

سلسلة الطارق في الرياضيات: الاشتقاق



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ⇨ المناهج الإماراتية ⇨ الصف الثاني عشر ⇨ رياضيات ⇨ الفصل الأول ⇨ ملفات متنوعة ⇨ الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-10-10 11:15:09

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل
منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

إعداد: طارق علي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر



صفحة المناهج
الإماراتية على
فيسبوك

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات في الفصل الأول

الميثاق الوطني للتعليم: دليل أولياء الأمور	1
مواصفات الاختبار العام إمسات EMSAT	2
الدوال المثلثية العكسية	3
المنفذ في الرياضيات (قوانين الدوال)	4
ملخص مراجعة الوحدة الاولى	5

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية

تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

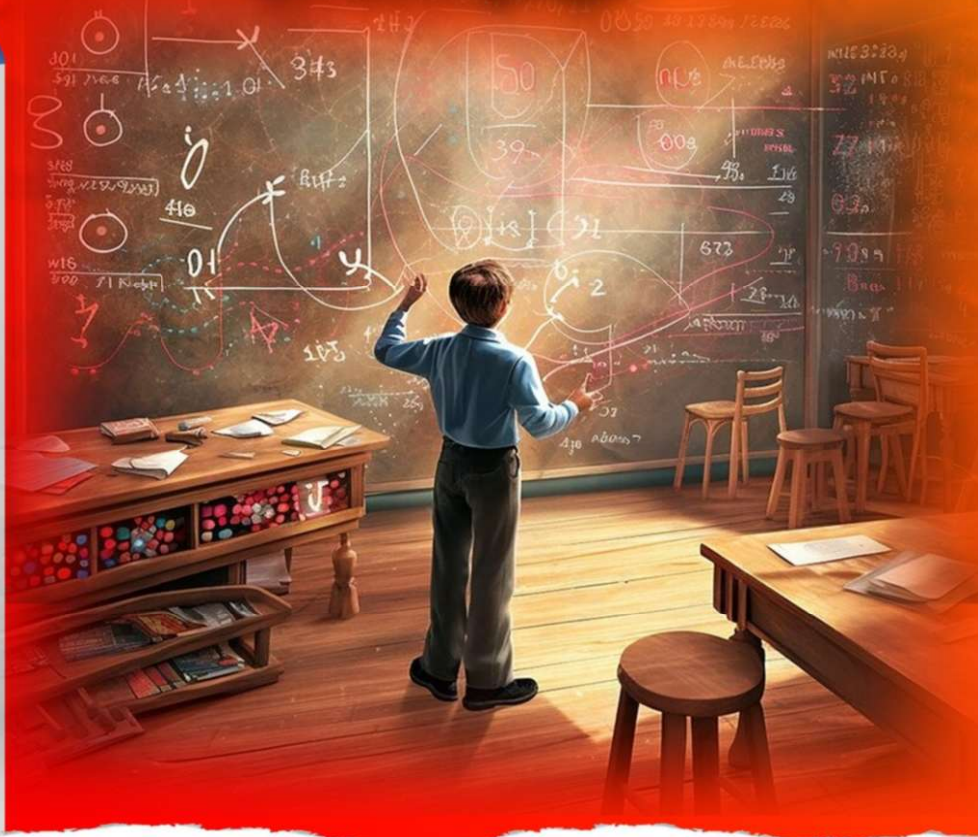
تطبيق المناهج على Store App (آبل)

الطارق

سلسلة

الرياضيات

3-2



منصة طارق أكاديمي للرياضيات

Tarek Academy

صف ثاني عشر (هــقـدـم)

الطارق

أستاذ الرياضيات



0562854282



037637703

12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

choose
shift $\rightarrow \frac{d}{dx} ()_x = \odot$ تعريف 2.1
مشتقة الدالة f عند النقطة $x = a$ تعرف كما يأتي :

The **derivative** of the function f at the point $x = a$ is defined as

$$\textcircled{1} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{slope}$$

بشرط وجود النهاية. وإذا كانت النهاية موجودة، فإننا نقول إن f قابلة للاشتقاق عند $x = a$.

