a) + f'(a)\,(x - a), \qquad m = f'(a)$$

الميل هو قيمة المشتقة عند نقطة التماس

معدل تغير الإيراد — Rate of Change of Revenue

$$R = Q \cdot P \;\Rightarrow\; R' = Q'P + QP'$$

الإيراد هو حاصل ضرب الكمية المبيعة في سعر الوحدة

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 169 إنجليزي • العربي ص 171 • تمرين 17

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line | قاعدة الضرب | Product Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x) = (x^2 + 2x)(x^4 + x^2 + 1), \qquad x = 0$$

الحل:

نقطة التماس: $f(0) = (0)(1) = 0$

قاعدة الضرب: $f'(x) = (2x + 2)(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 + 2x)(4x^3 + 2x)$

الميل: $f'(0) = (2)(1) + (0)(0) = 2$

$y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | من إعداد المعلم

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line | قاعدة الضرب | Product Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - 3), \qquad x = 1$$

الحل:

نقطة التماس: $f(1) = (2)(-2) = -4$

قاعدة الضرب: $f'(x) = (1)(x^2 - 3) + (x + 1)(2x)$

الميل: $f'(1) = -2 + 4 = 2$

$y + 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 6$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 169 إنجليزي • العربي ص 171 • تمرين 18

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line | قاعدة الضرب | Product Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x) = (x^3 + x + 1)(3x^2 + 2x - 1), \qquad x = 1$$

الحل:

نقطة التماس: $f(1) = (3)(4) = 12$

قاعدة الضرب: $f'(x) = (3x^2 + 1)(3x^2 + 2x - 1) + (x^3 + x + 1)(6x + 2)$

الميل: $f'(1) = (4)(4) + (3)(8) = 40$

$y - 12 = 40(x - 1) \Rightarrow y = 40x - 28$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 169 إنجليزي • العربي ص 171 • تمرين 19

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line | قاعدة القسمة | Quotient Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}, \qquad x = 0$$

الحل:

نقطة التماس: $f(0) = \frac{1}{2}$

قاعدة القسمة: $f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (x+1)(1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$

الميل: $f'(0) = \frac{1}{4}$

$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 169 إنجليزي • العربي ص 171 • تمرين 20

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line | قاعدة القسمة | Quotient Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}, \qquad x=1$$

الحل:

نقطة التماس: $f(1)=\frac{4}{2}=2$

قاعدة القسمة: $f'(x)=\frac{(1)(x^2+1)-(x+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$

الميل: $f'(1)=\frac{2-8}{4}=-\frac{3}{2}$

$y-2=-\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 23

Previous MOE Exam Questions • Apply the Product Rule on derivatives

ناتج التعلم: تطبيق قاعدة الضرب على المشتقات

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | ★ وزاري • س12 | 2019-2020

الإيراد | Revenue | معدل التغير | Rate of Change | قاعدة الضرب | Product Rule

يبيع متجر قطعة سعرها الآن 2.4 درهم، ويزداد سعرها بمعدل 0.1 درهم في العام. ويبيع منها الآن 12000 قطعة في العام، وتتناقص مبيعاتها بمعدل 1500 قطعة في العام. الإيراد هو حاصل ضرب السعر في عدد القطع المبيعة. بأيّ معدل يتغير الإيراد الآن؟

الحل:

نرمز للسعر P ولعدد القطع Q: $R = P \cdot Q$

معدل التناقص سالب: $P = 2.4,\ P' = 0.1,\ Q = 12000,\ Q' = -1500$

قاعدة الضرب: $R' = P'Q + PQ'$

$R' = (0.1)(12000) + (2.4)(-1500) = 1200 - 3600$

$R' = -2400$ درهم في العام، أي أن الإيراد يتناقص

إجابة س7 | المستوى: متقدم | 4 درجات | ★ وزاري • س18 | 2017-2018

الإيراد | Revenue | معدل التغير | Rate of Change | قاعدة الضرب | Product Rule

تبيع شركة قطعة سعرها الآن 12 درهماً، وتبيع منها الآن 10000 قطعة في العام. تريد الشركة زيادة مبيعاتها بمعدل 1000 قطعة في العام، وزيادة إيرادها بمعدل 15000 درهم في العام. الإيراد هو حاصل ضرب السعر في عدد القطع المبيعة. بأيّ معدل يجب أن يزداد سعر القطعة؟

