هيكل مراجعة متقدم





تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية	
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-11-08 12:29:49	
ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس	المزيد من مادة رياضيات:
إعداد: عبدالله السباعي	

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم					
صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول	
1	أسئلة وفق هيكل 2027
2	أسئلة وزارية سابقة مرتبة حسب الدروس - أكثر من 130 سؤال مع الإجابة
3	أسئلة وزارية سابقة مرتبة حسب الدروس - أكثر من 130 سؤال
4	أسئلة وفق الهيكل الوزاري 2027 لاختبار نهاية الفصل
5	نموذج لهيكل الامتحان الوزاري

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية	
تطبيق المناهج على Store App (آبل)	تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

MCQ 1-20

FRQ 21-26



الجزء الاختياري 1 -20

تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة

ملاحظة إرشادية: لإيجاد طول القوس L لمنحنى الدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$، نستخدم التكامل التالي:

قانون إضافى

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

تذكر: استخدم التقريب العددي (الآلة الحاسبة) إذا كان التكامل معقداً.

n=2 n=3 n=4

في التمارين **7** إلى **12**، قدّر طول المنحنى $y = f(x)$ في الفترة المحددة:

7. $f(x) = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/2$

8. $f(x) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi/2$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad 0 \le x \le 3$

10. $f(x) = 1/x, \quad 1 \le x \le 2$

11. $f(x) = x^2 + 1, \quad -2 \le x \le 2$

12. $f(x) = x^3 + 2, \quad -1 \le x \le 1$

مساحة الحل

abdalla elsebai 01150973940

abdalla elsebai

إيجاد قيمة نهاية دالة جبرياً (الدوال المتشعبة)

إعداد: عبدالله السباعي | Q2

ملاحظة إرشادية: للدوال المتشعبة، يجب فحص النهاية من اليمين $\lim_{x\to c^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

النتيجة: النهاية موجودة فقط إذا كانت النهايتان متساويتين.

تذكير هام: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

أوجد قيمة النهاية المشار إليها، إن وجدت:

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ 3x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ 3, & -1 < x < 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ 3, & -1 < x < 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$

مساحة الحل

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

استخدام نظرية الشطيرة لإيجاد النهايات

ملاحظة إرشادية (نظرية الشطيرة): إذا كان $f(x) \le g(x) \le h(x)$ وكانت $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$، فإن حتماً $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

مفتاح الحل: ابدأ دائماً بحصر الدوال المثلثية: $-1 \le \sin(\theta) \le 1$ و $-1 \le \cos(\theta) \le 1$.

29. أثبت أن $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$، مع توضيح أن $f(x) \le x^2 \sin(1/x) \le h(x)$.

30. لماذا لا نستطيع استخدام نظرية الشطيرة لإثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$ ؟ استكشف النهاية بيانياً.

31. استخدم النظرية لإثبات أن $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos^2(1/x) = 0$.

32. افترض أن $f(x)$ محدودة، بمعنى $|f(x)| \le M$ استخدم النظرية لإثبات أن $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

مساحة الحل

abdalla elsebai 971509739464

almanahj.com/ae 2026 2025 abdalla elsebai

إيجاد النهايات لكثيرات الحدود والدوال الكسرية والمثلثية

إعداد: عبدالله السباعي | Q4

خطوات إيجاد النهاية (ترتيب التفكير):

1. التعويض المباشر (إذا نتج عدد، انتهى الحل).
2. إذا نتج 0/0: حلّل (Factoring) ← اختصر ← عوّض.
3. للكسور التي تحوي جذوراً: اضرب في المرافق (Conjugate).
4. للدوال المثلثية: استخدم المتطابقات و$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

7. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$

8. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}$

12. $\lim_{x\to 0} x^2\csc^2 x$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

16. $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}$

abdalla elsebai 971503739404

almanahj.com/ae 2026 2025 abdalla elsebai

دراسة اتصال الدالة عند نقطة أو على فترة

إعداد: عبدالله السباعي | Q5

ملاحظة إرشادية (شروط الاتصال): الدالة متصلة إذا كان مجالها متصلاً. ابحث عن فجوات المجال:

- الجذور الزوجية: ما تحت الجذر ≥ 0.
- المقامات: المقام $\neq 0$.
- اللوغاريتم $\ln(x)$: ما داخل اللوغاريتم > 0.
- الدوال المثلثية العكسية (مثل $\sin^{-1} x$): محصورة بين $[-1, 1]$.

