أوراق عمل شاملة الوحدة السادسة تطبيقات التكامل

إعداد: محمد عمر الخطيب

KhateebAcademy.com

Alpha Education Center

الإمارات
THE EMIRATES

الصف الثاني عشر متقدم

2026/2025

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل

1-6 المساحة المحصورة بين منحنيين

2-6 الحجم : شرائح /أقراص وحلقات

4-6 طول القوس ومساحة السطح

5-6 حركة المقذوفات

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الأول : المساحة بين منحنيين

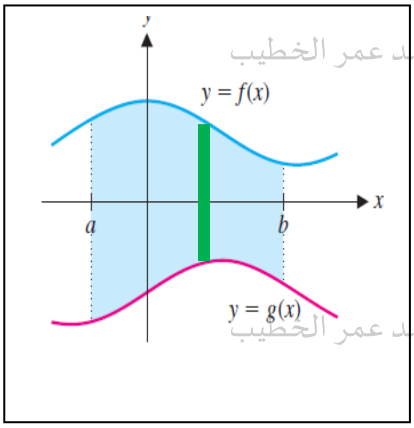
المساحة بين منحنيين

المساحة

الحالة الأولى : المكامل (dx)

الشريحة عمودية على محور x

عرض الشريحة dx



الحد الأعلى للشريحة $y = f(x)$

طول الشريحة $f(x) - g(x)$

عرض الشريحة dx

الحد الأدنى للشريحة $y = g(x)$

حدود الشريحة

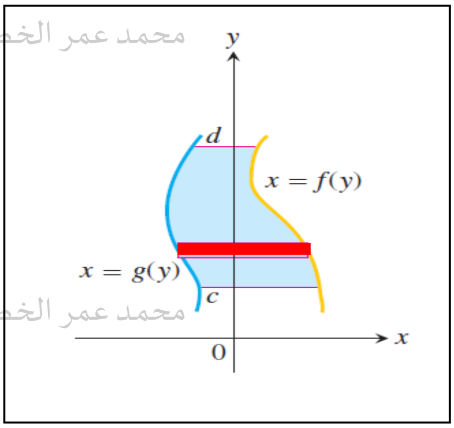
من محور x

وهي من a الى b

الحالة الثانية : المكامل (dy)

الشريحة عمودية على محور y

عرض الشريحة dy



الحد الأيمن للشريحة $x = f(y)$

طول الشريحة $f(y) - g(y)$

الحد الايسر للشريحة $x = g(y)$

عرض الشريحة dy

حدود الشريحة

من محور y

وهي من c الى d

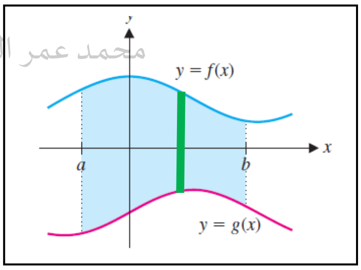
الحالة الأولى : المكامل (dx)

الشريحة عمودية على محور x

(عرض المستطيل) هو dx

(طول المستطيل) هو $f(x)-g(x)$

إذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فإن المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل



$$A = \int_a^b [\ \text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى}\ ]\, dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\, dx$$

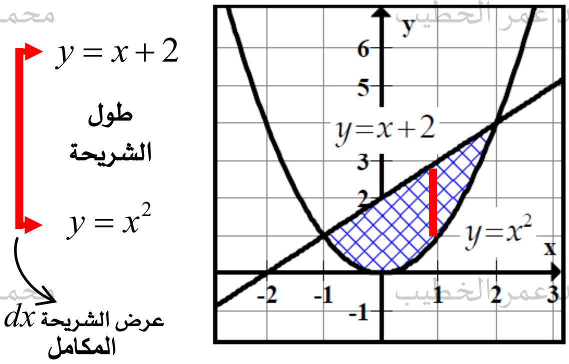
خطوات إيجاد المساحة

له الأولوية

ارسم الدوال ⟸ ظلل المنطقة المطلوبة ⟸ ارسم الشريحة وحدد المكامل (dx أم dy)

