

هيكل مادة الرياضيات



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← ملفات متنوعة ← الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-06-10 16:16:04

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل
منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

إعداد: محمد عمر الخطيب

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



صفحة المناهج
الإماراتية على
فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في

هيكل مادة الرياضيات

1



هيكل



مادة



الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم
الفصل الدراسي الثالث

2026/2025

(الموقع الخاص لطلبة الثاني عشر المتقدم) <https://www.khateeb12AD/>

مع تمنياتي لكم بالتفوق والتميز

إعداد : محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب
الطلاب الأعزاء

للحصول على الدرجة الكاملة في الاختبار يجب دراسة الملزمة الاصلية والتركيز على
الهيكل وتكراره عدة مرات

محمد عمر الخطيب
نتمنى لكم التوفيق والنجاح

محمد عمر الخطيب
يكون الاختبار لهذا العام

محمد عمر الخطيب
2026/2025

محمد عمر الخطيب
من 30 سؤال

محمد عمر الخطيب
اختيار من متعدد

محمد عمر الخطيب
ملاحظات:

♦ درجات الأسئلة غير متساوية

♦♦ في الامتحان يكون ترتيب الأسئلة مختلف عن الملزمة

اوجد الدالة الاصلية (اوجد التكامل)

$$(11) \int (2 \sin x + \cos x) dx = -2 \cos x + \sin x + C$$

محمد عمر الخطيب

$$(12) \int (3 \cos x - \sin x) dx = 3 \sin x + \cos x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(13) \int 2 \sec x \tan x dx = 2 \sec x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(14) \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 4 \sin^{-1} x + C$$

محمد عمر الخطيب

$$*(15) \int 5 \sec^2 x dx = 5 \tan x + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(16) \int 4 \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = 4 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 4 \int \csc x \cot x dx$$

$$= -4 \csc x + C$$

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \csc x \cot x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(17) \int (3e^x - 2) dx = 3e^x - 2x + C.$$

$$(18) \int (4x - 2e^x) dx = 4 \frac{x^2}{2} - 2e^x + C$$

$$= 2x^2 - 2e^x + C.$$

$$(19) \int (3 \cos x - \frac{1}{x}) dx = 3 \sin x - \ln|x| + C.$$

$$(20) \int (2x^{-1} + \sin x) dx = \int \frac{2}{x} + \sin x \, dx$$

$$= 2 \ln|x| - \cos x + C$$

أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة

(35) $f'(x) = 3e^x + x, f(0) = 4$

$$f(x) = \int (3e^x + x) dx$$

$$= 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(0) = 4$$

$$3e^0 + 0 + C = 4$$

$$3 + C = 4$$

$$C = 1$$

$$\therefore f(x) = 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

(36) $f'(x) = 4\cos(x), f(0) = 3$

$$f(x) = \int 4\cos x dx$$

$$= 4\sin x + C$$

$$f(0) = 3$$

$$4\sin 0 + C = 3$$

$$C = 3$$

$$\therefore f(x) = 4\sin x + 3$$

(37) $f''(x) = 12x^2 + 2e^x, f'(0) = 2, f(0) = 3$

$$f'(x) = \int (12x^2 + 2e^x) dx$$

$$= 4x^3 + 2e^x + C_1$$

$$f'(0) = 2$$

$$0 + 2e^0 + C_1 = 2$$

$$2 + C_1 = 2$$

$$C_1 = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2e^x$$

$$f(x) = \int (4x^3 + 2e^x) dx$$

$$= x^4 + 2e^x + C_2$$

$$f(0) = 3$$

$$0 + 2 + C_2 = 3$$

$$C_2 = 1$$

$$\therefore f(x) = x^4 + 2e^x + 1$$

$$(38) f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, f'(0) = -3, f(0) = 2$$

$$f'(x) = \int 20x^3 + 2e^{2x} dx$$

$$= 5x^4 + \frac{2 \cdot e^{2x}}{2} + C_1$$

$$= 5x^4 + e^{2x} + C_1$$

$$f'(0) = -3$$

$$1 + C_1 = -3 \Rightarrow C_1 = -4$$

$$\therefore f'(x) = 5x^4 + e^{2x} - 4$$

$$f(x) = \int 5x^4 + e^{2x} - 4 dx$$

$$= x^5 + \frac{1}{2} e^{2x} - 4x + C_2$$

$$f(0) = 2$$

$$\frac{1}{2} + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 3/2$$

$$\therefore f(x) = x^5 + \frac{1}{2} e^{2x} - 4x + 3/2$$

$$(39) f''(t) = 2 + 2t, f(0) = 2, f(3) = 2$$

$$f'(t) = \int 2 + 2t dt$$

$$= 2t + t^2 + C_1$$

لا نستطيع تطبيق شروط الان

$$f(t) = \int 2t + t^2 + C_1 dt$$

$$= t^2 + \frac{1}{3} t^3 + C_1 t + C_2$$

$$f(0) = 2$$

$$C_2 = 2$$

$$f(3) = 2$$

$$3^2 + \frac{1}{3} (3)^3 + 3C_1 + 2 = 2$$

$$18 + 3C_1 + 2 = 2$$

$$3C_1 = -18 \Rightarrow C_1 = -6$$

$$\therefore f(t) = t^2 + \frac{1}{3} t^3 - 6t + 2$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + t^2 - 6t + 2$$

$$(40) f''(t) = 4 + 6t, f(1) = 3, f(-1) = -2$$

$$f'(t) = \int 4 + 6t dt$$

$$= 4t + 3t^2 + C_1$$

$$f(t) = \int 4t + 3t^2 + C_1 dt$$

$$= 2t^2 + t^3 + C_1 t + C_2$$

$$f(1) = 3$$

$$2 + 1 + C_1 + C_2 = 3$$

$$C_1 + C_2 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$f(-1) = -2$$

$$2(-1)^2 + (-1)^3 + C_1(-1) + C_2 = -2$$

$$2 - 1 - C_1 + C_2 = -2$$

$$-C_1 + C_2 = -3 \quad \text{--- ②}$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$-C_1 + C_2 = -3$$

$$2C_2 = -3 \Rightarrow C_2 = -3/2$$

$$C_1 = 3/2$$

$$\therefore f(x) = 2t^2 + t^3 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$$

$$= t^3 + 2t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$$

استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع في كل مما يلي

$$(9) \sum_{i=1}^{70} (3i - 1) = 3 \sum_{i=1}^{70} i - \sum_{i=1}^{70} 1$$

$$= 3 \frac{(70)(71)}{2} - 70(1) = 7385$$

يمكن إيجاد الناتج
من الآلة حاسبة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(10) \sum_{i=1}^{45} (3i - 4) = 3 \sum_{i=1}^{45} i - \sum_{i=1}^{45} 4 = 3 \frac{(45)(46)}{2} - 4(45)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب = 2925

محمد عمر الخطيب

$$(11) \sum_{i=1}^{40} (4 - i^2) = \sum_{i=1}^{40} 4 - \sum_{i=1}^{40} i^2$$

$$= 4(40) - \frac{40(41)(81)}{6} = -21980$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(12) \sum_{i=1}^{50} (8 - i) = \sum_{i=1}^{50} 8 - \sum_{i=1}^{50} i$$

$$= 8(50) - \frac{50(51)}{2} = -875$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ فإن التكامل المحدود للدالة f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

حيث $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ هي نقاط القيم

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : إذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإن الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

أسئلة مقترحة لهذا السؤال

(1) ان التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ باستخدام مجموع ريمان هو

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$

(c) $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$

(2) مجموع ريمان الذي يعبر عن التكامل $\int_0^5 (2x - 1) dx$ هو

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{10}{n} i - 1 \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{10}{n} i - 1 \right)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} (i - 1)$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1)$

$$\Delta x = \frac{5}{n}$$

$$c_i = \frac{5}{n} i$$

$$f(c_i) = 2c_i - 1$$

$$2\left(\frac{5}{n} i\right) - 1$$

$$= \frac{10}{n} i - 1$$

(3) التكامل المحدود الذي يعبر عن نهاية مجموع ريمان $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin c_i^2 \Delta x$ على الفترة $[0, 2]$ هو

(a) $\int_0^2 \sin^2 x \, dx$

محمد عمر الخطيب

(b) $\int_0^2 \sin x \, dx$

محمد عمر الخطيب

(c) $\int_0^2 x \sin x^2 \, dx$

(d) $\int_0^2 \sin x^2 \, dx$

محمد عمر الخطيب

(4) إذا كانت $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[0, 2]$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$ يساوي

(a) 4

(b) 8

(c) 12

(d) 2

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\int_0^2 3x^2 \, dx = x^3 \Big|_0^2 = 8$$

محمد عمر الخطيب

(5) إذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[0, 2]$ هو $2 + \frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2} = 2 + \frac{3(2)}{6} = 3$ يساوي $\int_0^2 f(x) \, dx$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(a) 2

(b) 3

(c) 6

(d) 2.5

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{\frac{2i}{n}} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{x_i} \Delta x$

(a) $e^2 - 1$

(b) $e^2 + 1$

(c) $e^{-2} - 1$

(d) $e^{-2} + 1$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$b-a=2$$

$$\Rightarrow a=0, b=2$$

$$x_i = \frac{2}{n}i$$

$$= \int_0^2 e^x \, dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - 1$$

محمد عمر الخطيب

فاوجد

$$\int_1^3 g(x) dx = -2 \text{ و } \int_1^3 f(x) dx = 3$$

الحل بالتفصيل

$$(37a) \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx$$

خاصية توزيع

محمد عمر الخطيب

$$= 3 + (-2) = 1$$

محمد عمر الخطيب

$$(37b) \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = \int_1^3 2f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 2(3) - (-2) = 8$$

$$(38a) \int_1^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 3 - (-2) = 5$$

محمد عمر الخطيب

$$(38b) \int_1^3 [4g(x) - 3f(x)] dx = \int_1^3 4g(x) dx - \int_1^3 3f(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 4 \int_1^3 g(x) dx - 3 \int_1^3 f(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 4(-2) - 3(3) = -17$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(49) \int_0^2 3x \, dx = \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^2 = 6$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(50) \int_1^4 2x \, dx = \left[x^2 \right]_1^4 = 15$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

☆ انتبه كدود لتعامل

$$(51) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\text{مساحة إلهة إله نصف دائرة} \right] \frac{1}{4}$$