في التمارين 21-28، حدّد الفترات التي تكون عندها f متصلة:

22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$

26. $f(x) = \ln(\sin x)$

28. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

27. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$

مساحة الحل

abdalla elsebai 971509739494

abdalla elsebai

استخدام خصائص الاتصال (إزالة عدم الاتصال)

كيفية إزالة عدم الاتصال (سد الفجوة):

1. تأكد أن النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة رغم أن $f(c)$ غير معرفة (صفر على صفر).
2. بسّط الدالة واحسب قيمة النهاية L.
3. أعِد تعريف الدالة لتصبح: $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq c \\ L, & x=c \end{cases}$

تطبيق (مثال 4.2): لدينا الدالة $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}$.
الدالة غير معرفة عند $x=1$ (وجود فجوة).
المطلوب: أعد تعريف الدالة لتصبح متصلة عند $x=1$ عن طريق إيجاد قيمة a في الدالة:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1}, & x\neq 1 \\ a, & x=1 \end{cases}$$

مساحة الحل لإيجاد قيمة النهاية وتحديد a

abdalla elsebai 971506739404

abdalla elsebai

إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية (خطوط التقارب الأفقية)

قاعدة القوى للدوال الكسرية عند ∞ أو −∞:

- درجة البسط < درجة المقام: النهاية = 0.
- درجة البسط = درجة المقام: النهاية = معامل أكبر أُسُ في البسط / معامل أكبر أُسُ في المقام.
- درجة البسط > درجة المقام: النهاية = ∞ أو − ∞ (حسب إشارة المعاملات).

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$

13. $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$

14. $\lim_{x\to0^+} \ln(x\sin x)$

مساحة الحل

abdalla elsebai 971509739404

almanahj.com/ae
2026 2025
abdalla elsebai

إيجاد السرعة المتوسطة واللحظية عند نقطة معطاة

السرعة المتجهة المتوسطة (على فترة الزمن $[t_1, t_2]$): $V_{avg} = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

السرعة المتجهة اللحظية (عند لحظة معينة t): $v(t) = s'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

تمثل الدالة $s(t)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية.
للتمرينين 19-22: (a) أوجد السرعة المتوسطة بين $t = 0$ و $t = 2$. (b) بين $t = 1$ و $t = 2$ (c) قدر السرعة اللحظية عبر فترات مصغرة عبر فترات مصغرة (إلى $t = 1.9$ و 1.99). و (e) أوجد السرعة اللحظية الدقيقة عند $t = 2$ باستخدام المشتقة.