الحل:

نرمز للسعر P ولعدد القطع Q: $R = P \cdot Q$

المعطيات: $P = 12,\ Q = 10000,\ Q' = 1000,\ R' = 15000$

قاعدة الضرب: $R' = P'Q + PQ'$

نعوّض: $15000 = 10000\,P' + (12)(1000)$

$10000\,P' = 15000 - 12000 = 3000$

درهم في العام: $P' = 0.3$

إجابة س8 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س17 | 2016-2017

الإيراد | Revenue | معدل التغير | Rate of Change | قاعدة الضرب | Product Rule

سعر قطعة الآن 18 درهماً، ويزداد سعرها بمعدل 1.25 درهم في العام. ويُباع منها الآن 2000 قطعة في العام، وتزداد مبيعاتها بمعدل 200 قطعة في العام. الإيراد هو حاصل ضرب السعر في عدد القطع المبيعة. بأيّ معدل يزداد الإيراد الكلي الآن؟

الحل:

نرمز للسعر P ولعدد القطع Q: $R = P \cdot Q$

المعطيات: $P = 18,\ P' = 1.25,\ Q = 2000,\ Q' = 200$

قاعدة الضرب: $R' = P'Q + PQ'$

$R' = (1.25)(2000) + (18)(200) = 2500 + 3600$

درهم في العام: $R' = 6100$

البند 24: أوجد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل

Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules

الدرس 6-3: مشتقات الدوال المثلثية • الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186

أسئلة الكتاب: تمارين 3 إلى 8 + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 24 • Summary of Rules

مشتقتا الجيب وجيب التمام — Derivatives of sin and cos

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

صحيحتان لكل الأعداد الحقيقية

مشتقتا الظل وظل التمام — Derivatives of tan and cot

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

صحيحتان على مجال كل دالة

مشتقتا القاطع وقاطع التمام — Derivatives of sec and csc

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

صحيحتان على مجال كل دالة

قاعدة السلسلة — Chain Rule

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مشتقة الدالة الخارجية عند الداخلية مضروبة في مشتقة الداخلية

قاعدة الضرب — Product Rule

$$[f\,g]' = f'g + fg'$$

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 4

المشتقة | Derivative | قاعدة السلسلة | Chain Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(t) = t^2 + 2\cos^2 4t$$

الحل:

قاعدة السلسلة: $f'(t) = 2t + 2 \cdot 2\cos 4t \cdot (-\sin 4t) \cdot 4$

$f'(t) = 2t - 16 \sin 4t \cos 4t$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 6

المشتقة | Derivative | قاعدة الضرب | Product Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(x) = x^2 \sec 4x$$

الحل:

قاعدة الضرب: $f'(x) = 2x \sec 4x + x^2 (\sec 4x)'$

قاعدة السلسلة: $(\sec 4x)' = 4 \sec 4x \tan 4x$

$f'(x) = 2x \sec 4x + 4x^2 \sec 4x \tan 4x$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 3

المشتقة | Derivative | قاعدة السلسلة | Chain Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$$

الحل:

قاعدة السلسلة: $\left(\tan^3 2t\right)' = 3\tan^2 2t \cdot \sec^2 2t \cdot 2 = 6\tan^2 2t \sec^2 2t$

قاعدة السلسلة: $\left(\csc^4 3t\right)' = 4\csc^3 3t \cdot (-\csc 3t \cot 3t) \cdot 3 = -12\csc^4 3t \cot 3t$

مشتقة الفرق: $f'(t) = 6\tan^2 2t \sec^2 2t - \left(-12\csc^4 3t \cot 3t\right)$

$f'(t) = 6\tan^2 2t \sec^2 2t + 12\csc^4 3t \cot 3t$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 5

المشتقة | Derivative | قاعدة الضرب | Product Rule | قاعدة السلسلة | Chain Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(x) = x\cos 5x^2$$

الحل:

قاعدة الضرب: $f'(x) = (1)\cos 5x^2 + x\left(\cos 5x^2\right)'$

قاعدة السلسلة: $\left(\cos 5x^2\right)' = -\sin 5x^2 \cdot 10x$

$f'(x) = \cos 5x^2 - 10x^2 \sin 5x^2$

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 7 • وزاري | 2020-2021

المشتقة | Derivative | قاعدة القسمة | Quotient Rule | قاعدة السلسلة | Chain Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