Provided the limit exists. If the limit exists, we say that f is differentiable at $x = a$.

An alternative form of (2.1) is

صيغة أخرى من (2.1) هي

$$\textcircled{2} \quad f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{x \rightarrow \odot} \frac{f(x) - f(\odot)}{x - \odot}$$

(see exercise 38 in section 3.1).

(انظر التمرين 38 في الدرس 3-1).



? Example 2.1 Finding the Derivative at a Point إيجاد المشتقة عند نقطة

احسب مشتقة الدالة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند $x = 1$.

Compute the derivative of $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ at $x = 1$.

Solution

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}, \quad f(1) = 3(1)^3 + 2(1) - 1 = 4 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^3 + 2(1+h) - 1 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3[1 + 3(1)^2h + 3(1)h^2 + h^3] + 2 + 2h - 1 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} + 9h + 9h^2 + 3h^3 + \cancel{2} + 2h - \cancel{1} - 4}{h} \end{aligned}$$



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^3 + 9h^2 + 11h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h^2 + 9h + 11)}{h}$$

$$= 3(0)^2 + 9(0) + 11 = \boxed{11}$$

Example 2.2 Finding the Derivative at an Unspecified Point

إيجاد المشتقة عند نقطة غير محددة

أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند القيمة غير المحددة لـ x . ثم أوجد قيمة المشتقة عند

$\text{shift} \rightarrow \frac{d}{dx} (\quad) \quad x = 2$ $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 3$.

Finding the derivative of $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ at an unspecified value of x .

Then, evaluate the derivative at $x = 1$, $x = 2$ and $x = 3$.

Solution

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}, \quad f(2) = 3(2)^3 + 2(2) - 1 = 27$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3[(2+h)^3] + 2(2+h) - 1 - 27}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(8 + 3(2)^2h + 3(2)h^2 + h^3) + 4 + 2h - 28}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{24 + 36h + 18h^2 + h^3 + 2h - 24}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 18h^2 + 38h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 18h + 38)$$

$$= (0)^2 + 18(0) + 38 = \boxed{38}$$



تعريف 2.2

مشتقة الدالة f هي الدالة f' التي تعطي بالمعادلة

The derivative of the function f is the function f' given by

x not given

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

فيه x الغير معطاه

مجال f' هو مجموعة كل قيم x التي توجد لها هذه النهاية. تسمى عملية حساب الاشتقاق بالتفاضل. بالإضافة إلى ذلك، و f تكون قابلة للاشتقاق علي الفترة المفتوحة I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في I .

The domain of f' is the set of all x 's for which this limit exists. The process of computing a derivative is called differentiation. Further, f is differentiable on an open interval I if it is differentiable at every point in I .

? Example 2.3 Finding the Derivative of a Simple Rational Function

إيجاد مشتقة دالة نسبية بسيطة

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)، فأوجد $f'(x)$.

If $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), find $f'(x)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

✓ Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

? Example 2.4 The Derivative of the Square Root Function مشتقة دالة الجذر التربيعي

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ (حيث $x \geq 0$). فأوجد $f'(x)$ حيث $x \geq 0$. وحدد مجالها

If $f(x) = \sqrt{x}$ (for $x \geq 0$), Find $f'(x)$.

✓ Solution

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$



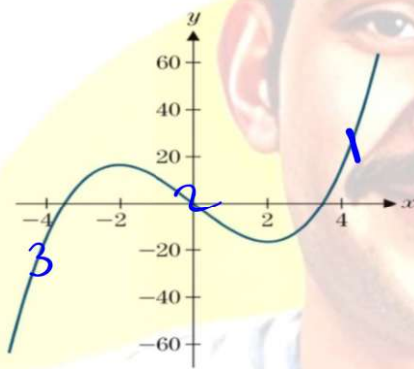
Example 2.5 Sketching the Graph of f' Given the Graph of f

رسم التمثيل البياني لـ f' من التمثيل البياني لـ f

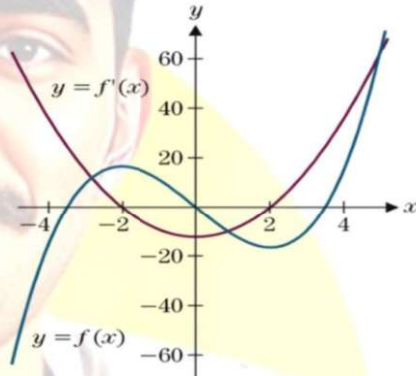
من التمثيل البياني لـ f في الشكل 3.14. ارسم تمثيلاً بيانياً معقولاً لـ f' .