19. $s(t) = 16t^2 + 10$

20. $s(t) = 3t^3 + t$

21. $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$

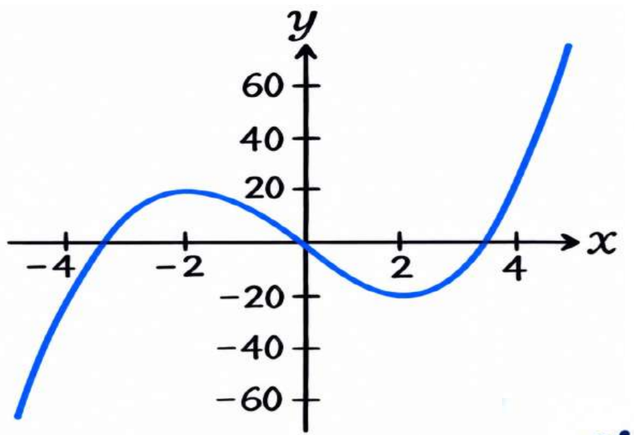
22. $s(t) = 3\sin(t - 2)$

مساحة الحل

abdalla elsebai 971509729402

abdalla elsebai

رسم منحنى دالة اعتماداً على منحنى مشتقتها



الشكل 3.14
$y = f(x)$

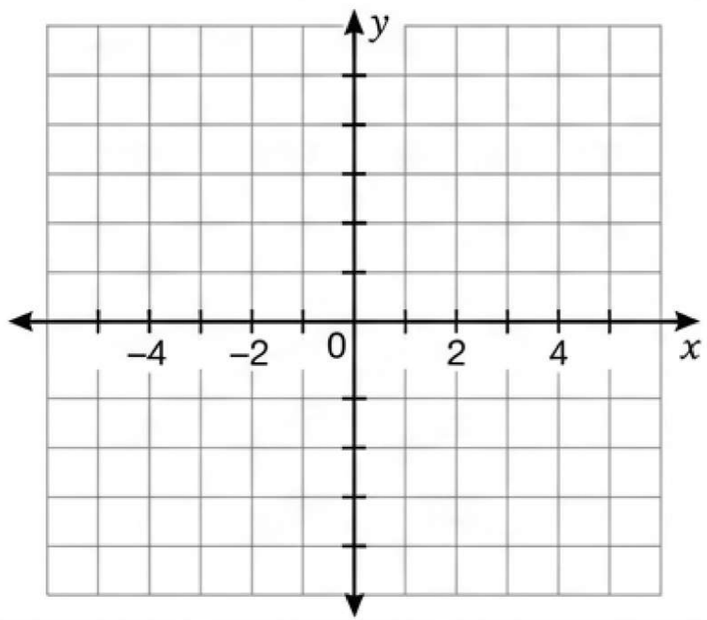
مفتاح قراءة المشتقة $f'(x)$:

- فوق محور x $(f'(x) > 0)$: الدالة الأصلية $f(x)$ تتزايد.
- تحت محور x $(f'(x) < 0)$: الدالة الأصلية $f(x)$ تتناقص.
- يقطع محور x $(f'(x) = 0)$: الدالة الأصلية $f(x)$ تمتلك نقطة حرجة (قيمة قصوى محلية أو صغرى).

من التمثيل البياني لـ f في الشكل 3.14، ارسم تمثيلاً بيانيًا معقولاً لـ f'.

abdalla elsebai 971509739404

مساحة الحل والرسم



abdalla elsebai

إيجاد المشتقة للدالة عند نقطة معينة (ومتى تكون غير قابلة للاشتقاق)

ملاحظة إرشادية (أسباب عدم قابلية الاشتقاق):
الدالة $f(x)$ لا تقبل الاشتقاق عند $x = a$ في الحالات التالية:
1. عدم اتصال (قفزة، فجوة، أو خط تقارب).
2. وجود "ركن حاد" (شائع في دوال القيمة المطلقة).
3. مماس رأسي.
القاعدة: المشتقة من اليمين يجب أن تساوي المشتقة من اليسار لكي توجد المشتقة.

29. مَثّل بيانياً وحدّد جميع قيم x التي عندها تكون f غير قابلة للاشتقاق:

(a) $f(x) = |x| + |x - 2|$ (b) $f(x) = |x^2 - 4x|$

30. مَثّل بيانياً وحدّد جميع قيم x التي عندها تكون g غير قابلة للاشتقاق:

(a) $g(x) = e^{-2/x}$ (b) $g(x) = e^{-2/(x^3-x)}$

مساحة الحل

abdalla elsebai 01150073404

amanahj.com/ae 2026 2025 abdalla elsebai

إرشادات وملاحظات سريعة (قاعدة القوة)

- لحساب المشتقة، تذكر القاعدة الأساسية: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.
- تذكر دائماً تحويل الجذور إلى أسس كسرية قبل الاشتقاق $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$، وتوزيع الحدود في حالة وجود ضرب أو قسمة بسيطة.

7. $h(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x}} - 2x + \pi$	8. $h(x) = 12x - x^2 - \frac{3}{\sqrt{x^2}}$
9. $f(s) = 2s^{3/2} - 3s^{-1/3}$	10. $f(t) = 3t^{\pi} - 2t^{1.3}$
11. $f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 1}{2x}$	12. $f(x) = \frac{4x^2 - x + 3}{\sqrt{x}}$
13. $f(x) = x(3x^2 - \sqrt{x})$	14. $f(x) = (x+1)(3x^2 - 4)$

abdalla elsebai 971599739404

abdalla elsebai

قاعدتي الضرب والقسمة

قاعدة الضرب: $(fg)' = f'g + fg'$ (مشتقة الأول × الثاني + الأول × مشتقة الثاني).

قاعدة القسمة: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (مشتقة البسط × المقام - البسط × مشتقة المقام)/(المقام)^2.

حيث	$f'(0)$	$f(1)$	$f'(0)$	$f'(1)$
f	-1	-2	-1	3
	$g(0)$	$g(1)$	$g'(0)$	$g'(1)$
g	3	1	-1	-2

أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = h(x)$ عند $x = a$

21. $h(x) = f(x)g(x)$; $(a)\ a = 0$; $(b)\ a = 1$

22. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $(a)\ a = 1$; $(b)\ a = 0$

23. $h(x) = x^2 f(x)$; $(a)\ a = 1$; $(b)\ a = 0$

24. $h(x) = \frac{x^2}{g(x)}$; $(a)\ a = 1$; $(b)\ a = 0$

abdalla elsebai 01509729404

abdalla elsebai

قاعدة السلسلة وخصائص التماثل

السلسلة: $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (مشتقة الدالة الخارجية بالنسبة للداخلية ضرب مشتقة الداخلية).
تذكر: **الدالة الزوجية** $f(-x) = f(x)$ ، **الدالة الفردية** $f(-x) = -f(x)$.