⟸ أوجد حدود التكامل (نقاط التقاطع) ⟸ كامل ⟸ عوض الحدود لإيجاد المساحة

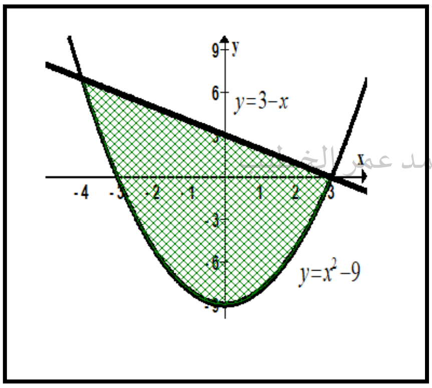
أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x + 2$ ، $y = x^2$



حدود الشريحة وهي

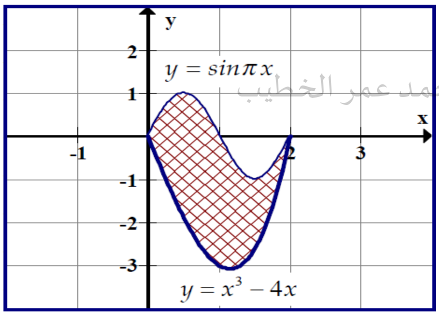
حدود التكامل من محور x

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^2 - 9$ ، $y = 3 - x$



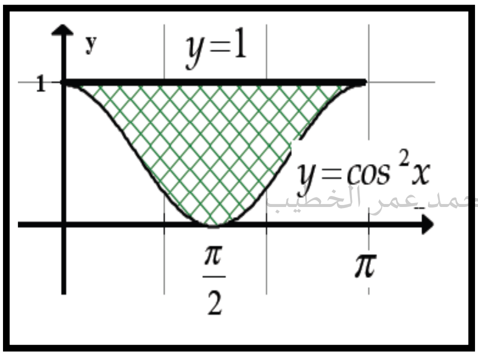
---

(2) أوجد المساحة المظللة بين الدالتين $y = x^3 - 4x$ ، $y = \sin \pi x$



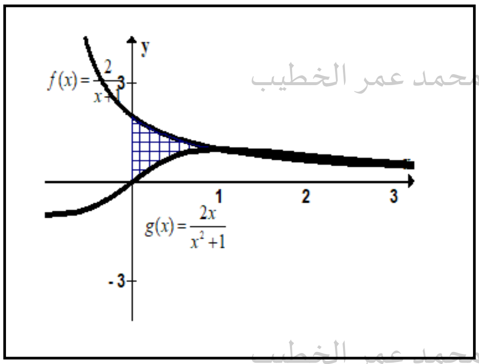
---

(3) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = 1$ ، $y = \cos^2 x$



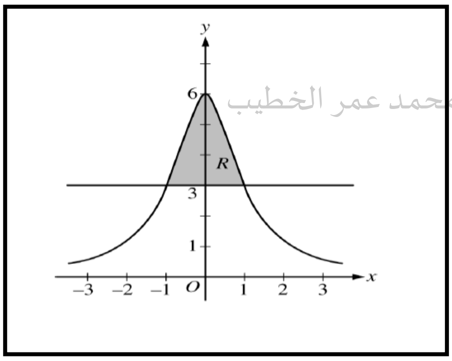
(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ ، $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ والمستقيم $x=0$

حيث نقطة التقاطع $x=1$

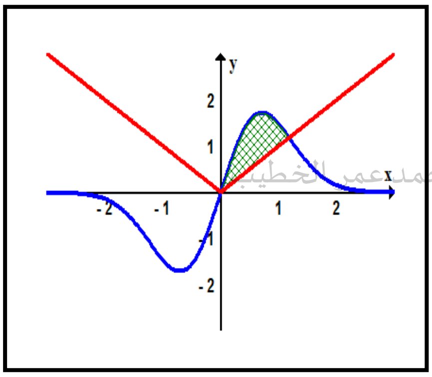


(2) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x)=\dfrac{6}{x^2+1}$ و $g(x)=3$