الحل:

قاعدة القسمة: $f'(x) = \dfrac{(\sin x^2)' \cdot x^2 - \sin x^2 \cdot 2x}{x^4}$

قاعدة السلسلة: $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$

$$f'(x) = \frac{2x^3 \cos x^2 - 2x \sin x^2}{x^4}$$

نقسم البسط والمقام على المتغير: $f'(x) = \dfrac{2x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2}{x^3}$

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 184 إنجليزي • العربي ص 186 • تمرين 8

المشتقة | Derivative | قاعدة الضرب | Product Rule | قاعدة السلسلة | Chain Rule

أوجد مشتقة الدالة الآتية:

$$f(x) = \frac{x^2}{\csc^4 2x}$$

الحل:

نبسّط أولاً: $\dfrac{1}{\csc 2x} = \sin 2x \Rightarrow f(x) = x^2 \sin^4 2x$

الضرب والسلسلة: $f'(x) = 2x \sin^4 2x + x^2 \cdot 4 \sin^3 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$

$$f'(x) = 2x \sin^4 2x + 8x^2 \sin^3 2x \cos 2x$$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 24

Previous MOE Exam Questions • Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules

ناتج التعلم: أوجد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل

إجابة س7 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س17 | 2019-2020

معادلة المماس | Equation of the Tangent Line

قاعدة الضرب | Product Rule

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة الآتية عند القيمة المعطاة:

$$f(x) = x \sin x, \qquad x = \frac{\pi}{2}$$

الحل:

نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

قاعدة الضرب: $f'(x) = \sin x + x\cos x$

الميل: $m = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}(0) = 1$

$$y - \frac{\pi}{2} = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = x$$

إجابة س8 | المستوى: متقدم | 4 درجات | ★ وزاري • س14 | 2018-2019

السرعة المتجهة | Velocity | الدوال المثلثية | Trigonometric Functions

نابض معلّق في السقف يتذبذب رأسياً، وموقعه بعد t ثانية تعطيه الدالة الآتية. أوجد موقع النابض عندما تكون سرعته صفراً.

$$f(t) = 4\cos 2t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

الحل:

السرعة: $v(t) = f'(t) = -8\sin 2t$

السرعة صفر: $-8\sin 2t = 0 \Rightarrow \sin 2t = 0$

نحدد مدى الزاوية: $0 \le 2t \le 2\pi \Rightarrow 2t = 0,\ \pi,\ 2\pi$

$t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$

نعوض في دالة الموقع: $f(0) = 4,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4,\quad f(\pi) = 4$

الموقع عندما تنعدم السرعة: $f(t) = 4,\quad f(t) = -4$

البند 25: حل مسائل حياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions

الدرس 7-3: مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية • الكتاب ص 194 إنجليزي • العربي ص 196

أسئلة الكتاب: تمارين 35 إلى 38 • سؤال من إعداد المعلم + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 25 • Summary of Rules

معدل التغير المئوي اللحظي — Instantaneous Percentage Rate of Change

$$100 \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \ \%$$

مشتقة الدالة الأسية العامة — Derivative of a^x

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a, \qquad \frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot u', \qquad a > 0$$

مشتقة الدالة الأسية الطبيعية — Derivative of e^x

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\, u'$$

الدالة الأسية معرّفة وقابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية

صيغة النمو الأسي — Exponential Growth

$$P(t) = P_0\, b^{t/T}$$

الكمية تُضرب في العامل نفسه كل فترة زمنية ثابتة

نهاية الأسية — Limit of a Decaying Exponential

$$\lim_{t\to\infty} e^{-kt} = 0, \quad k > 0$$

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 194 إنجليزي • العربي ص 196 • تمرين 35

معدل التغير المئوي | Percentage Rate of Change | النمو الأسي | Exponential Growth

مجتمع بكتيري عدد خلاياه P بعد t يوماً، يبدأ بالعدد المعطى ويصبح ثلاثة أمثاله كل يوم. أوجد صيغة لعدد الخلايا، ثم أوجد معدل التغير المئوي اللحظي لعدد الخلايا.

$$P(0) = 200$$

الحل:

يُضرب العدد في 3 كل يوم: $P(t) = 200 \cdot 3^t$

مشتقة الدالة الأسية: $P'(t) = 200 \cdot 3^t \ln 3$

$$100 \cdot \frac{P'(t)}{P(t)} = 100 \cdot \frac{200 \cdot 3^t \ln 3}{200 \cdot 3^t} = 100 \ln 3$$