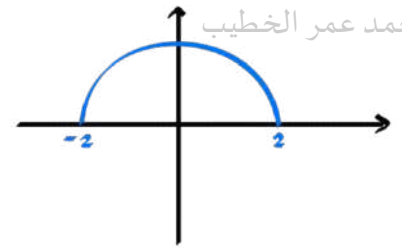
$$= \frac{1}{4} [\pi (2)^2]$$

$$= \pi$$

محمد عمر الخطيب



هذه المساحة هي مساحة النصف العلوي لدائرة مركزها (0,0) ونصف قطرها 2



محمد عمر الخطيب

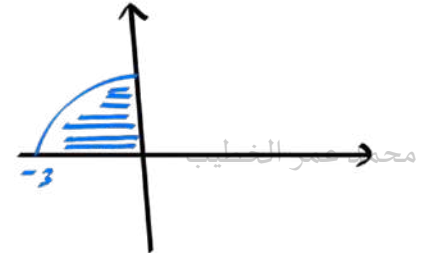
$$(52) \int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} \, dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{1}{4} [\pi (3)^2]$$

$$= \frac{9\pi}{4}$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(33) اوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$$\int_0^2 3x^2 dx (= 8)$$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x^2$ على الفترة $[0, 2]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$\begin{aligned} f_{ave} &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} (8) \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = + \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2) \checkmark$$

$$c = - \sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0, 2) \times$$

(34) اوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx (= \frac{2}{3})$$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - 2x$ على الفترة $[-1, 1]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

$$f_{ave} = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx$$

$$f(c) = f_{ave}$$

$$c^2 - 2c = \frac{1}{2}$$

$$3c^2 - 6c - 1 = 0$$

$$c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = 2.15 \notin (-1, 1) \times$$

$$c = \frac{3-2\sqrt{3}}{3} = -0.15 \in (-1, 1) \checkmark$$

اوجد التكاملات التالية

مكن ان يكون
محمد عمر الخطيب

$$(1) \int_0^2 (2x-3) dx = x^2 - 3x \Big|_0^2 = -2$$

$$(2) \int_0^3 (x^2 - 2) dx = \frac{x^3}{3} - 2x \Big|_0^3 = 3$$

$$(3) \int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx = \frac{x^4}{4} + x^2 \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$(4) \int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - x \Big|_0^2 = 8$$

$$(5) \int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^4 x^{3/2} + \frac{3}{x} dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{5/2} + 3 \ln|x| \Big|_1^4$$

$$= \frac{62}{5} + 3 \ln 4$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int_1^2 \left(4x - \frac{2}{x^2}\right) dx &= \int_1^2 4x - 2x^{-2} dx \\
 &= \left[2x^2 + 2x^{-1}\right]_1^2 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int_0^1 (6e^{-3x} + 4) dx &= \left[\frac{6e^{-3x}}{-3} + 4x\right]_0^1 \\
 &= \frac{-2}{e^3} + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_0^2 \left(\frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\right) dx &= \int_0^2 \frac{e^x}{e^{3x}} - \frac{2e^x}{e^{3x}} dx \\
 &= \int_0^2 e^{-x} - 2e^{-x} dx \\
 &= \left[-e^{-x} - 2x\right]_0^2 \\
 &= \frac{-1}{e^2} - 3
 \end{aligned}$$

اوجد التكاملات التالية

$$(13) \int_0^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \sin^{-1} x \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(14) \int_{-1}^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \tan^{-1} x \Big|_{-1}^1 = 2\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد $f'(x)$ لكل دالة من الدوال التالية

(25) $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(26) $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4) dt$

$$f'(x) = x^2 - 3x - 4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(27) $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1) dt$

$$f'(x) = (e^{-(x^2)^2} + 1) \cdot 2x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(28) $f(x) = \int_x^2 \sec t dt = - \int_2^x \sec t dt$

$$f'(x) = - \sec x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(39) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x=0$ حيث $y = \int_0^x \sin \sqrt{t^2 + \pi^2} dt$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y_1 = \int_0^0 \sin \sqrt{t^2 + \pi^2} dt = 0$$

$$y' = \sin \sqrt{x^2 + \pi^2}$$

محمد عمر الخطيب

$$m = y'(0) = \sin \sqrt{\pi^2} \\ = \sin \pi \\ = 0$$

محمد عمر الخطيب

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \therefore \text{صادلة مماس}$$

محمد عمر الخطيب

$$y - 0 = 0(x - 0)$$

$$y = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(40) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x=-1$ حيث $y = \int_{-1}^x \ln(t^2 + 2t + 2) dt$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y_1 = \int_{-1}^{-1} \ln(t^2 + 2t + 2) dt = 0$$

$$y' = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$m = y'(-1) = \ln 1 = 0$$

$$m = 0 \text{ عند } (-1, 0)$$

$$y - 0 = 0(x - (-1)) \quad \therefore \text{صادلة مماس}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(41) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x = 2$ حيث $y = \int_2^x \cos(\pi t^3) dt$

$$y_1 = \int_2^2 \cos(\pi t^3) dt = 0$$

$$y' = \cos(\pi t^3)$$

$$m = y'(2) = \cos(8\pi) = 1.$$

$$y - 0 = 1(x - 2)$$

$$y = x - 2.$$

نقطة

نقطة

$x_1 = 2$

$y_1 = ?$

$(2, 0)$

م

$m = 1$

(42) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x = 0$ حيث $y = \int_0^x e^{-t^2+1} dt$

$$y_1 = \int_0^0 e^{-t^2+1} dt = 0$$

$$y' = e^{-x^2+1}$$

$$m = y'(0) = e^1 = e.$$

$$y - 0 = e(x - 0)$$

$$y = ex$$

نقطة

نقطة

$x_1 = 0.$

$y_1 = ?$

$(0, 0)$

م

$m = ?$

$m = e.$

اوجد التكاملات التالية

$$(5) \int x^3 \sqrt{x^4 + 3} dx$$

$$= \int x^3 u^{1/2} \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4} \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{6} (x^4 + 3)^{3/2} + C.$$

محمد عمر الخطيب

$$u = x^4 + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 4x^3.$$

$$\frac{du}{4x^3} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(6) \int \sqrt{1+10x} dx = \int (1+10x)^{1/2} dx$$

$$= \frac{(1+10x)^{3/2}}{\frac{3}{2}(10)} + C$$

$$= \frac{1}{15} (1+10x)^{3/2} + C.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

يمكنك حل بالاعرف

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(7) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\sqrt{u}} \frac{du}{-\sin x}$$

$$= - \int u^{-1/2} du$$

$$= - 2u^{1/2} + C = - 2\sqrt{\cos x} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$u = \cos x.$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x.$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(8) \int \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$= \int u^3 \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{du}{\cos x} = \sin x$$

$$(9) \int t^2 \cos t^3 \, dt$$

$$= \int t^2 \cdot \cos u \cdot \frac{du}{3t^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \sin t^3 + C.$$

$$u = t^3.$$

$$\frac{du}{dt} = 3t^2$$

$$\frac{du}{3t^2} = dt$$

$$(10) \int \sin t (\cos t + 3)^{3/4} \, dt$$

$$= \int \sin t \cdot u^{3/4} \cdot \frac{du}{-\sin t}$$

$$= - \int u^{3/4} \, du$$

$$= - \frac{4}{7} u^{7/4} + C = - \frac{4}{7} (\cos t + 3)^{7/4} + C.$$

$$u = \cos t + 3.$$

$$\frac{du}{dt} = -\sin t.$$

$$\frac{du}{-\sin t} = dt.$$

$$(11) \int x e^{x^2+1} \, dx$$

$$= \int x e^u \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u \, du$$

$$= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C.$$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x.$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

* يمكن حل السؤال بدون تعويض.

$$(12) \int e^x \sqrt{e^x + 4} dx$$

$$u = e^x + 4$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

محمد عمر الخطيب

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int e^x u^{1/2} \frac{du}{e^x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{2}{3} (e^x + 4)^{3/2} + C$$

محمد عمر الخطيب

$$(13) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$u = \sqrt{x}$$

محمد عمر الخطيب

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} du = dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x} du$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2 \int e^u du$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2e^u + C$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2e^{\sqrt{x}} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(14) \int \frac{\cos(1/x)}{x^2} dx$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$-x^2 du = dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{\cos u}{x^2} \cdot -x^2 du$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= - \int \cos u du$$

$$= - \sin u + C$$

محمد عمر الخطيب

$$= - \sin \frac{1}{x} + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

$$(24.a) \int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{1+u^2} \cdot \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{3} \tan^{-1} x^3 + c$$

محمد عمر الخطيب

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{3x^2} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(24.b) \int \frac{x^5}{1+x^6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5}{1+x^6} dx = \frac{1}{6} \ln|1+x^6| + c$$

$$= \int \frac{x^5}{u} \cdot \frac{du}{6x^5}$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{6} \ln|u| + c = \frac{1}{6} \ln|1+x^6| + c$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$u = 1+x^6$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^5$$

$$\frac{du}{6x^5} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(26.a) \int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

$$= \int \frac{3x^{1/2}}{1+(x^{3/2})^2}$$

$$= \int \frac{3x^{1/2}}{1+u^2} \cdot \frac{2 du}{3x^{1/2}}$$

$$= 2 \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= 2 \tan^{-1} u + C$$

$$= 2 \tan^{-1} x^{3/2} + C$$

$$u = x^{3/2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$\frac{2 du}{3 x^{1/2}} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(26.b) \int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5} dx = \int \frac{x^{3/2}}{1+x^5} dx = \int \frac{x^{3/2}}{1+(x^{5/2})^2} dx$$

$$= \int \frac{x^{3/2}}{1+u^2} \cdot \frac{2 du}{5 x^{3/2}}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$u = x^{5/2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{5}{2} x^{3/2}$$

$$\frac{2 du}{5 x^{3/2}} = dx$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \frac{2}{5} \tan^{-1} u + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{2}{5} \tan^{-1} x^{5/2} + C$$

$$(35) \int_0^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int_0^2 \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{e^x}{1+u^2} \frac{du}{e^x}$$

$$\frac{du}{e^x} = dx$$

$$= \int_1^{e^2} \frac{1}{1+u^2} du$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=2 \Rightarrow u=e^2$$

$$= \tan^{-1} u \Big|_1^{e^2} = \tan^{-1} e^2 - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1} e^2 - \frac{\pi}{4}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظة : ممكن في بعض الاسئلة تكون الدوال لها تمثيل بياني وغير ذلك يفضل رسم تقريبي للدوال

(5) ارسم و اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ ، $y = 7 - x^2$

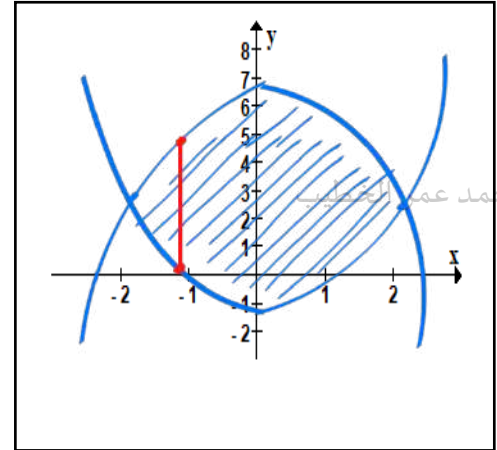
$$A = \int_{-2}^2 7 - x^2 - (x^2 - 1) dx$$

$$= \int_{-2}^2 7 - x^2 - x^2 + 1 dx$$

$$= \int_{-2}^2 8 - 2x^2 dx$$

$$= \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{64}{3}$$



$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 7 - x^2 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

حل السؤال السابق بدون رسم الدوال

نجد نقاط التقاطع من الآلة الحاسبة

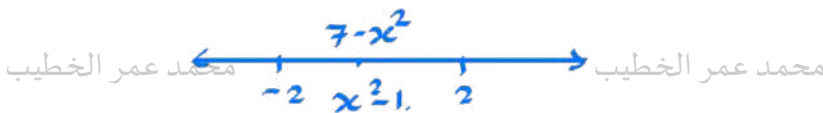
$$x^2 - 1 = 7 - x^2$$

$$\text{shift solve} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{shift solve} \Rightarrow x = 2$$

اضار عدد بين نقاط التقاطع وعرضه بالدائس

وليكه افسر لتحديد الدالة الاكبر (الاعلى)



$$A = \int_{-2}^2 7 - x^2 - (x^2 - 1) dx = \frac{64}{3}$$

نجد نقاط التقاطع من الآلة الحاسبة

بالخطوات التالية

ادخل المعادلة على الآلة الحاسبة

(1) اعمل shift solve للحصول على

الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل

shift solve واضغط على الرقم 1 او

الرقم -1 او الرقم 2 وهكذا..