Given the graph of f in figure 3.14, sketch a plausible graph of f' .

Solution



الشكل 3.14
 $y = f(x)$



الشكل 3.15
 $y = f'(x)$ و $y = f(x)$

$$F(x) \longrightarrow \bar{F}(x)$$

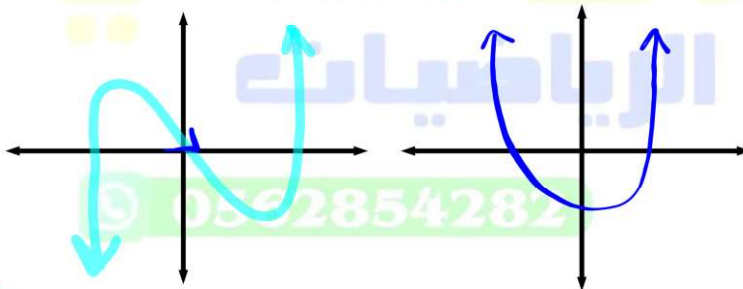
① نطرح 1 من عدد خطوط الرسم

Subtract 1 From number of lines

$$3 - 1 = 2$$

② نأخذ الاتجاهات بدءاً من اليسار

inverse direction start From left



Example 2.6 Sketching the Graph of f Given the Graph of f'

$$\bar{F}(x) \longrightarrow F(x)$$

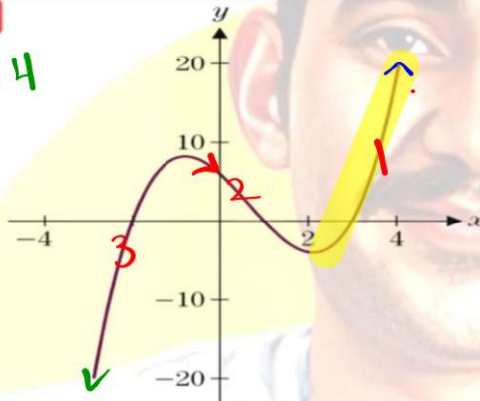
رسم التمثيل البياني لـ f من التمثيل البياني لـ f'

من التمثيل البياني لـ f' في الشكل 3.16. ارسم تمثيلاً بيانياً معقولاً لـ f .

Given the graph of f' in figure 3.16, sketch a plausible graph of f .

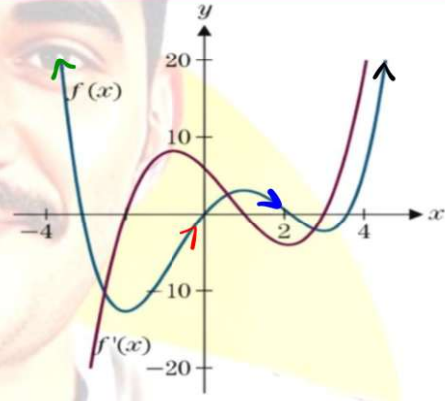
Solution

$$3+1=4$$



الشكل 3.16

$$y = f'(x)$$



الشكل 3.17

$$y = f'(x) \text{ والتمثيل البياني المعقول}$$

$$y = f(x)$$

$$\bar{F}(x) \longrightarrow F(x)$$

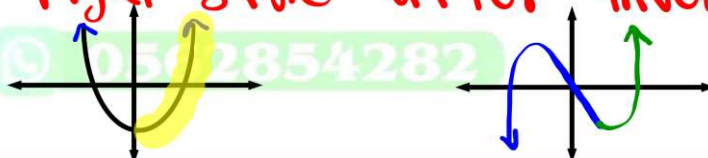
① ترتيب 1 على عدد خطوط f'

Add 1 to the number of lines

$$3+1 = \boxed{4}$$

② نكتب الأجزاء بدءاً من اليسار لكن نضع
الطرف الأيمن ما هو بعد عكس اتجاهه

inverse direction start from left put
put right side after inverse it



الرموز البديلة للمشتقة

Alternative Derivative Notations

$$* f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

النظرية 2.1

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ ، فإن f تكون متصلة عند $x = a$.