ملاحظة (استفد من التماثل)



(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=4xe^{-x^2}$ و $y=|x|$ حيث نقطة التقاطع $\sqrt{\ln 4}$

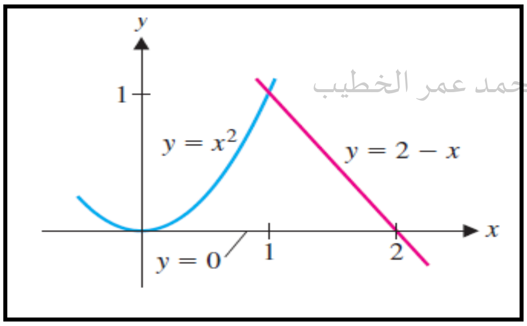


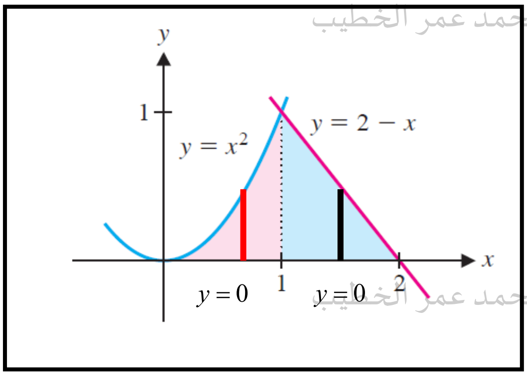
تجزئة المساحة

ملاحظة :جزء المساحة عندما يتغير ارتفاع الشريحة

(عندما تتغير احدى الدوال)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور x