عوض أي عدد ضمن نقاط التقاطع في الدالتين

لتحديد الدالة الأعلى

$$y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$$

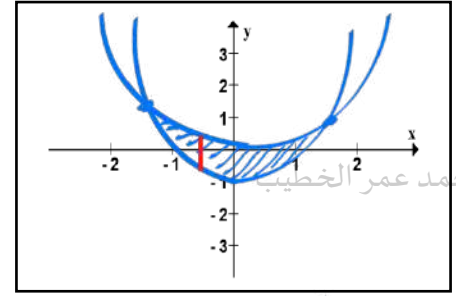
(6) ارسم و اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1) dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - x^2 + 1 dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 - \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



$$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$2x^2 - 2 = x^2$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

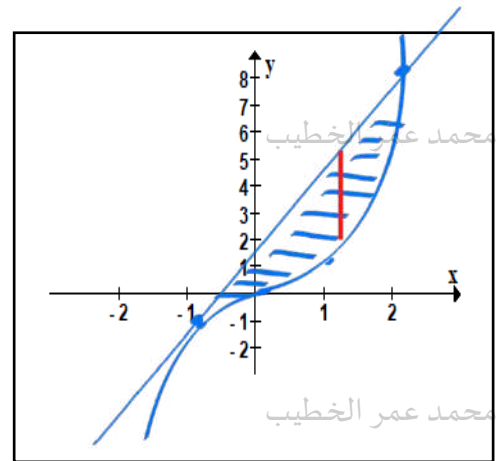
(7) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3, y = 3x + 2$

$$A = \int_{-1}^2 3x + 2 - x^3 dx$$

$$= \int_{-1}^2 2 + 3x - x^3 dx$$

$$= \left[2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{27}{4}$$



$$x^3 = 3x + 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$x = -1, 2$$

$$y = \sqrt{x}, y = x^2$$

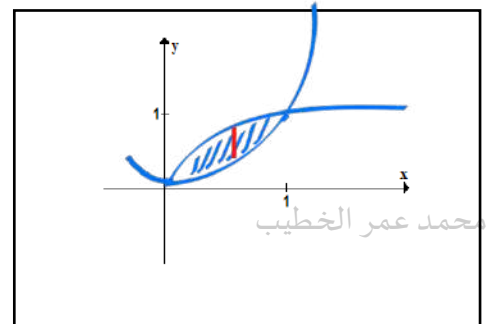
(8) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$



$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$$

(19) اكتب تكامل منفرد (تكامل واحد) يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

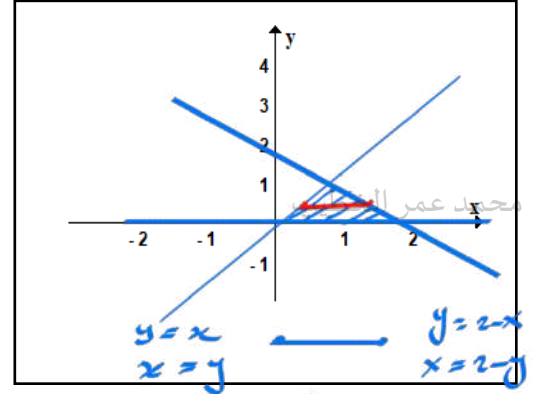
ثم اوجد المساحة $y=0$ $y=2-x$ ، $y=x$

$$A = \int_0^1 (2-y-y) dy$$

$$= \int_0^1 (2-2y) dy$$

$$= [2y - y^2]_0^1$$

$$= 1$$



نقاط التقاطع

$$y = 2 - y$$

$$2y = 2 \Rightarrow y = 1$$

(20) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

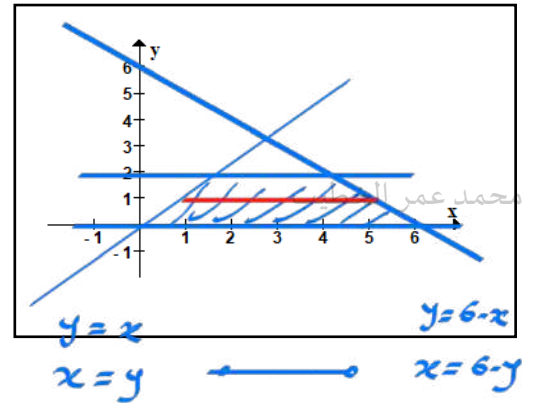
ثم اوجد المساحة $y=0$ و $y=2$ و $y=6-x$ و $y=x$

$$A = \int_0^2 (6-y-y) dy$$

$$= \int_0^2 (6-2y) dy$$

$$= [6y - y^2]_0^2$$

$$= 8$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

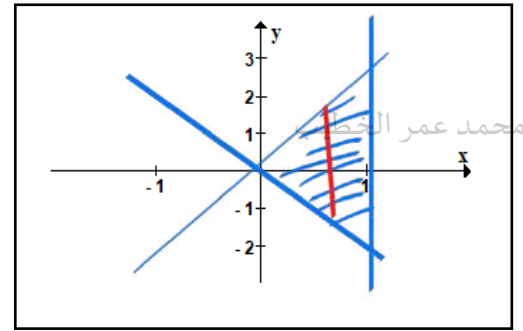
(21) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنيات $x=1$ ، $x=y$ ، $x=-y$

ثم اوجد المساحة

$$A = \int_0^1 x - (-x) dx$$

$$= \int_0^1 2x dx$$

$$= 1$$



$$y = x$$

$$y = -x$$

(22) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنيات $x=2+y^2$ ، $x=3y$

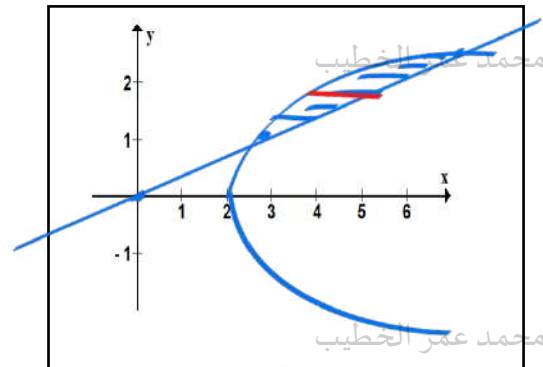
ثم اوجد المساحة

المكامل ده افضل

$$A = \int_1^2 3y - (2+y^2) dy$$

$$= \left[\frac{3y^2}{2} - 2y - \frac{y^3}{3} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{6}$$



نقاط لبنة لمح

$$2+y^2=3y$$

$$y^2-3y-2=0$$

$$y=1, y=2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x=3 \quad x=6$$

$$\overline{x=2+y^2} \quad x=3y$$

(23) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

ثم أوجد المساحة $x=0$ ، $y=3-x^2$ ، $y=2x$ ، $x>0$

$$A = \int_0^1 (3-x^2-2x) dx$$

محمد عمر الخطيب

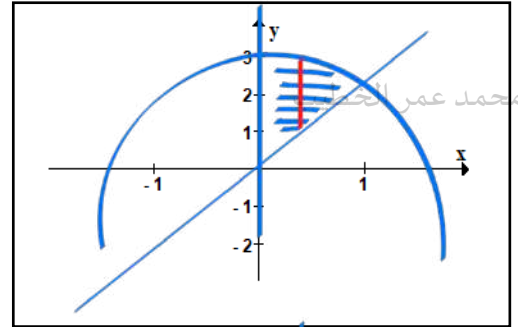
محمد عمر الخطيب

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{5}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



نشاط إبتدائي

$$3-x^2=2x$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$x=1, x=-3$$

هذه الحدود

محمد عمر الخطيب

(24) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $x=4$ ، $x=y^2$ ثم أوجد المساحة

$$A = \int_{-2}^2 (4-y^2) dy$$

محمد عمر الخطيب

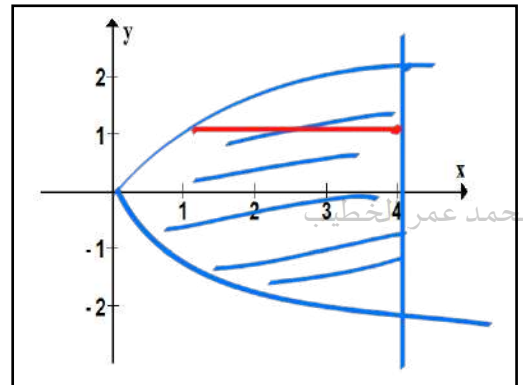
محمد عمر الخطيب

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{32}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$x=y^2 \longleftrightarrow x=4$$

نشاط إبتدائي

$$y^2=4$$

$$y=\pm 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(25) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالدالة $y = 4 - 2x$ والمحورين

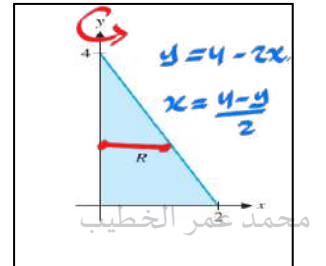
$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\frac{4-y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^4 (4-y)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{(4-y)^3}{3(-1)} \right]_0^4 = \frac{16\pi}{3}$$

(a) حول المحور y



$$\begin{aligned} x=0 & \quad x=0 & \quad x=4-y \\ r_o &= 4-y \\ r_i &= 0 \end{aligned}$$

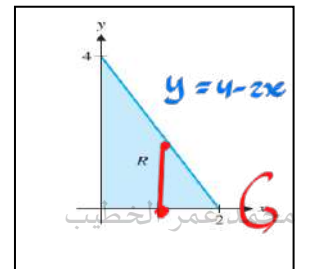
$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r_o^2 - r_i^2) dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4-2x)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{(4-2x)^3}{3(-2)} \right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$