في التمرينين 31 و 32، استخدم المعلومات ذات الصلة لحساب المشتقة $h(x) = f(g(x))$.

31. $h'(1)$ حيث: $f'(2) = 3, f'(1) = 4, g(1) = 2, f(1) = 3, g'(1) = -2, g'(3) = 5$

32. $h'(2)$ حيث: $f'(3) = -3, f'(2) = -1, g(2) = 3, f(2) = 1, g'(1) = 2, g'(2) = 4$

3. الدالة f تكون دالة زوجية إذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل x وتكون دالة فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x.
إثبت أن مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية، وأن مشتقة الدالة الفردية هي دالة زوجية.

4. إذا كان التمثيل البياني للدالة القابلة للإشتقاق f متماثلاً حول المستقيم $x = a$. فماذا يمكنك القول عن تماثل التمثيل البياني لـ f'؟

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

التعامل مع تراكيب الدوال

عند اشتقاق دوال مثل $f(g(x))$، حدد الدالة الخارجية والدالة الداخلية بوضوح قبل البدء بالاشتقاق لتجنب الأخطاء.

في التمارين 35–38 أوجد المشتقة للدالة f.

35. (a) $f(x^2)$

(b) $[f(x)]^2$

(c) $f(f(x))$

36. (a) $f(\sqrt{x})$

(b) $\sqrt{f(x)}$

(c) $f(xf(x))$

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

إعداد: عبدالله السباعي | Q14: إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة

نظرية 5.2 (مشتقة الدالة العكسية). لإيجاد $(f^{-1})'(a)$، نستخدم القاعدة:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

الخطوات:

1. أوجد قيمة x التي تجعل $f(x) = a$. هذه القيمة هي $f^{-1}(a)$.
2. أوجد المشتقة $f'(x)$.
3. عوض في القانون.

abdalla elsebai 01500739404

في التمارين 17-17، f لها معكوس. استخدم النظرية 5.2 لإيجاد $(f^{-1})'(a)$.

17. $f(x) = x^3 + 4x - 1, a = -1$

18. $f(x) = x^5 + 4x - 2, a = -2$

19. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x, a = 5$

20. $f(x) = x^3 + 2x + 1, a = -2$

21. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}, a = 2$

22. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}, a = 3$

abdalla elsebai

إعداد: عبدالله السباعي | Q15: إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد التفاضل

مشتقات الدوال المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \mid \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \mid \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \mid u(x).$$ **تذكر تطبيق قاعدة السلسلة إذا كانت الزاوية دالة** $u(x)$

في التمارين 9-18، أوجد مشتقة كل دالة.

9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$

10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$

11. $f(w) = \dfrac{1}{\sin 4w}$

12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$

13. $f(x) = 2 \sin 2x \cos 2x$

14. $f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$

15. $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^3 + 1}\right)$

16. $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$

17. $f(x) = \sin^3\left(\cos\left(\sqrt{x^3 + 2x^2}\right)\right)$

18. $f(x) = \tan^4\left(\sin^2(x^3 + 2x)\right)$

abdalla elsebai 971509739401

abdalla elsebai

الدوال الأسية والمماس الأفقي

مشتقة الدالة الأسية: $\frac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

المماس الأفقي يعني أن ميل المماس يساوي صفراً. الخطوات: 1. أوجد المشتقة $f'(x)$ 2. ساوِ المشتقة بالصفر $f'(x) = 0$ 3. حُل المعادلة لإيجاد قيم x.

في التمرينين 29 و 30، أوجد كل قيم x التي يكون المماس لمنحنى $y = f(x)$ أفقياً.

29. (a) $f(x) = xe^{-2x}$

29. (b) $f(x) = xe^{-3x}$

30. (a) $f(x) = x^2e^{-2x}$

30. (b) $f(x) = x^2e^{-3x}$

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

استراتيجية قراءة الدالة

لتحديد القاعدة المناسبة، انظر إلى "العملية الخارجية" للدالة. إذا كانت الدالة عبارة عن كسر كامل فالقاعدة هي القسمة. إذا كانت دالة داخل دالة أخرى، فالقاعدة هي السلسلة. مشتقة $\ln(x)$ هي $\frac{1}{x}$.