If f is differentiable at $x = a$, then f is continuous at $x = a$.

$$* \lim_{h \rightarrow 0^+} = \lim_{h \rightarrow 0^-}$$

? Example 2.7 Showing That a Function Is Not Differentiable at a Point

$$x < 2 \dots h \rightarrow 0^-$$

$$x \geq 2 \dots h \rightarrow 0^+$$

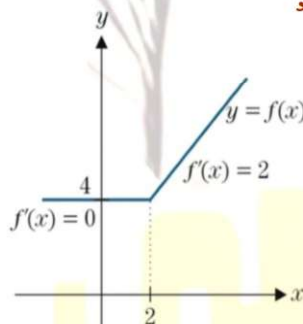
إثبات أن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند نقطة

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

$x = 2$ غير قابلة للاشتقاق

Show that $f(x) = \begin{cases} 4 & x < 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$ is not differentiable at $x = 2$.

✓ Solution



الشكل 3.18
رأس مُدَبَّب

$$* \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{4 - 4}{h} = \underline{0}$$

$$* \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(x+h) - 2x}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = \underline{2}$$

$\lim_{h \rightarrow 0^-} F(x) \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x)$ Not differentiable
غير قابلة للاشتقاق



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

توضح الأشكال 3.19a - 3.19d مجموعة متنوعة من الدوال التي لا يوجد $f'(a)$ لها. في كل حالة، ضع في

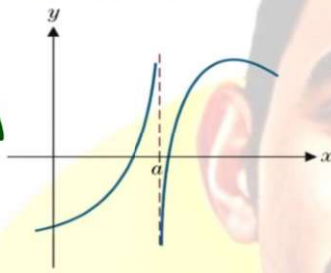
عقلك

F. prime

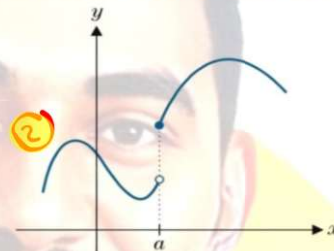
اعتبارك أن المشتقة غير موجودة.

Figure 3.19a – 3.19d show a variety of functions for which $f'(a)$ does not exist. In each case, convince yourself that the derivative does not exist.

1 vertical Asym



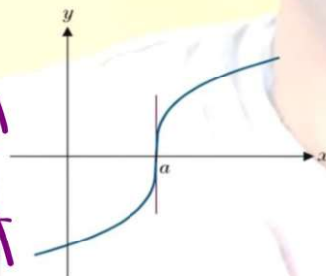
الشكل 3.19b
خط تقارب رأسي



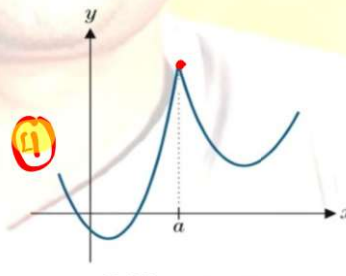
الشكل 3.19a
انفصال قفزي

Jump

3 vertical tangent



الشكل 3.19d
مماس رأسي



الشكل 3.19c
رأس مُدبب

* cusp
* corner

Example 2.8 Approximating a Derivative Numerically تقريب الاشتقاق عددياً

Slope = m_{Sec} تقدير ميل. قدر مشتقة $f(x) = x^2\sqrt{x^3 + 2}$ عند $x = 1$ عددياً.

Numerically estimate the derivative of $f(x) = x^2\sqrt{x^3 + 2}$ at $x = 1$.