(b) حول المحور x



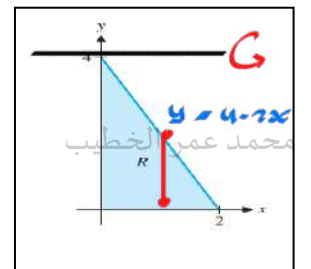
$$\begin{aligned} y &= 4-2x \\ y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 4-2x \\ r_i &= 0 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(c) حول المستقيم $y = 4$



$$\begin{aligned} r_o &= 4 - 0 = 4 \\ r_i &= 4 - (4-2x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$V = \pi \int_0^2 (4^2 - (2x)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16 - 4x^2) dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[16(2) - \frac{4(8)}{3} \right]$$

$$= \frac{64\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

(25) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالدالة $y = 4 - 2x$ والمحورين

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (8 - 2x)^2 - 4^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{(8 - 2x)^3}{3(-2)} - 16x \right]_0^2$$

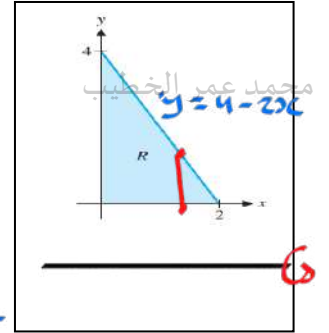
$$= \frac{128\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} y &= 4 - 2x \\ y &= 0 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 4 - 2x - (-4) \\ &= 8 - 2x \\ r_i &= 0 - (-4) = 4 \end{aligned}$$

(d) حول المستقيم $y = -4$



محمد عمر الخطيب

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 4 - \frac{y^2}{4} dy$$

$$= \pi \left[4y - \frac{y^3}{12} \right]_0^4$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$

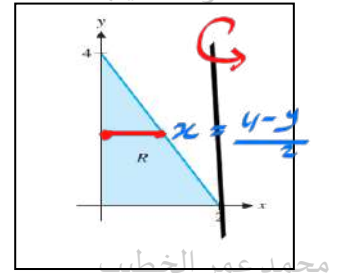
محمد عمر الخطيب

$$x = 0 \quad x = \frac{4-y}{2} \quad x = 2$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} r_o &= 2 - 0 = 2 \\ r_i &= 2 - \left(\frac{4-y}{2}\right) \\ &= \frac{y}{2} \end{aligned}$$

(e) حول المستقيم $x = 2$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(f) حول المستقيم $x = -2$

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(\frac{8-y}{2}\right)^2 - 2^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \frac{(8-y)^2}{4} - 4 dy$$

$$= \pi \left[\frac{(8-y)^3}{4(3)(-1)} - 4y \right]_0^4 = \frac{64\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

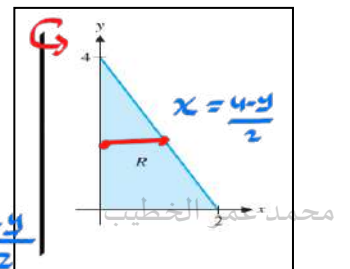
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = \frac{4-y}{2}$$

$$\begin{aligned} r_o &= \frac{4-y}{2} - (-2) \\ &= \frac{8-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_i &= 0 - (-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$



محمد عمر الخطيب

(26) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

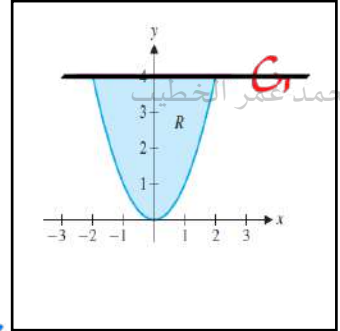
$$= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 16 - 8x^2 + x^4 dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{512\pi}{15}$$

(a) حول المستقيم $y = 4$



$$y = 4$$

$$y = 4$$

$$y = x^2$$

$$r_o = 4 - x^2$$

$$r_i = 4 - 4 = 0$$

محمد عمر الخطيب

بما انه محور التماثل هو محور دوران يَكْفِي تدوير نصف المنطقه

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy$$

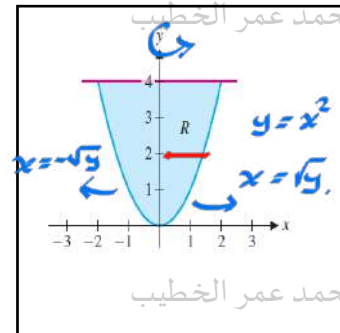
محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 y dy$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4$$

$$= 8\pi$$

(b) حول المحور y



محمد عمر الخطيب

$$x = 0 \quad x = 0 \quad x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y}$$

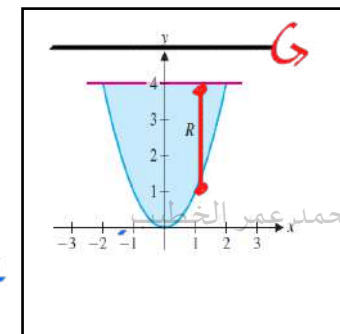
$$r_i = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(c) حول المستقيم $y = 6$



محمد عمر الخطيب

$$S = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (6 - x^2)^2 - 2^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 36 - 12x^2 + x^4 - 4 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 32 - 12x^2 + x^4 dx$$

$$= \pi \left[32x - 4x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 = \frac{384\pi}{5}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(26) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 6^2 - (x^2 + 2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 36 - (x^4 + 4x^2 + 4) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 32 - x^4 - 4x^2 dx$$

$$= \pi \left[32x - \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{1408\pi}{15}$$

محمد عمر الخطيب

$$y = 4$$

$$y = x^2$$

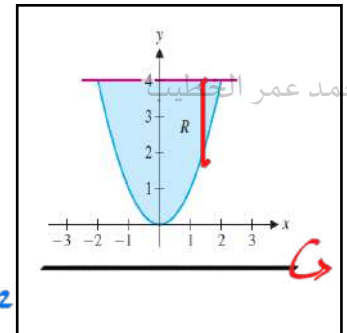
$$y = -2$$

$$r_o = 4 - (-2) = 6$$

$$r_i = x^2 - (-2) = x^2 + 2$$

محمد عمر الخطيب

(d) حول المستقيم $y = -2$



محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 (2 + \sqrt{y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 4 + 4\sqrt{y} + y - (4 - 4\sqrt{y} + y) dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 8\sqrt{y} dy$$

$$= 8\pi \int_0^4 y^{1/2} dy$$

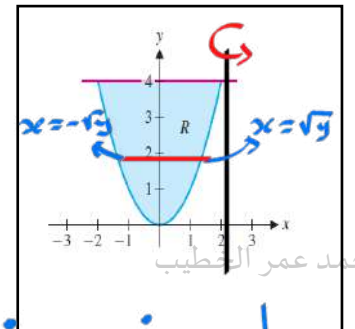
$$= 8\pi \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{128\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(e) حول المستقيم $x = 2$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$x = -\sqrt{y} \quad x = \sqrt{y} \quad x = 2$$

$$r_o = 2 - (-\sqrt{y}) = 2 + \sqrt{y}$$

$$r_i = 2 - \sqrt{y}$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y} + 2)^2 - (-\sqrt{y} + 2)^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 y + 8\sqrt{y} + 16 - (y - 8\sqrt{y} + 16) dy$$

$$= \pi \int_0^4 16\sqrt{y} dy$$

$$= 16\pi \int_0^4 y^{1/2} dy$$

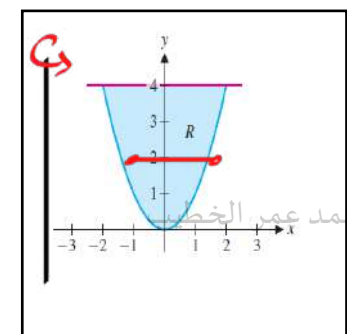
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 16\pi \left[\frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^4 = \frac{256\pi}{3}$$

(f) حول المستقيم $x = -4$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$x = -4 \quad x = -\sqrt{y} \quad x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y} - (-4) = \sqrt{y} + 4$$

$$r_i = -\sqrt{y} - (-4) = -\sqrt{y} + 4$$

(17) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمستقيمات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $y = 2 - x$

(أ) حول المحور x

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx$$

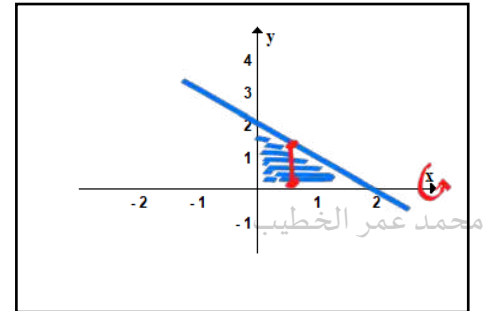
$$= \pi \left[\frac{(2-x)^3}{3(-1)} \right]_0^2$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{8\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$\begin{aligned} y &= 2-x \\ y &= 0 \\ y &= 0 \\ r_o &= 2-x-0 = 2-x \\ r_i &= 0-0 = 0 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(b) حول المستقيم $y = 3$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 3^2 - (1+x)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \left[9 - \frac{(1+x)^3}{3(1)} \right]_0^2$$

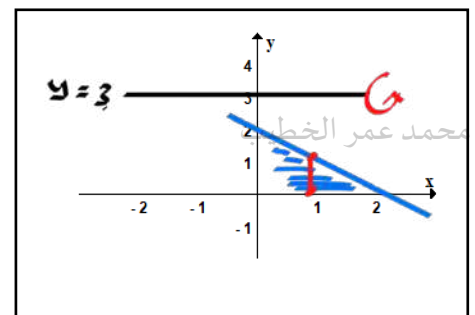
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{28\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$\begin{aligned} y &= 3 \\ y &= 2-x \\ y &= 0 \\ r_o &= 3-0 = 3 \\ r_i &= 3-(2-x) \\ &= 1+x \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

(18) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات $y = x^2$ ، $y = 4 - x^2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2)^2 - (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 16 - 8x^2 + x^4 - x^4 dx$$

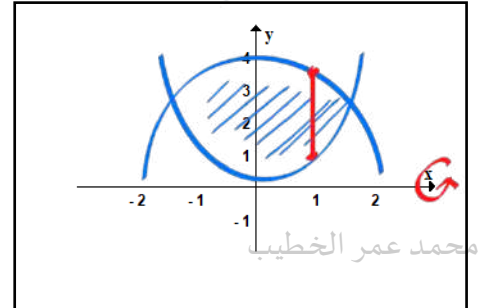
$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 16 - 8x^2 dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$$

(a) حول المحور x

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 - x^2 \\ 2x^2 &= 4 \\ x^2 &= 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= 4 - x^2 \quad r_o \\ y &= x^2 \quad r_i \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 4 - x^2 - 0 = 4 - x^2 \\ r_i &= x^2 - 0 = x^2 \end{aligned}$$