في التمارين 20-24، أوجد مشتقة كل دالة.

20. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

20. (b) $g(t) = \dfrac{\ln\sqrt{t}}{t}$

21. (a) $h(x) = e^x \ln x$

21. (b) $f(x) = e^{\ln x}$

22. (a) $h(x) = 2^{e^x}$

22. (b) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

abdalla elsebai 971509739404

almanahj.com/ae
2026 2025
abdalla elsebai

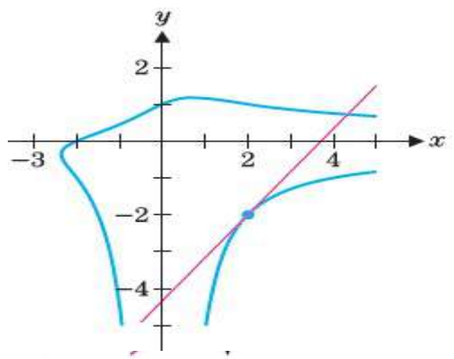
قواعد هامة

للاشتقاق الضمني، اشتق كل حد بالنسبة لـ x واضرب في y' عند اشتقاق أي حد يحتوي على y.

مشتقات عكسية: $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ ، $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

مثال 8.2: إيجاد مماس باستخدام الاشتقاق الضمني.

$$x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$$



الشكل 3.41 المماس عند النقطة $(2, -2)$

أعد حل المثال هنا بخطواتك الخاصة لضمان الفهم

في التمرينين 29 و 34، أوجد مشتقة كل دالة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$

29. (b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$

30. (b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

نظرية 10.1 (نظرية رول)

لتطبيق نظرية رول، يجب التحقق من 3 شروط:

- 1. الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$.
- 2. الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b).
- 3. $f(a) = f(b)$.

النتيجة: يوجد على الأقل عدد $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = 0$.

مثال 10.1: أوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ في الفترة $[0, 1]$.

الخطوة 1: تحقق من الاتصال وقابلية الاشتقاق.

الخطوة 2: تحقق من الشرط $f(0) = f(1)$.

الخطوة 2: تحقق من الشرط $f(0) = f(1)$.

الخطوة 3: أوجد $f'(x)$ وساوها بالصفر لإيجاد قيم c، ثم تأكد أنها تنتمي للفترة المفتوحة $(0, 1)$.

الخطوة 3: أوجد $f'(x)$ وساوها بالصفر لإيجاد قيم c، ثم تأكد أنها تنتمي للفترة المفتوحة $(0, 1)$.

abdalla elsebai 971509734404

abdalla elsebai

إرشادات هامة

شروط الاتصال للدالة f عند النقطة $x = c$ هي:

1. الدالة معرّفة عند النقطة: $f(c)$ موجودة.
2. النهاية موجودة: $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
3. النهاية تساوي قيمة الدالة: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

المثال 4.1 إيجاد مكان اتصال الدالة النسبية

حدّد أين تكون $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ متصلة.

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

إرشادات هامة

لإيجاد الثوابت المجهولة التي تجعل الدالة المتشعبة متصلة، يجب أن تتساوى النهاية من اليمين مع النهاية من اليسار عند نقطة التفرع: $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$.

30. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن نسبة الالتزام الضريبي تبلغ 12% على أول AED 20,000 من الأرباح الخاضعة للضريبة و 16% على الباقي. أوجد الثابتين a و b للدالة الضريبية:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ a + 0.12x & 0 < x \le 20{,}000 \\ b + 0.16(x - 20{,}000) & x > 20{,}000 \end{cases}$$

بحيث تكون $T(x)$ متصلة لجميع قيم x.

29. افترض أن القانون الضريبي في دولة ما ينص على أن الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة موضح بـ:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0.14x & 0 < x < 10{,}000 \\ c + 0.21x & 10{,}000 \le x \end{cases}$$

حدّد الثابت c الذي يجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم x. قدّم سبباً منطقياً لكون أن هذه الدالة يجب أن تكون متصلة.

abdalla elsebai 971509739401

abdalla elsebai

تذكر: الدوال كثيرات الحدود متصلة دائماً على مجالها $\mathbb{R}$. عند التعويض المباشر لحل النهايات، تأكد من تبسيط الدالة إذا نتجت حالة عدم تعيين.