يومياً: $\approx 109.86\%$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | من إعداد المعلم

الدالة الأسية | Exponential Function | المشتقة | Derivative

تُعطى قيمة استثمار الأستاذ محمد طه بالدرهم بعد t سنة بالدالة الآتية. أوجد معدل تغير قيمة الاستثمار عند t = 10 مقرّباً إلى أقرب جزء من مئة.

$$v(t) = 2000e^{0.05t}$$

الحل:

قاعدة السلسلة: $v'(t) = 2000e^{0.05t} \cdot 0.05 = 100e^{0.05t}$

نعوّض: $v'(10) = 100e^{0.5}$

درهم في السنة: $v'(10) \approx 164.87$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 194 إنجليزي • العربي ص 196 • تمرين 36

معدل التغير المئوي | Percentage Rate of Change | النمو الأسي | Exponential Growth

مجتمع بكتيري عدد خلاياه P بعد t يوماً، يبدأ بالعدد المعطى ويتضاعف كل أربعة أيام. أوجد صيغة لعدد الخلايا، ثم أوجد معدل التغير المئوي اللحظي لعدد الخلايا.

$$P(0) = 500$$

الحل:

يتضاعف العدد كل أربعة أيام: $P(t) = 500 \cdot 2^{t/4}$

مشتقة الأسية مع السلسلة: $P'(t) = 500 \cdot 2^{t/4} \ln 2 \cdot \frac{1}{4}$

$$100 \cdot \frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{100 \ln 2}{4} = 25 \ln 2$$

يومياً: $\approx 17.33\%$

إجابة س4 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 194 إنجليزي • العربي ص 196 • تمرين 37 • وزاري | 2019-2020 | 2023-2024

المشتقة | Derivative | الدالة الأسية | Exponential Function | قاعدة القسمة | Quotient Rule

في تفاعل كيميائي ذاتي التحفيز، يُعطى تركيز مادة بعد t ثانية بالدالة الآتية. بيّن أن مشتقة الدالة موجبة دائماً، ثم استنتج أن التركيز لا يتجاوز 6 أبداً.

$$c(t) = \frac{6}{2e^{-8t} + 1}$$

الحل:

نكتب الدالة على صورة قوة: $c(t) = 6\left(2e^{-8t} + 1\right)^{-1}$

قاعدة السلسلة: $c'(t) = -6\left(2e^{-8t} + 1\right)^{-2} \cdot \left(-16e^{-8t}\right)$

$$c'(t) = \frac{96e^{-8t}}{\left(2e^{-8t} + 1\right)^2}$$

البسط والمقام موجبان فالتركيز يتزايد دائماً: $c'(t) > 0$

لأن الأسية تقترب من الصفر: $\lim_{t \to \infty} c(t) = \frac{6}{2(0) + 1} = 6$

التركيز يتزايد مقترباً من هذه القيمة دون أن يتجاوزها: $c(t) < 6$

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 194 إنجليزي • العربي ص 196 • تمرين 38

المشتقة | Derivative | الدالة الأسية | Exponential Function | قاعدة القسمة | Quotient Rule

في تفاعل كيميائي ذاتي التحفيز، يُعطى تركيز مادة بعد t ثانية بالدالة الآتية. بيّن أن مشتقة الدالة موجبة دائماً، ثم استنتج أن التركيز لا يتجاوز 5 أبداً.

$$c(t) = \frac{10}{9e^{-10t} + 2}$$

الحل:

نكتب الدالة على صورة قوة: $c(t) = 10\left(9e^{-10t} + 2\right)^{-1}$

قاعدة السلسلة: $c'(t) = -10\left(9e^{-10t} + 2\right)^{-2} \cdot \left(-90e^{-10t}\right)$

$$c'(t) = \frac{900e^{-10t}}{\left(9e^{-10t} + 2\right)^2}$$

البسط والمقام موجبان فالتركيز يتزايد دائماً: $c'(t) > 0$

لأن الأسية تقترب من الصفر: $\lim_{t\to\infty} c(t) = \frac{10}{9(0) + 2} = 5$

التركيز يتزايد مقتربا من هذه القيمة دون أن يتجاوزها: $c(t) < 5$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 25