(b) حول المستقيم $y = 4$

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

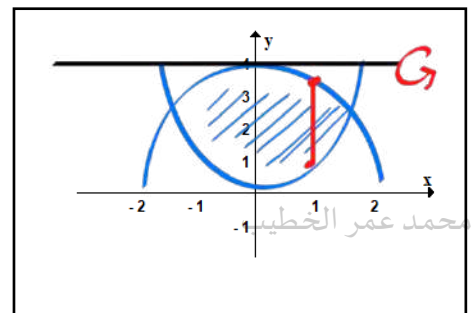
$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2)^2 - (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 16 - 8x^2 + x^4 - x^4 dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 16 - 8x^2 dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$$



$$\begin{aligned} y &= 4 \quad r_o \\ y &= 4 - x^2 \quad r_i \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 4 - x^2 \\ r_i &= 4 - (4 - x^2) = x^2 \end{aligned}$$

$x = 0$, $y = 2$, $y = \sqrt{x}$

(19) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

(a) حول المحور y

$$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 - 0^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 y^4 dy$$

محمد عمر الخطيب

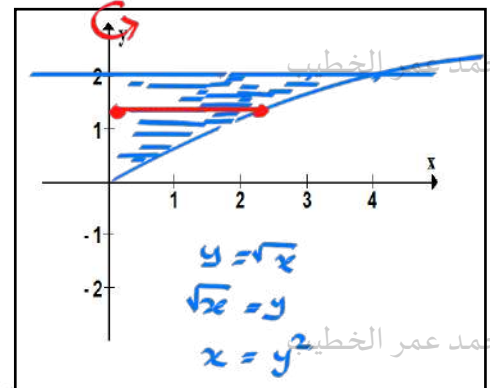
محمد عمر الخطيب

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{5}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$x = 0 \quad x = 0 \quad x = y^2$$

$$r_o = y^2 - 0 = y^2$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(b) حول المستقيم $x = 4$

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - y^2)^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^2 16 - (16 - 8y^2 + y^4) dy$$

$$= \pi \int_0^2 8y^2 - y^4 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

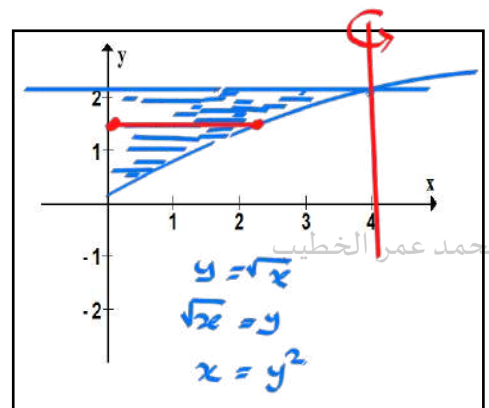
$$= \pi \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{224\pi}{15}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$x = 0 \quad x = y^2 \quad x = 4$$

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

$$r_i = 4 - y^2$$

(19) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال $x = 0$ ، $y = 2$ ، $y = \sqrt{x}$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

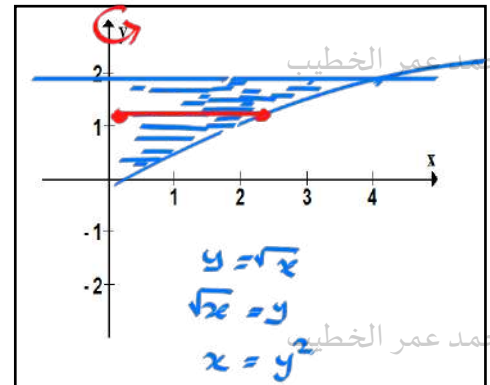
(a) حول المحور y

$$= \pi \int_0^2 (y^2)^2 - 0^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 y^4 dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{5}$$



$$x=0 \quad x=0 \quad x=y^2$$

$$r_o = y^2 - 0 = y^2$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

(b) حول المستقيم $x = 4$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

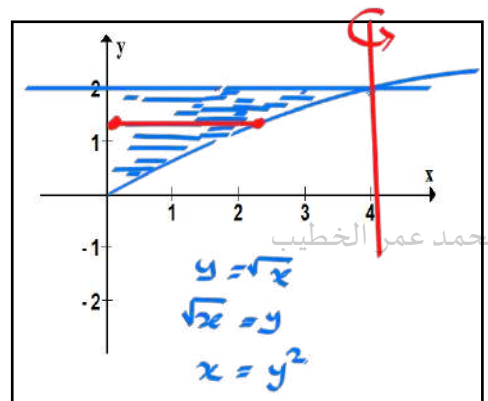
$$= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - y^2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 16 - (16 - 8y^2 + y^4) dy$$

$$= \pi \int_0^2 8y^2 - y^4 dy$$

$$= \pi \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{224\pi}{15}$$



$$x=0 \quad x=y^2 \quad x=4$$

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

$$r_i = 4 - y^2$$

(20) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $x = y^2$ ، $y = x^2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 - (y^2)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 y - y^4 dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1$$

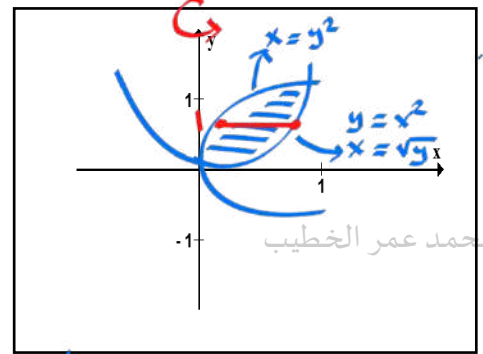
$$= \frac{3\pi}{10}$$

تسا لم يتسالمح

$$x = y^2, y = x^2$$

$$x = (x^2)^2$$

$$x = x^4 \Rightarrow x = 0, 1$$



$$x = 0 \quad x = y^2 \quad x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y} - 0 = \sqrt{y}$$

$$r_i = y^2 - 0 = y^2$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - y^2)^2 - (1 - \sqrt{y})^2 dy$$

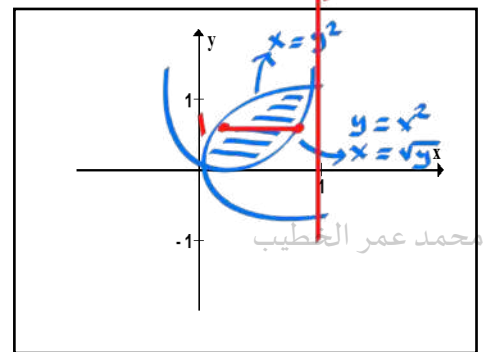
$$= \pi \int_0^1 1 - 2y^2 + y^4 - (1 - 2\sqrt{y} + y) dy$$

$$= \pi \int_0^1 y^4 - 2y^2 - y + 2\sqrt{y} dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{11\pi}{30}$$

(b) حول المستقيم $x = 1$



$$x = y^2 \quad x = \sqrt{y} \quad x = 1$$

$$r_o = 1 - y^2$$

$$r_i = 1 - \sqrt{y}$$

اكتب التكامل الذي يمثل طول المنحنى ثم قرب التكامل بطرق عددية

$$(17) y = 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$S = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{1 + (2-2x)^2} dx = 2.958$$

$$y' = 2 - 2x$$

$$(y')^2 = (2-2x)^2$$

$$(18) y = \tan x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4$$

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x} dx = 1.278$$

$$y' = \sec^2 x$$

$$(y')^2 = \sec^4 x$$

$$(19) y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\sin x)^2} dx$$

$$= 3.820$$

$$y' = -\sin x$$

$$(y')^2 = \sin^2 x$$

$$(20) y = \ln x, \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= 2.302$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

في التمارين من 32 الى 36 اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح الناتج عن دوران الدالة ثم استخدم

الالة الحاسبة لحساب التكامل

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدوران حول محور x $y = x^3 - 4x, -2 \leq x \leq 0$ (32)

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-2}^0 y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= 2\pi \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \sqrt{1 + (3x^2 - 4)^2} dx \\
 &= 67.066
 \end{aligned}$$

$$y' = 3x^2 - 4$$

$$(y')^2 = (3x^2 - 4)^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدوران حول محور x $y = e^x, 0 \leq x \leq 1$ (33)

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\
 &= 22.943
 \end{aligned}$$

$$y' = e^x$$

$$(y')^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدوران حول محور x $y = \ln x, 1 \leq x \leq 2$ (34)

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\
 &= 2\pi \int_1^2 \ln x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx \\
 &= 2.866
 \end{aligned}$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{x^2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الدوران حول محور x

(35) $y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$

$$y' = -\sin x$$

$$(y')^2 = \sin^2 x$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$$

$$= 7.21$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(36) $y = \sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 2$ الدوران حول محور x

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4x}$$

$$S = 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

$$\star S = 2\pi \int_1^2 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{4x+1} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{\sqrt{4x+1}}{2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x+1} dx = 8.283.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(5) يسقط غطاس من منصة الغطس على ارتفاع 30 ft عن سطح الماء أوجد السرعة المتجهة للغطاس

لحظة الاصطدام بالماء .

$$g = 32, \quad v_0 = 0, \quad y_0 = 30$$

$$y'' = -32, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 30.$$

$$y' = -gt + v_0.$$

$$y' = -32t.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$y(t) = -16t^2 + 30$$

$$y(t) = 0 \quad \text{زمن كرملة}$$

$$-16t^2 + 30 = 0$$

$$t^2 = \frac{30}{16} \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{30}{16}} = \pm \sqrt{\frac{15}{8}}$$

$$t = \sqrt{\frac{15}{8}} \text{ sec.}$$

$$v\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right) = -32\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)$$

$$= -43.8 \text{ ft/sec}$$

$$\star \text{ او من القانون } v = -8\sqrt{30} = -43.8 \text{ ft/sec}$$

(6) يسقط غطاس من منصة الغطس على ارتفاع 120 ft عن سطح الماء أوجد السرعة المتجهة للغطاس

لحظة الاصطدام بالماء .

$$g = 32, \quad v_0 = 0, \quad y_0 = 120.$$

$$y = -16t^2 + 120.$$

$$y = 0$$

$$t = \frac{2\sqrt{30}}{4}$$

$$y' = -32t$$

$$y'\left(\frac{2\sqrt{30}}{4}\right) = -32\left(\frac{2\sqrt{30}}{4}\right) = -16\sqrt{30} = -87.64$$

او

$$v = -8\sqrt{H} = -8\sqrt{120} = -87.64 \text{ ft/sec}$$

(7) قارن السرعات المتجهة لحظة الاصطدام للجسام الساقطة من ارتفاع 30 ft و 120 ft و 3000 ft اذا زاد الارتفاع بمعامل زيادة مقدارة $h\text{ ft}$ (مثلا يصبح الارتفاع $30h\text{ ft}$ بدل 30 ft) فبأي عامل تزيد السرعة المتجهة عند الاصطدام.