✓ Solution $y = f(1) = 1^2\sqrt{1^3 + 2} = \sqrt{3} \rightarrow (1, \sqrt{3})$

* $y = f(0.99) = 1.069$
(0.99, 1.069)

* $y = f(1.01) = 1.7$
(1.01, 1.77)

$m = \frac{\sqrt{3} - 1.069}{1 - 0.99} = 4.2$

$m = \frac{\sqrt{3} - 1.77}{1 - 1.01} = 3.79$



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

$$* F(1)^- = 4.2 \approx 4$$

$$* F(1)^+ = 3.79 \approx 4$$

$$\Rightarrow \bar{F}(1) = 4$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 \sqrt{x^3+2}) \Big|_{x=1}$$

$$4.330127019$$

Example 2.9 Estimating Velocity Numerically تقدير السرعة المتجهة عددياً

افترض أن متسابقاً قطع المسافات التالية في الأوقات الزمنية المعطاة. قدر السرعة للمتسابق عند الثانية "6".

Suppose that a sprinter reaches the following distances in the given times.

Estimate the velocity of the sprinter at the 6 – second mark.

t(sec)	5.0	5.5	5.8	✓ 5.9	✓ 6.0	6.1	6.2	6.5	7.0
f(t) (ft)	123.7	141.01	151.41	154.90	158.40	161.92	165.42	175.85	193.1

Solution

$$* v_{avg} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$= \frac{158.40 - 154.90}{6 - 5.9} = \underline{135}$$

$$* v_{avg} \rightarrow (6, 158.40) (6.1, 161.92)$$

$$= \frac{161.92 - 158.40}{6.1 - 6} = \underline{135.2}$$

$$\underline{135.2}$$

الأكبر



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali



EXERCISES 3.2



في التمرينين 2 و 1، احسب $f'(a)$ باستخدام النهايتين (2.1) و (2.2).

In exercises 1 and 2, compute $f'(a)$ using the limits (2.1) and (2.2).

1

$$f(x) = 3x + 1, a = 1$$

Solution



2

$$f(x) = \sqrt{3x + 1}, a = 1$$

Solution



استاذ
طارق علي
في الرياضيات

0562854282



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

في التمرينين 3 و 4، احسب الدالة المشتقة f' باستخدام تعريف المشتقة (2.2).

In exercises 3 and 4, compute the derivative function f' using (2.1) or (2.2).

3

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

Solution

4

$$f(x) = \sqrt{3t+1}$$

Solution

استاذ طارق علي
في الرياضيات

0562854282

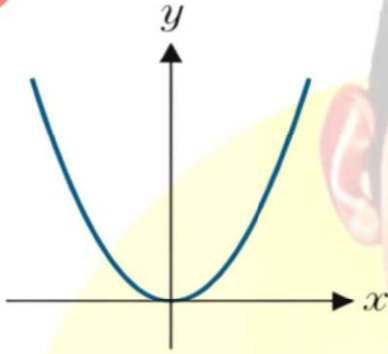


12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

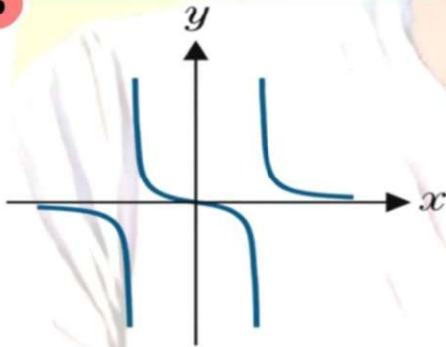
في التمارين 5 إلى 7، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f لرسم التمثيل البياني لمشتقة الدالة.

In exercises 5 – 7, use the graph of f to sketch a graph of f' .