Previous MOE Exam Questions • Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions

ناتج التعلم: حل مسائل حياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

إجابة س6 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س14 | 2021-2022

معدل التغير المئوي | Percentage Rate of Change

الدالة الأسية | Exponential Function

تُعطى قيمة استثمار بعد t سنة بالدالة الآتية. أوجد معدل التغير المئوي اللحظي لقيمة الاستثمار.

$$v(t) = 60e^{-0.2t}$$

الحل:

قاعدة السلسلة: $v'(t) = 60e^{-0.2t} \cdot (-0.2) = -12e^{-0.2t}$

قانون معدل التغير المئوي: $100 \cdot \frac{v'(t)}{v(t)} = 100 \cdot \frac{-12e^{-0.2t}}{60e^{-0.2t}}$

أي أن القيمة تتناقص: $= -20\%$

إجابة س7 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س18 | 2019-2020

معدل التغير المئوي | Percentage Rate of Change

النمو الأسي | Exponential Growth

استثمار تتضاعف قيمته كل عام، وتُعطى قيمته بالدرهم بعد t عاماً بالدالة الآتية. أوجد معدل التغير المئوي اللحظي لقيمة الاستثمار.

$$v(t) = 100(2)^t$$

الحل:

مشتقة الدالة الأسية: $v'(t) = 100(2)^t \ln 2$

$$100 \cdot \frac{v'(t)}{v(t)} = 100 \cdot \frac{100(2)^t \ln 2}{100(2)^t} = 100 \ln 2$$

سنوياً: $\approx 69.3\%$

البند 26: التعرّف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات

Understand the Mean Value Theorem and use it in applications

الدرس 10-3: نظرية القيمة المتوسطة • الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221

أسئلة الكتاب: تمارين 1 إلى 6 + الأسئلة الوزارية السابقة

ملخص قوانين البند 26 • Summary of Rules

نظرية القيمة المتوسطة — Mean Value Theorem

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad c \in (a, b)$$

بشرط أن تكون الدالة متصلة على الفترة المغلقة وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة

نظرية رول حالة خاصة — Rolle's Theorem as a Special Case

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0, \quad c \in (a, b)$$

عندما تتساوى قيمتا الدالة عند الطرفين

كثيرات الحدود — Polynomials

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

متصلة وقابلة للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية

التزايد والتناقص — Increasing and Decreasing

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(a) > f(b), \quad a < b$$

المشتقة السالبة تعني أن الدالة متناقصة والموجبة تعني أنها متزايدة

إجابة س1 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 1

نظرية رول | Rolle's Theorem | نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad [-2, 2]$$

الحل:

$f(x) = x^2 + 1$: كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق

$f(-2) = 5 = f(2)$: القيمتان متساويتان فنظرية رول تنطبق

$f'(c) = 2c = 0$: استنتاج نظرية رول

$c = 0 \in (-2, 2)$

إجابة س2 | المستوى: أساسي | درجتان | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 2

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad [0, 2]$$

الحل:

$f(x) = x^2 + 1$: كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق

$f(0) = 1 \neq f(2) = 5$: القيمتان مختلفتان فنظرية رول لا تنطبق

$f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{5 - 1}{2} = 2$: نظرية القيمة المتوسطة

$2c = 2 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2)$

إجابة س3 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 4

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = x^3 + x^2, \qquad [-1, 1]$$

الحل:

كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق: $f(x) = x^3 + x^2$

القيمتان مختلفتان فنظرية رول لا تنطبق: $f(-1) = 0 \neq f(1) = 2$

نظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \dfrac{2-0}{1-(-1)} = 1$

$3c^2 + 2c = 1 \Rightarrow (3c-1)(c+1) = 0$

نرفضها لأنها طرف الفترة وليست داخلها: $c = -1$

$c = \dfrac{1}{3} \in (-1, 1)$

إجابة س4 | المستوى: متوسط | 3 درجات | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 6

نظرية رول | Rolle's Theorem | نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = \sin x, \qquad [-\pi, 0]$$

الحل:

متصلة وقابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية: $f(x) = \sin x$

القيمتان متساويتان فنظرية رول تنطبق: $f(-\pi) = 0 = f(0)$

استنتاج نظرية رول: $f'(c) = \cos c = 0$

القيمة الوحيدة داخل الفترة: $c = -\dfrac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$