$$H = 30\text{ ft} \Rightarrow v = -8\sqrt{30} = -43.8$$

$$H = 120\text{ ft} \Rightarrow v = -8\sqrt{120} = -87.64$$

$$H = 3000\text{ ft} \Rightarrow v = -8\sqrt{3000} = -438$$

$$H = y_0 \Rightarrow v_0 = -8\sqrt{y_0}$$

$$H = hy_0 \Rightarrow v = -8\sqrt{hy_0} = -8\sqrt{h} \cdot \sqrt{y_0} = \sqrt{h}(-8\sqrt{y_0}) = \sqrt{h}v_0$$

أي أن السرعة المتجهة تزيد بالعامل $\sqrt{h}$

يمكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

(1) اذا سقط جسم من ارتفاع 100 ft فان السرعة المتجهة عند الاصطدام تكون $V = -80\text{ ft/s}$ فاذا زاد الارتفاع بمعامل زيادة مقدارة 9 ft فان السرعة المتجهة عند الاصطدام تزيد بالمعامل

$$(a) \quad 3$$

$$(b) \quad 9$$

$$h = 9$$

$$(c) \quad 81$$

$$(d) \quad 72$$

(2) اذا سقط جسم من ارتفاع $H\text{ ft}$ فان السرعة المتجهة عند الاصطدام تكون $V = -8\sqrt{H}\text{ ft/s}$ فاذا زاد الارتفاع بمعامل زيادة مقدارة $h\text{ ft}$ فان السرعة المتجهة عند الاصطدام تزيد بالمعامل

$$(a) \quad h$$

$$(b) \quad \sqrt{h}$$

$$(c) \quad h^2$$

$$(d) \quad 8h$$

(17) يطلق جسم ما من الأرض بزاوية ميل قدرها $\theta = \frac{\pi}{3}$ راديان مع الأفق وبسرعة ابتدائية متجهة قدرها

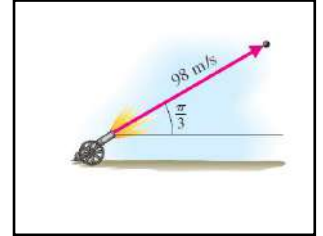
98 m/s ، أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي للجسم

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

معلومات السؤال



$$g = -9.8, v_0 = 98, y_0 = 0, x_0 = 0, \theta = \frac{\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) معادلة الارتفاع $y(t)$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$= -16t^2 + 98 \sin \frac{\pi}{3} t + 0$$

$$= -16t^2 + 49\sqrt{3}t$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) معادلة المدى الأفقي $x(t)$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

$$= 98 \cos \frac{\pi}{3} t + 0$$

$$= 49t$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(t) = 0 \quad \text{زمن الرحلة}$$

$$-4.9t^2 + 49\sqrt{3}t = 0$$

$$t = 0, t = 10\sqrt{3} \text{ s}$$

مرفوض

المدى الأفقي

$$R = x(10\sqrt{3}) = 49(10\sqrt{3})$$

$$= 848.7 \text{ m}$$

هذا الحل من قوانين فيزياء للمقدومات

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{2(98) \sin \frac{\pi}{3}}{9.8} = 10\sqrt{3} \text{ s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

زمن الرحلة

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = \frac{98^2 \sin(\frac{2\pi}{3})}{9.8} = 848.7 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المدى الأفقي

(a18) اوجد زمن التحليق والمدى الافقي لجسم اطلق بزاوية ميل $\theta = 30^\circ$ مع الأفق وبسرعة ابتدائية

متجهة 40 m/s . $g = -9.8$, $u_0 = 40$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\theta = 30^\circ$

(1) معادلة الارتفاع $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + u_0 \sin \theta t + y_0 \\ &= -4.9t^2 + 40 \sin 30^\circ t + 0 \\ &= -4.9t^2 + 20t \end{aligned}$$

زمن الرحلة $y(t) = 0$

$$\begin{aligned} -4.9t^2 + 20t &= 0 \\ t &= 4.08 \end{aligned}$$

(2) معادلة المدى الأفقي $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= u_0 \cos \theta t + x_0 \\ &= 40 \cos 30^\circ t + 0 \\ &= 20\sqrt{3} t \end{aligned}$$

المدى الأفقي

$$\begin{aligned} R &= x(4.08) = 20\sqrt{3}(4.08) \\ &= 141.4 \text{ m} \end{aligned}$$

(b18) اوجد زمن التحليق والمدى الافقي لجسم اطلق بزاوية ميل $\theta = 60^\circ$ مع الأفق وبسرعة ابتدائية

متجهة 40 m/s .

$g = -9.8$, $u_0 = 40$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\theta = 60^\circ$

(1) معادلة الارتفاع $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + u_0 \sin \theta t + y_0 \\ &= -4.9t^2 + 40 \sin 60^\circ t + 0 \\ &= -4.9t^2 + 20\sqrt{3} t \end{aligned}$$

زمن الرحلة $y(t) = 0$

$$\begin{aligned} -4.9t^2 + 20\sqrt{3} t &= 0 \\ t &= 7.07 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) معادلة المدى الأفقي $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= u_0 \cos \theta t + x_0 \\ &= 40 \cos 60^\circ t + 0 \\ &= 20 t \end{aligned}$$

المدى الأفقي

$$\begin{aligned} R &= x(7.07) = 20(7.07) \\ &= 141.4 \text{ m} \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب
(19) يطلق لاعب، كرة تتس من ارتفاع 10 ft

وبسرعة ابتدائية 176 ft/s

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 6°

كما هو موضح بالشكل

أوجد المدى الأفقي للكرة وهل ستكون الكرة داخل أم خارج الحد (على بعد 60 ft من اللاعب)

$$g = 32, v_0 = 176, y_0 = 10, \theta = -6^\circ$$

$$y = 10 + \tan(-6^\circ) x - \frac{32}{2[176 \cos(-6^\circ)]^2} x^2$$

يمكن استخدام معادلة المسار التربيعية التي تربط

بين المتغيرين x, y في هذا النوع من المسائل وهي

$$y = y_0 + \tan \theta x - \frac{g}{2[v_0 \cos \theta]^2} x^2$$

$$g = 32, v_0 = 176, \theta = -6^\circ, y_0 = 10$$

$$y(t) = -16t^2 + 176 \sin(-6^\circ) t + 10$$

$$x(t) = 176 \cos(-6^\circ) t$$

$$x(t) = 39$$

$$176 \cos(-6^\circ) t = 39$$

$$t = 0.23\text{ s}$$

$$y(0.23) = 4.92\text{ ft}$$

بكرة ستقر فوق الشباك

للتأكد
من أن
الكرة
ستمر فوق الشباك

$$y(t) = 0$$

$$t = 0.4\text{ s}$$

$$R = x(0.4) = 70\text{ ft}$$

هذا ع. كد (خط 60)

أوجد قيمة x في معادلة المسار بوضع $y = 0$

في السؤال السابق ان المدى الأفقي للكرة هو

(a) 55 ft

(b) 81 ft

(c) 43 ft

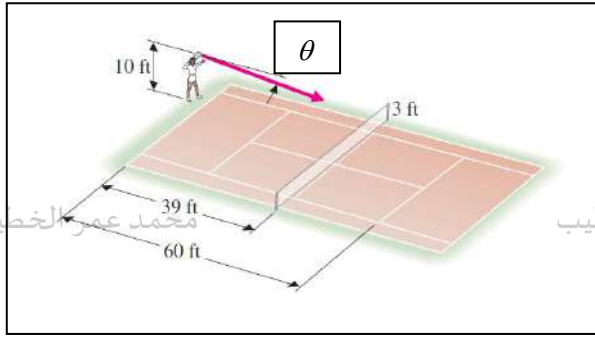
(d) 70 ft

السؤال صعب والحل طويل جداً

(19♦) يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع 10 ft وبسرعة ابتدائية 176 ft/s وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها θ

محمد عمر الخطيب

كما هو موضح بالشكل



اوجد اصغر واكبر زاوية ستكون عند رمي الكرة حتى يكون الارسال صحيح

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الحل محمد عمر الخطيب

لايجاد اصغر قيمة ل θ عوض بدل $x = 39, y = 3$ في معادلة المسار ثم اوجد قيمة θ

$$y = 10 + \tan(\theta) x - \frac{32}{2[176\cos(\theta)]^2} x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ستجد ان $\theta = -0.15752$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

لايجاد اكبر قيمة ل θ عوض بدل $x = 60, y = 0$ في معادلة المسار ثم اوجد قيمة θ

$$y = 10 + \tan(\theta) x - \frac{32}{2[176\cos(\theta)]^2} x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ستجد ان $\theta = -0.13429$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أي ان $-0.15762 < \theta < -0.13429$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(1) \int x \cos x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{x} & \frac{dv}{\cos x} \\ & \swarrow \downarrow \\ & \sin x \\ & \swarrow \downarrow \\ & -\cos x \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(2) \int x \sin 4x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + C$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{x} & \frac{dv}{\sin 4x} \\ & \swarrow \downarrow \\ & -\cos 4x \\ & \swarrow \downarrow \\ & -\frac{\sin 4x}{4} \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) \int x e^{2x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C.$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{x} & \frac{dv}{e^{2x}} \\ & \swarrow \downarrow \\ & \frac{e^{2x}}{2} \\ & \swarrow \downarrow \\ & \frac{e^{2x}}{4} \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(4) \int x \ln x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{\ln x} & \frac{dv}{x} \\ & \swarrow \downarrow \\ & \frac{x^2}{2} \\ & \swarrow \downarrow \\ & \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية

(19) $\int_0^1 x \sin 2x \, dx$

محمد عمر الخطيب

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^1$$

محمد عمر الخطيب $= -\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{1}{4} \sin 2$

محمد عمر الخطيب

u	dv
x	$\sin 2x$
1	$-\frac{\cos 2x}{2}$
0	$-\frac{\sin 2x}{4}$

محمد عمر الخطيب

(20) $\int_0^{\pi} 2x \cos x \, dx$

محمد عمر الخطيب

$$= 2x \sin x + 2 \cos x \Big|_0^{\pi}$$

محمد عمر الخطيب $= -4$

محمد عمر الخطيب

u	dv
2x	$\cos x$
2	$\sin x$
0	$-\cos x$

محمد عمر الخطيب

(21) $\int_0^1 x^2 \cos \pi x \, dx$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x \Big|_0^1$$