31. في المثال 4.8، أوجد b و c لإكمال الجدول.

32. في المثال 4.8، وضِّح أن $T(x)$ متصلة عند $x = 6000$.

Workspace

abdalla elsebai 971509139404

amanahj.com/ae 2026 2025 abdalla elsebai

خطوط التقارب (Asymptotes):
- **الرأسي:** ابحث عن أصفار المقام بعد التبسيط.
- **الأفقي:** قارن درجة البسط والمقام (إذا تساويا = المعامل الرئيسي / المعامل الرئيسي).
- **المائل:** إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام بمقدار 1 بالضبط (استخدم القسمة المطولة).

في التمارين 29-32، حدّد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة.

29. $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

30. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

31. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 4}$

32. $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 2}$

abdalla elsebai 971599739004

abdalla elsebai

قاعدة الضرب: $\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث الميل $m = f'(a)$ و $y_1 = f(a)$.

في التمارين 17-20، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$.

17. $f(x) = (x^2 + 2x)(x^4 + x^2 + 1), a = 0$

18. $f(x) = (x^3 + x + 1)(3x^2 + 2x - 1), a = 1$

19. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}, a = 0$

20. $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}, a = 1$

abdalla elsebai 971509739404

almanahj.com/ae
abdalla elsebai

مشتقات الدوال المثلثية الأساسية:

$$(\sin x)' = \cos x \quad | \quad (\cos x)' = -\sin x \quad | \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad | \quad (\sec x)' = \sec x \tan x \quad | \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

لا تنسَ تطبيق قاعدة السلسلة (Chain Rule) إذا كانت الزاوية دالة غير x!

في التمارين 1-18، أوجد مشتقة كل دالة.

3. $f(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$

4. $f(t) = t^2 + 2\cos^2 4t$

5. $f(x) = x\cos 5x^2$

6. $f(x) = x^2 \sec 4x$

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

قاعدة القسمة (Quotient Rule):

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

7. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x^2}{\csc^4 2x}$

abdalla elsebai 971509733404

almanahj.com/ae
2026 2025
abdalla elsebai

- المعدل اللحظي للتغير: هو المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للزمن t.
- مشتقة الدالة الأسية: $\frac{d}{dt}(e^u) = e^u \cdot u'$
- مشتقة a^u: $\frac{d}{dt}(a^u) = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$

35. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاثة مرات كل يوم. أوجد قانوناً للتكاثر بعد t يوماً وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

36. يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد 500 ويتضاعف كل أربعة أيام. أوجد قانوناً للتكاثر بعد t يوماً وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير في التكاثر.

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai

لإثبات أن التركيز الكيميائي لا يتخطى قيمة معينة k، احسب نهاية الدالة عندما يؤول الزمن إلى المالانهاية: $\lim_{t\to\infty} c(t) \le k$.
للتأكيد على التزايد، أثبت أن المشتقة $c'(t) > 0$.

37. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{6}{2e^{-8t}+1}$.
بيّن أن $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 6 أبداً.

38. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{10}{9e^{-10t}+2}$.
بيّن أن $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 5.

abdalla elsebai 971509739404

almanahj.com/ae
abdalla elsebai

فرضيات النظريتين:

1) الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$.
2) الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b).

نظرية رول: إذا كان $f(a) = f(b)$، فإنه يوجد $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = 0$.

نظرية القيمة المتوسطة: يوجد $c \in (a, b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

في التمارين 1-6، تحقّق من فرضيات نظرية رول ونظرية القيمة المتوسطة، وجِدْ قيمة c الذي يجعل الاستنتاج الخاص بالنظريتين صحيحًا. اشرح الاستنتاج برسم تمثيل بياني.

1. $f(x) = x^2 + 1, [-2, 2]$

2. $f(x) = x^2 + 1, [0, 2]$

3. $f(x) = x^3 + x^2, [0, 1]$

abdalla elsebai 971509739404
abdalla elsebai

تلميح: عند التعامل مع الدوال المثلثية، تأكد من إيجاد جميع قيم c الممكنة التي تقع حصرياً داخل الفترة المفتوحة (a, b). استخدم الزوايا المرجعية إذا لزم الأمر.

(متابعة التمارين) تحقّق من الفرضيات وجِدْ قيمة c.

4. $f(x) = x^3 + x^2, [-1, 1]$

5. $f(x) = \sin x, [0, \pi/2]$

6. $f(x) = \sin x, [-\pi, 0]$

abdalla elsebai 971509739404

abdalla elsebai