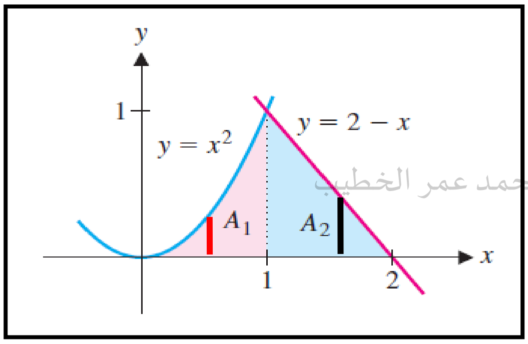


$y = x^2$

$y = 0$

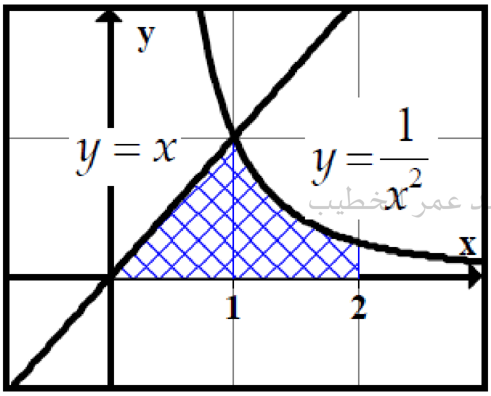
$y = 2 - x$

$y = 0$

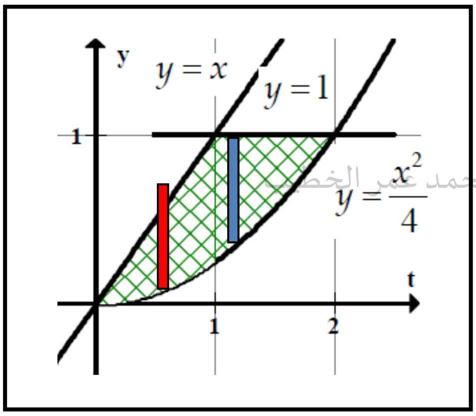


---

(2) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

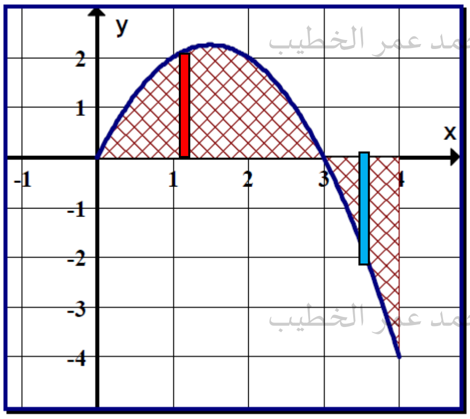


(1) اوجد المساحة المحصورة في الشكل



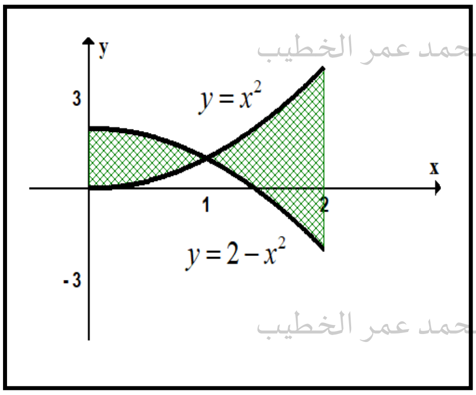
---

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=3x-x^2$ ومحور x والمستقيمين $x=0, x=4$

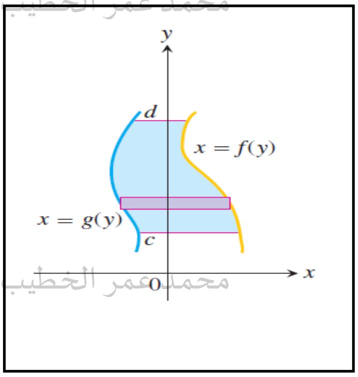


---

(3) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور



الحالة الثانية : المكامل (dy)



الشريحة (عرض المستطيل) هو dy

(ارتفاع المستطيل) هو $f(y)-g(y)$

عمودي على محور الصادات y

$$A=\int_c^d [\ \text{الدالة(العلاقة) اليمنى} \ - \ \text{الدالة(العلاقة) اليسرى}\ ]\ dy$$

$$A=\int_c^d f(y)-g(y)\quad dy$$

يجب أن تكون العلاقات بدلالة y

وحدود التكامل من محور y

حالات استخدام المكامل dy

(1) يفضل إذا كانت المساحة مع dx تحتاج إلى تجزئة

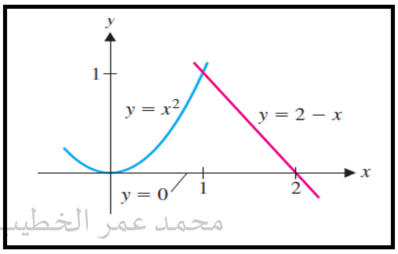
(2) يفضل اذا كانت الدوال (العلاقات) بدلالة y

(3) يفضل إذا كان الارتفاع بين نفس العلاقة

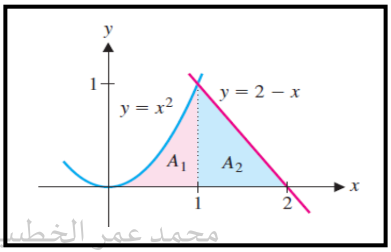
(4) إجباري إذا كانت الخيارات كلها في dy

(5) إجباري إذا كان التكامل dx صعب ايجاده

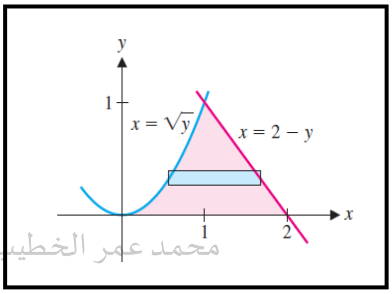
أوجد المساحة المحصورة بين الدوال $y=x^2,\quad y=2-x,\quad y=0$