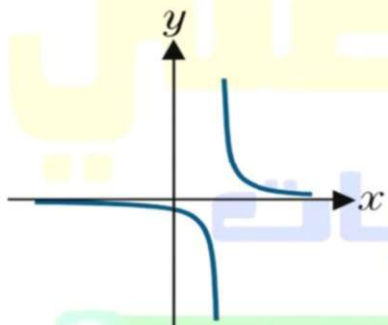
5



6



7

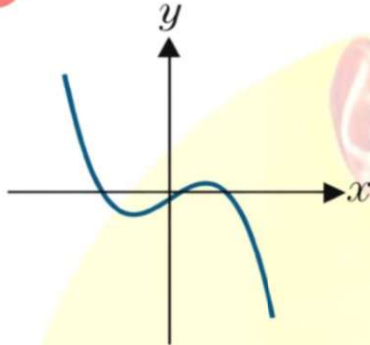


12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

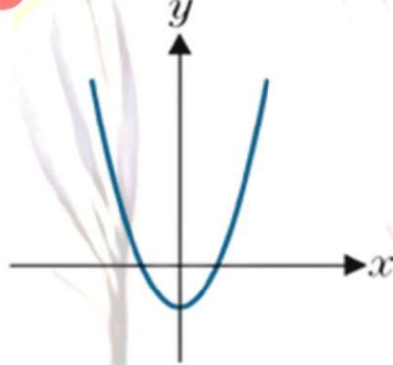
في التمرينين 8 و 9، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f' لرسم تمثيل بياني معقول لدالة متصلة f .

In exercises 8 and 9, use the given graph of f' to sketch a plausible graph of a continuous function f .

8



9



في التمرينين 10 و 11، احسب المشتقة في الطرف الأيمن $D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

والمشتقة في الطرف الأيسر $D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. هل $f'(0)$ موجودة؟

In exercises 10 and 11, compute the right – hand derivative

$D_+ f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ and the left – hand derivative

$D_- f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Does $f'(0)$ exist?

0562854282

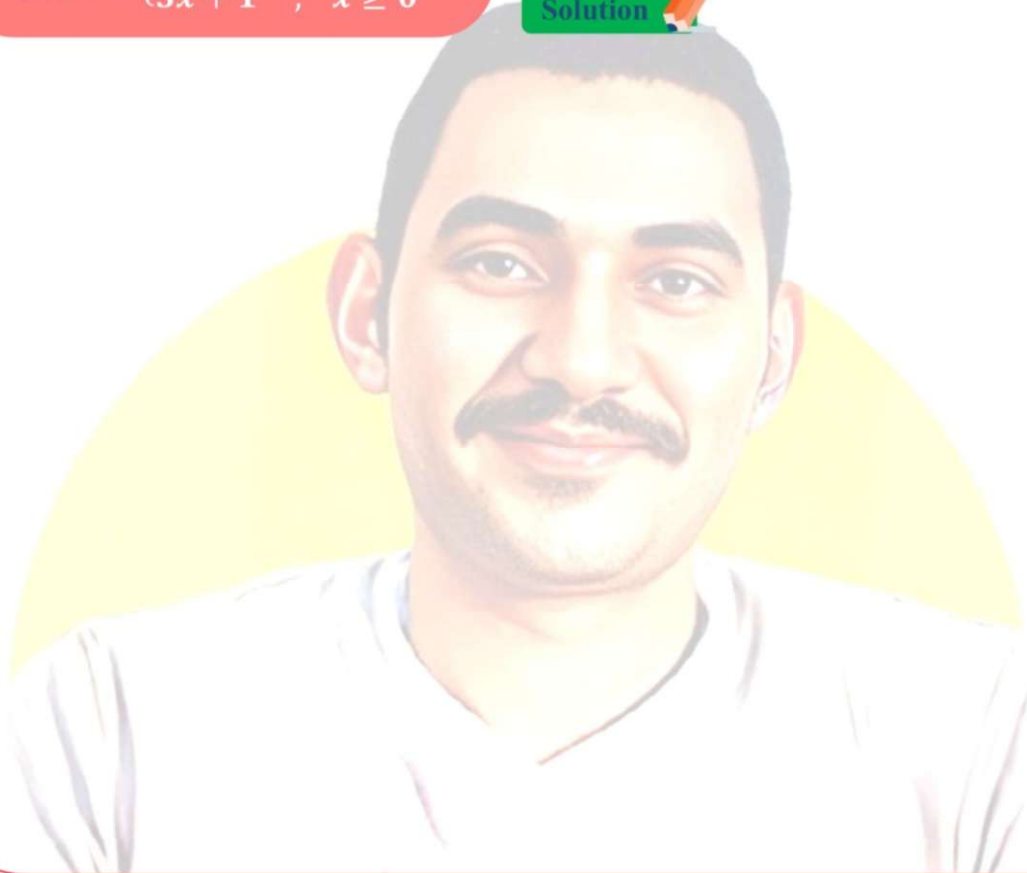


12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

10

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , x < 0 \\ 3x + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