محمد عمر الخطيب $= -\frac{2}{\pi^2}$

محمد عمر الخطيب

u	dv
x^2	$\cos \pi x$
2x	$\frac{\sin \pi x}{\pi}$
2	$-\frac{\cos \pi x}{\pi^2}$
0	$-\frac{\sin \pi x}{\pi^3}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(22) \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} \right]_0^1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{5}{27} e^3 - \frac{2}{27}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{x^2} & \frac{dv}{e^{3x}} & \\ & \downarrow + & \\ 2x & \frac{e^{3x}}{3} & \\ & \downarrow - & \\ 2 & \frac{e^{3x}}{3^2} & \\ & \downarrow + & \\ 0 & \frac{e^{3x}}{3^3} & \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(23) \int_1^{10} \ln 2x dx$$

$$= \left[x \ln 2x \right]_1^{10} - \int_1^{10} 1 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[x \ln 2x - x \right]_1^{10}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 10 \ln 20 - \ln 2 - 9$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{\ln 2x} & \frac{dv}{1} & \\ & \downarrow + & \\ \frac{2}{2x} & x & \end{array}$$

$$(24) \int_1^2 x \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{u}{\ln x} & \frac{dv}{x} & \\ & \downarrow + & \\ \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} & \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد التكاملات التالية

محمد الخطيب

$$(3) \int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x \, dx$$

$$= \int \cos 2x \, u^3 \frac{du}{2 \cos 2x}$$

محمد الخطيب

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} u^3 \, du$$

$$= \frac{1}{8} u^4 \Big|_0^1$$

محمد الخطيب

$$= \frac{1}{8}$$

محمد الخطيب

محمد الخطيب

محمد الخطيب

محمد الخطيب

$$u = \sin 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \cos 2x$$

$$\frac{du}{2 \cos 2x} = dx$$

محمد الخطيب

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

محمد الخطيب

محمد الخطيب

محمد الخطيب

محمد الخطيب

$$(4) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$$

$$= \int u^3 \sin^2 3x \frac{du}{-3 \sin 3x}$$

محمد الخطيب

محمد الخطيب

$$= -\frac{1}{3} \int u^3 \sin^2 3x \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^{-1} u^3 (1 - u^2) \, du$$

محمد الخطيب

محمد الخطيب

$$= -\frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^{-1} u^3 - u^5 \, du$$

$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right]_{1/\sqrt{2}}^{-1} = -\frac{1}{72}$$

محمد الخطيب

محمد الخطيب

نكامل من أجل u

$$u = \cos 3x$$

محمد الخطيب

$$\frac{du}{dx} = -3 \sin 3x$$

$$\frac{du}{-3 \sin 3x} = dx$$

$$\rightarrow \sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$$

$$= 1 - u^2$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = -1/\sqrt{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = -1$$

محمد الخطيب

$$(5) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int u^2 \sin x \frac{du}{-\sin x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= - \int_1^0 u^2 \, du$$

$$= \int_0^1 u^2 \, du$$

محمد عمر الخطيب

$$= \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(6) \int_{-\pi/2}^0 \cos^3 x \sin x \, dx$$

$$= \int u^3 \sin x \frac{du}{-\sin x}$$

محمد عمر الخطيب

$$= - \int_0^1 u^3 \, du$$

$$= - \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1$$

محمد عمر الخطيب

$$= -\frac{1}{4}$$

$$u = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{du}{-\sin x} = dx$$

$$-\sin x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظات :

- (1) في بعض تمارين هذا السؤال لا داعي لإكمال الحل الى النهاية لانها الحل طويل جداً
 (2) في بعض التمارين يمكن حلها بالتكامل بالتعويض العادي ويكون اسهل من التعويضات المثلثية

اوجد التكاملات التالية

$$(23) \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$x = 4 \sin \theta$$

$$dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{16 \sin^2 \theta}{\sqrt{16-16 \sin^2 \theta}} 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int \frac{16 \sin^2 \theta}{4 \cos \theta} 4 \cos \theta d\theta$$

$$= \int 16 \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \int 16 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 8 \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C$$

$$= 8 \left(\theta - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2} \right) + C$$

$$= 8\theta - 8 \sin \theta \cos \theta + C$$

$$= 8 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) - 8 \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} + C$$

$$= 8 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) - \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + C$$

شكل التحويل

$$\sin \theta = \frac{x}{4}$$



$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right)$$

ممكّن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

(1) لإيجاد التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$ نستخدم التعويض المثلثي

(a) $x = \sin \theta$

(b) $x = 2 \sin \theta$

(c) $x = 4 \sin \theta$

(d) $x = 4 \tan \theta$

(2) باستخدام التعويض المثلثي المناسب يمكن كتابة التكامل $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} dx$ بالصورة

(a) $\int 16 \sin^2 \theta d\theta$

(b) $\int 4 \sin^2 \theta d\theta$

(c) $\int 16 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$

(d) $\int 4 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$

(24) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$

$x = 3 \sin \theta$

$dx = 3 \cos \theta \cdot d\theta$

$= \int \frac{27 \sin^3 \theta}{3 \cos \theta} \cdot 3 \cos \theta d\theta$

$= \int 27 \sin^3 \theta$

$= 27 \int \sin \theta \cdot \sin^2 \theta d\theta$

$= 27 \int \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$

$= 27 \int (1 - t^2) \frac{dt}{-\sin \theta}$

$= 27 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C$

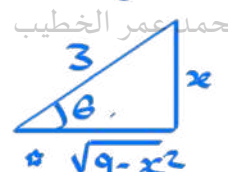
$= 9 \cos^3 \theta - 27 \cos \theta + C$

$= 9 \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right)^3 - 27 \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right) + C$

$= \frac{1}{3} (9-x^2)^{3/2} - 9 \sqrt{9-x^2} + C$

نستخدم التعويض

$\sin \theta = \frac{x}{3}$



$$(25) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} [\text{مساحة دائرة}]$$

$$= \frac{1}{4} [\pi \cdot 2^2]$$

$$= \pi$$

$$y = \sqrt{u-x^2}$$

على الفترة $[0, 2]$

تمثل دائرة ربع دائرة

مركزها $(0, 0)$

ونصف قطرها 2

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} [\text{مساحة دائرة نصف قطرها } a]$$

$$\star \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} [\text{مساحة دائرة نصف قطرها } a]$$

يمكن حل السؤال بالتعويض $x = 2 \sin \theta$

$$(26) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

عَنْ حَلِّ السُّؤَالِ بِالتَّعْوِضِ الْجَدِيدِ

لكنه الأفضل، والأسهل، والتعويض الجيد

$$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_4^3 u^{-1/2} du$$

$$= -\frac{1}{2} [2u^{1/2}]_4^3$$

$$= \sqrt{u} \Big|_3^4 = 2 - \sqrt{3}$$

$$u = 4 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$\frac{du}{-2x} = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 3$$

اوجد التكاملات التالية

$$(25) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} [\text{مساحة دائرة}]$$

$$= \frac{1}{4} [\pi \cdot 2^2]$$

$$= \pi$$

$$y = \sqrt{4-x^2}$$

على الفترة $[0, 2]$

تمثل دائرة ربع دائرة

مركزها $(0, 0)$

ونصف قطرها 2

$$\star \int_a^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} [\text{مساحة دائرة نصف قطرها } a]$$

$$\star \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} [\text{مساحة دائرة نصف قطرها } a]$$

يمكن حل السؤال بالتعويضات المثلثية $x = 2 \sin \theta$

$$(26) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

يمكن حل السؤال بالتعويض المثلثي
لأنه لا يفضل، والأسهل بالتعويض الجبري

$$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_4^3 u^{-1/2} du$$

$$= -\frac{1}{2} [2u^{1/2}]_4^3$$

$$= -\frac{1}{2} [2\sqrt{u}]_4^3 = 2 - \sqrt{3}$$

$$u = 4 - x^2$$

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

$$\frac{du}{-2x} = dx$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 3$$

مما ان لم ال ضيع دائره ناك يمكنه ان يكون اطول
حل السؤال طويل جداً
الحل الكامل للسؤال في بعض المسائل الطويلة مثل هذا

$$(27) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

$$= \int \frac{9 \sec^2 \theta}{\sqrt{9 \sec^2 \theta - 9}} \cdot 3 \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$$

$$x = 3 \sec \theta$$

$$dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{27 \sec^3 \theta \tan \theta}{3 \sqrt{\sec^2 \theta - 1}} d\theta$$

$$= \int \frac{9 \sec^3 \theta \tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int \frac{9 \sec^3 \theta \tan \theta}{\tan \theta} d\theta$$

$$= 9 \int \sec^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{9}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

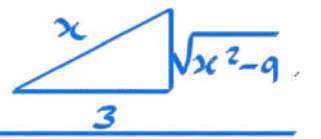
$$= \frac{9}{2} \left(\frac{x}{3} \right) \left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \right) + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-9}}{3} \right| + C$$

$$\text{منك المثلث}$$

$$\sec \theta = \frac{x}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{x}$$



بداية جبراء

محمد عمر الخطيب

يمكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

$$\text{لإيجاد التكامل} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx \text{ نستخدم التعويض المثلثي}$$

$$(a) x = \sec \theta$$

$$(b) x = 3 \sec \theta$$

محمد عمر الخطيب

$$(c) x = 3 \sin \theta$$

$$(d) x = 3 \tan \theta$$

$$\text{او باستخدام التعويض المثلثي المناسب يمكن كتابة التكامل} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} dx \text{ بالصورة}$$

$$(a) \int 9 \sec^2 \theta d\theta$$

$$(b) \int 9 \sec^3 \theta d\theta$$

$$(c) \int 3 \sec^3 \theta d\theta$$

$$(d) \int 9 \tan^2 \theta \sec \theta d\theta$$

محمد عمر الخطيب

$$(28) \int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$= \int x^{\frac{2}{1}} u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int (u+1) u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{5} (x^2 - 1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$u = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = u$$

$$x^2 = u + 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(29) \int \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{4 \sec^2 \theta - 4}} \cdot 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$= \int \frac{4 \sec \theta \tan \theta}{2 \tan \theta} d\theta$$

$$= 2 \int \sec \theta d\theta$$

$$= 2 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

$$= 2 \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| + C$$

$$= 2 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| + C = 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$$

$$x = 2 \sec \theta$$

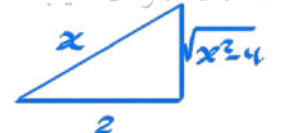
$$dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

مشتق، بتعويض

$$\sec \theta = \frac{x}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{x}$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

* من خواص Ln

$$(30) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

$$= \int \frac{x}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2 - 4} + C$$

تعويض عادي

$$u = x^2 - 4$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

تغيير المتحول بالتعويض

اوجد تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي ثم اوجد الدالة الاصلية