إجابة س5 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 3

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = x^3 + x^2, \qquad [0, 1]$$

الحل:

$f(x) = x^3 + x^2$ كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق:

$f(0) = 0 \neq f(1) = 2$ القيمتان مختلفتان فنظرية رول لا تنطبق:

$f'(c) = \frac{2-0}{1-0} = 2$ نظرية القيمة المتوسطة:

$3c^2 + 2c - 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ القانون العام:

$\frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1.22 \notin (0,1)$ نرفضها:

$c = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0.55 \in (0,1)$

إجابة س6 | المستوى: متقدم | 4 درجات | الكتاب ص 219 إنجليزي • العربي ص 221 • تمرين 5 • وزاري | 2024-2025

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل الاستنتاج المناسب صحيحاً:

$$f(x) = \sin x, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل:

$f(x) = \sin x$ متصلة وقابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية:

$f(0) = 0 \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ القيمتان مختلفتان فنظرية رول لا تنطبق:

$f'(c) = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}$ نظرية القيمة المتوسطة:

$\cos c = \frac{2}{\pi}$ لأن مشتقة الجيب هي جيب التمام:

$c = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.88 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

أسئلة الاختبارات الوزارية السابقة • البند 26

Previous MOE Exam Questions • Understand the Mean Value Theorem and use it in applications

ناتج التعلم: التعرّف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات

إجابة س7 | المستوى: أساسي | درجتان | ★ وزاري • س23 | 2022-2023

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem

أوجد قيمة c التي تحقق استنتاج نظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة:

$$f(x) = x^2 - 2x, \qquad [0, 2]$$

الحل:

كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق: $f(x) = x^2 - 2x$

$f(0) = 0, \qquad f(2) = 0$

نظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \dfrac{0-0}{2-0} = 0$

$2c - 2 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2)$

إجابة س8 | المستوى: أساسي | درجتان | ★ وزاري • س25 • س15 | 2021-2022 | 2019-2020

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem

أوجد قيمة c التي تحقق استنتاج نظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة:

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad [0, 2]$$

الحل:

كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق: $f(x) = x^2 + 2$

$f(0) = 2, \qquad f(2) = 6$

نظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \dfrac{6-2}{2-0} = 2$

$2c = 2 \Rightarrow c = 1 \in (0, 2)$

إجابة س9 | المستوى: أساسي | درجتان | ★ وزاري • س19 | 2017-2018

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem

أوجد قيمة c التي تحقق استنتاج نظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad [0, 1]$$

الحل:

كثيرة حدود فهي متصلة وقابلة للاشتقاق: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$f(0) = 1, \qquad f(1) = 4$

نظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \dfrac{4-1}{1-0} = 3$

$2c + 2 = 3 \Rightarrow c = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$

إجابة س10 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • مقالي 5 | 2023-2024

نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem | الفرضيات | Hypotheses

تحقّق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة للدالة الآتية على الفترة المعطاة، ثم أوجد قيمة c التي تجعل استنتاج النظرية صحيحاً:

$$f(x) = x^3 + x, \qquad [-1, 0]$$

الحل:

كثيرة حدود فهي متصلة على الفترة المغلقة وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة: $f(x) = x^3 + x$

$f(0) = 0, \qquad f(-1) = -1 - 1 = -2$

نظرية القيمة المتوسطة: $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{0 - (-2)}{1} = 2$

$3c^2 + 1 = 2 \Rightarrow c^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

نرفضها لأنها خارج الفترة: $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \notin (-1, 0)$

$c = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

إجابة س11 | المستوى: متوسط | 3 درجات | ★ وزاري • س15 | 2018-2019

دالة متناقصة | Decreasing Function | نظرية القيمة المتوسطة | Mean Value Theorem

بيّن أن الدالة الآتية متناقصة:

$$F(x) = 3 - x + e^{-x}$$

الحل:

نشتق الدالة: $F'(x) = -1 - e^{-x}$

الدالة الأسية موجبة دائماً: $e^{-x} > 0$

المشتقة سالبة لكل الأعداد الحقيقية: $F'(x) = -(1 + e^{-x}) < 0$

إذن الدالة متناقصة وهذا نتيجة لنظرية القيمة المتوسطة: $F'(x) < 0$