Solution



11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ x^2 + 2x & , x \geq 0 \end{cases}$$

Solution



استاذ طارق علي
في الرياضيات

0562854282



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

في التمرينين 12 و 13، قدر قيمة المشتقة عددياً.

In exercises 12 and 13, numerically estimate the derivative.

12

$$f'(1) \text{ for } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solution

13

$$f'(2) \text{ for } f(x) = xe^{x^2}$$

Solution

استاذ
طارق علي
في الرياضيات

0562854282



12 الصف الثاني عشر (متقدم) 3-2 سلسلة الطارق في الرياضيات منصة طارق أكاديمي - Mr. Tarek Ali

في التمرين 14، استخدم المسافات $f(t)$ لتقدير السرعة المتجهة عند $t = 2$.

In exercises 14, use the distance $f(t)$ to estimate the velocity at $t = 2$.

14

t	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(t)$	3.1	3.9	4.8	5.8	6.8	7.7	8.5

Solution



استاذ
طارق علي
في الرياضيات

0562854282

15

حيث $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية a و b بحيث يكون $f'(0)$ موجوداً.

المطلوب - اخرج المنهج

For $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x < 0 \\ ax + b & , x \geq 0 \end{cases}$ find all real numbers a and b such that $f'(0)$ exists.

Solution

① Continuous $\Rightarrow$ متصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$0^2 + 2(0) = a(0) + b$$

$$\boxed{0 = b}$$

② Differentiable قابل اشتقاق

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0)^- = f(0)^+$$

$$2x + 2 = a + 0$$

$$2(0) + 2 = a$$

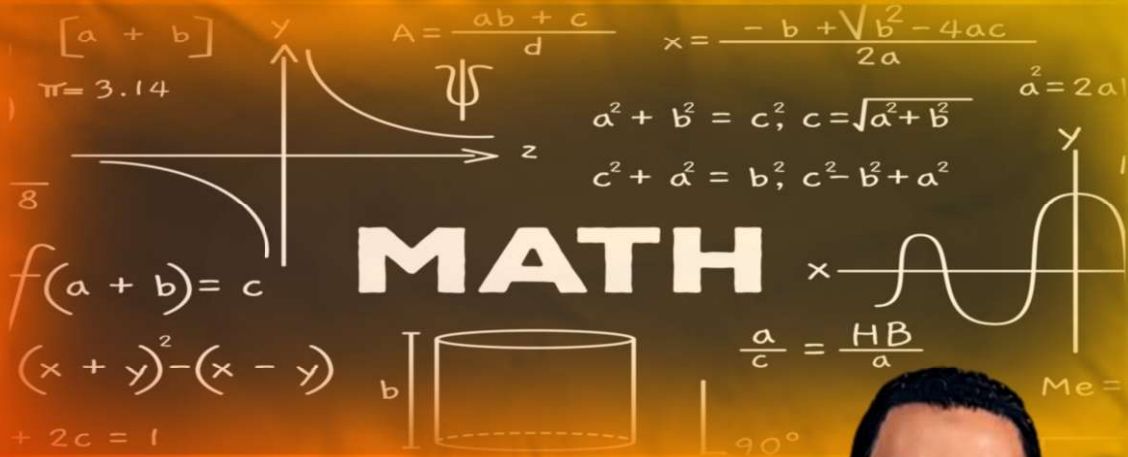
$$\boxed{a = 2}$$

منصة طارق أكاديمي للرياضيات

Tarek Academy

Tarek Academy

IN Math



خاص بالمنصة



خاص بجميع الجروبات و القنوات



استاذ / طارق علي