(1) $\frac{x-5}{x^2-1}$

$$= \int \frac{x-5}{x^2-1} dx$$

$$= \int \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x+1} dx$$

$$= -2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| + c$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{x-5}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$x-5 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x=1 \Rightarrow -4 = 2A \Rightarrow A = -2$$

$$x=-1 \Rightarrow -6 = -2B \Rightarrow B = 3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) $\frac{5x-2}{x^2-4}$

$$= \int \frac{5x-2}{x^2-4} dx$$

$$= \int \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} dx$$

$$= 2 \ln|x-2| + 3 \ln|x+2| + c$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{5x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x-2 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x=2 \Rightarrow 8 = 4A \Rightarrow A = 2$$

$$x=-2 \Rightarrow -12 = -4B \Rightarrow B = 3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(3) \frac{6x}{x^2 - x - 2}$$

$$= \int \frac{6x}{x^2 - x - 2} dx$$

$$= \int \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx$$

$$= 4 \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + c$$

بكو، بجزء

$$\frac{6x}{x^2 - x - 2} = \frac{6x}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$$6x = A(x+1) + B(x-2)$$

$$\text{عند } x=2 \Rightarrow 12 = 3A \Rightarrow A=4$$

$$x=-1 \Rightarrow -6 = -3B \Rightarrow B=2$$

$$(4) \frac{3x}{x^2 - 3x - 4}$$

$$= \int \frac{3x}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$= \int \frac{12/5}{x-4} + \frac{3/5}{x+1} dx$$

$$= \frac{12}{5} \ln|x-4| + \frac{3}{5} \ln|x+1| + c$$

بكو، بجزء

$$\frac{3x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{3x}{(x-4)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$

$$3x = A(x+1) + B(x-4)$$

$$\text{عند } x=4 \Rightarrow 12 = 5A \Rightarrow A = \frac{12}{5}$$

$$x=-1 \Rightarrow -3 = -5B \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

محمد عمر الخطيب

$$(5) \frac{-x+5}{x^3-x^2-2x}$$

محمد عمر الخطيب

$$\int \frac{-x+5}{x^3-x^2-2x} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{-5/2}{x} + \frac{1/2}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= -5/2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2| + 2 \ln|x+1| + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{-x+5}{x^3-x^2-2x} = \frac{-x+5}{x(x^2-x-2)}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{-x+5}{x(x-2)(x+1)}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

محمد عمر الخطيب

$$-x+5 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

محمد عمر الخطيب

$$\text{عند } x=0 \Rightarrow 5 = -2A \Rightarrow A = -5/2$$

محمد عمر الخطيب

$$x=2 \Rightarrow 3 = 6B \Rightarrow B = 1/2$$

محمد عمر الخطيب

$$x=-1 \Rightarrow 6 = 3C \Rightarrow C = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(6) \frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$$

محمد عمر الخطيب

$$\int \frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int \frac{4/3}{x} + \frac{-1}{x+2} + \frac{-1/3}{x+3} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{4}{3} \ln|x| - \ln|x+2|$$

محمد عمر الخطيب

$$- \frac{1}{3} \ln|x+3| + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{3x+8}{x^3+5x^2+6x} = \frac{3x+8}{x(x^2+5x+6)}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{3x+8}{x(x+2)(x+3)}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

محمد عمر الخطيب

$$3x+8 = A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2)$$

محمد عمر الخطيب

$$\text{عند } x=0 \Rightarrow 8 = 6A \Rightarrow A = 4/3$$

محمد عمر الخطيب

$$x=-2 \Rightarrow 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

محمد عمر الخطيب

$$x=-3 \Rightarrow -1 = 3C \Rightarrow C = -1/3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

جد تفكيك الكسور الجزئية

$$(37) \quad \frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$4x^2+2 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

نستخدم طريقة المتساوية وليس التعويض

$$4x^2+2 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$$

$$4x^2+2 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$

بالمساواة بين المعاملات في الطرفين

$$A=0, \quad B=4, \quad A+C=0, \quad B+D=2$$

$$A=0, \quad B=4, \quad C=0, \quad D=-2$$

$$\therefore \frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{x^2+1} + \frac{-2}{(x^2+1)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$$

يمكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

(1) يمكن كتابة الكسر $\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2}$ بتفكيك الكسور الجزئية بالشكل

$$(a) \quad \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad (b) \quad \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$(c) \quad \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+1} \quad (d) \quad \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x^2+1)^2}$$

(2) عند كتابة الكسر $\frac{4x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ بتفكيك الكسور الجزئية على الشكل

فان قيمة الثوابت A, C هي $\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$

(a) $A = 0, C = -1$

(b) $A = 0, C = 0$

(c) $A = -1, C = 2$

(d) $A = 2, C = -1$

$A = 0$

$C = 0$

$B = 4$

$D = -2$

(3) عند كتابة الكسر $\frac{4x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ بتفكيك الكسور الجزئية على الشكل

فان قيمة الثوابت A, B, C, D هي $\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$

(a) $A = 0, B = 4, C = 0, D = -2$

(b) $A = 0, B = 4, C = -1, D = 2$

(c) $A = -1, B = 0, C = 0, D = 2$

(d) $A = 1, B = 0, C = -1, D = 0$

(4) يمكن كتابة الكسر $\frac{4x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ بتفكيك الكسور الجزئية بالشكل

(a) $\frac{4}{x^2 + 1} + \frac{-2}{x^2 + 1}$

(b) $\frac{4}{x^2 + 1} + \frac{-2}{(x^2 + 1)^2}$

(c) $\frac{4}{x^2 + 1} + \frac{-2}{x^2 + 1}$

(d) $\frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

$$(38) \quad \frac{x^3+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$x^3+2 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

$$x^3+2 = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B+D$$

النتيجة

$$A=1$$

$$B=0 \Rightarrow B+D=2 \Rightarrow D=2$$

$$A+C=0 \Rightarrow C=-1$$

$$\frac{x^3+2}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$(39) \quad \frac{4x^2+3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} 4x^2+3 &= (Ax+B)(x^2+x+1) + Cx+D \\ &= Ax^3 + Ax^2 + Ax + Bx^2 + Bx + B + Cx + D \\ &= Ax^3 + (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (B+D) \end{aligned}$$

النتيجة

$$A=0$$

$$A+B=4 \Rightarrow B=4$$

$$A+B+C=0 \Rightarrow C=-4$$

$$B+D=3 \Rightarrow D=-1$$

$$\frac{4x^2+3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4}{x^2+x+1} + \frac{-4x-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$(40) \quad \frac{x^4+x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{x^4+x^3}{x^4+8x^2+16} = 1 + \frac{x^3-8x^2-16}{(x^2+4)^2}$$

من أجل
الحل

$$\frac{x^3-8x^2-16}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$x^3-8x^2-16 = (Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+4)$$

$$\Rightarrow A=1, B=-8, C=-4, D=24$$

$$\therefore \frac{x^4+x^3}{(x^2+4)^2} = 1 + \frac{x-8}{x^2+4} + \frac{-4x+16}{(x^2+4)^2}$$

في التمارين من 1 الى 6 اوجد حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة والتي تحقق الشرط الابتدائي المشار اليه.

(1) $y' = 4y$, $y(0) = 2$

$$\frac{dy}{dt} = 4y$$

$$\frac{dy}{y} = 4 dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 4 dt$$

$$\ln|y| = 4t + c$$

$$y = e^{4t+c}$$

$$y = e^{4t} \cdot e^c$$

$$y = e^{4t} \cdot A$$

$$y = A e^{4t}$$

$$y(0) = 2$$

$$A = 2$$

$$y = 2 e^{4t}$$

$$y = 2 e^{4x}$$

وتمكنه يكون

الحل بدلالة x

(2) $y' = 3y$, $y(0) = -2$

$$y = A e^{3t}$$

$$y(0) = -2$$

$$A = -2$$

$$y = -2 e^{3t}$$

☆ يفضل حفظ المعادلة مع كل
طذا النوع (بعض التفاضل ليس)

$$y(t) = k y$$

اذ كانت

$$y = A e^{kt}$$

(3) $y' = -3y$, $y(0) = 5$

$$y = A e^{-3t}$$

$$y(0) = 5$$

$$A = 5$$

$$y = 5 e^{-3t}$$

$$k = -2$$

$$(4) \quad y' = -2y, \quad y(0) = -6$$

$$y = A e^{-2t}$$

$$y(0) = -6$$

$$A = -6$$

$$y = A e^{-2t}$$

$$y = -6e^{-2t}$$

$$k = 2$$

$$(5) \quad y' = 2y, \quad y(1) = 2$$

$$y = A e^{2t}$$

$$\star y(1) = 2$$

$$A e^2 = 2$$

$$A = \frac{2}{e^2}$$

$$y = \frac{2}{e^2} e^{2t} = 2 e^{2t-2}$$

$$k = -1$$

$$(6) \quad y' = -y, \quad y(1) = 2$$

$$y = A e^{-t}$$

$$y(1) = 2$$

$$A e^{-1} = 2$$

$$A = \frac{2}{e^{-1}} = 2e = 2e$$

$$y = 2e \cdot e^{-t}$$

$$= 2e^{1-t}$$

في التمارين من 11 الى 16 جد الحل العام لكل معادلة تفاضلية بالصورة صريحة ان امكن

$$(11) \quad y' = \frac{2x}{y} e^{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} e^y \cdot e^{-x}$$

$$y \, dy = 2x e^{-x} dx$$

$$y \, dy = 2x e^{-x} dx$$

$$\int y \, dy = \int 2x e^{-x} dx$$

$$-\frac{1}{2} y^2 = -2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$-\frac{1}{2} (y+1)^2 = -2e^{-x} (x+1) + C$$

$$(y+1)^2 = 2(x+1)e^{-x} + C$$

محمد عمر الخطيب

يحيى
يحيى
يحيى
يحيى

محمد عمر الخطيب

2x e^{-x}
2x e^{-x}
2x e^{-x}

محمد عمر الخطيب

$$(12) \quad y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\sin^{-1} y = \ln |\ln x| + C$$

$$y = \sin (\ln |\ln x| + C)$$

المعادلة

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad u = \ln x$$

$$= \int \frac{1}{x u} x du \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln |u|$$

$$= \ln |\ln x| + C$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$(13) \quad y' = \frac{\cos x}{\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y}$$

$$\sin y = \cos x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \cos x \, dx$$

$$-\cos y = \sin x + c, \quad \text{محمد عمر الخطيب}$$

$$\cos y = -\sin x + c$$

$$y = \cos^{-1}(-\sin x + c)$$

$$(14) \quad y' = x \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = x \, dx$$

$$\sec^2 y \, dy = x \, dx$$

$$\int \sec^2 y \, dy = \int x \, dx \quad \text{محمد عمر الخطيب}$$

$$\tan y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \quad \text{محمد عمر الخطيب}$$

$$(15) \quad y' = \frac{xy}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} \cdot e^C$$

$$= A e^{\frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

$$= A (1+x^2)^{1/2}$$

$$= A \sqrt{1+x^2}$$

$$(16) \quad y' = \frac{2}{xy + y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y(x+1)}$$

$$y dy = \frac{2}{x+1} dx$$

$$\int y dy = \int \frac{2}{x+1} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = 2 \ln|x+1| + C$$

$$y^2 = 4 \ln|x+1| + C$$

$$y = \pm \sqrt{4 \ln|x+1| + C}$$