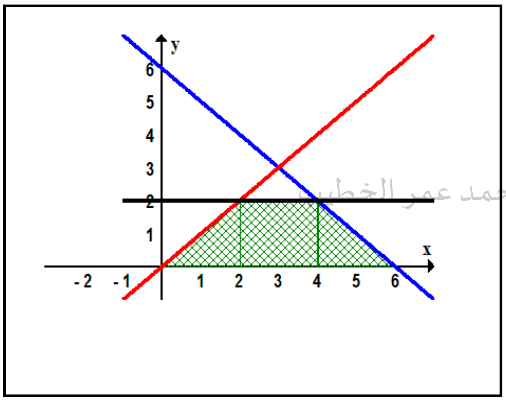
أولاً : المكامل dx



ثانياً : المكامل dy

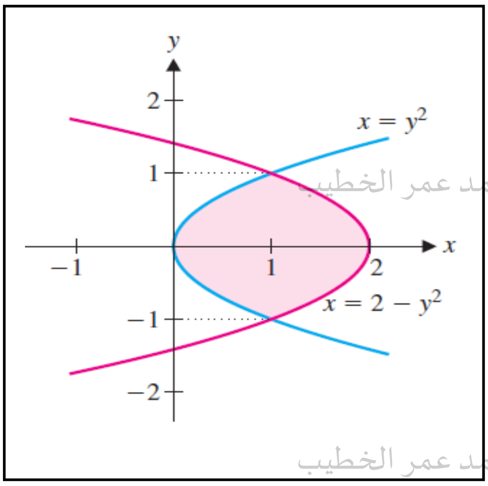


(1) عبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y=0, y=2, y=x, y=6-x,$ بتكامل منفرد



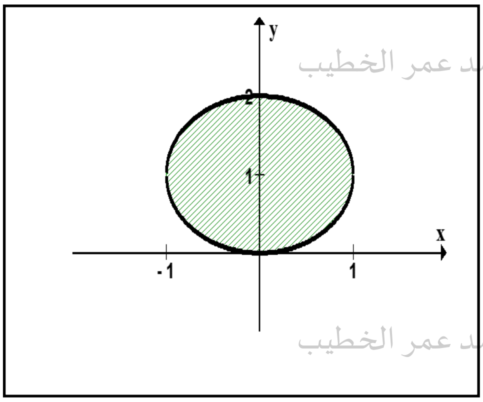
---

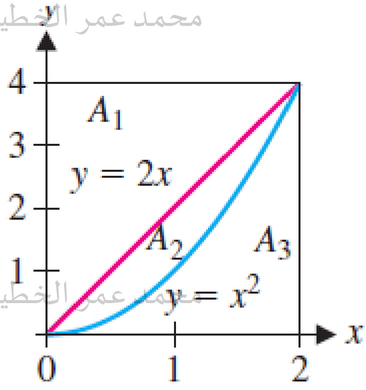
(2) عبر عن المساحة المحصورة بين المعادلتين بتكامل منفرد ثم اوجد المساحة



---

(3) عبر عن المساحة المحصورة داخل الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2=2y$ بتكامل منفرد

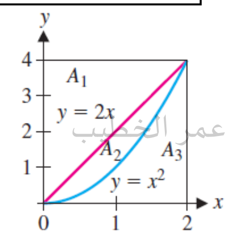
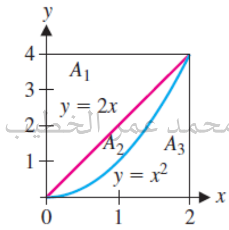
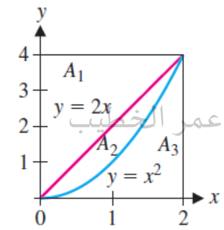
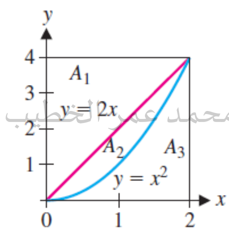
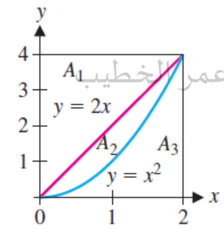
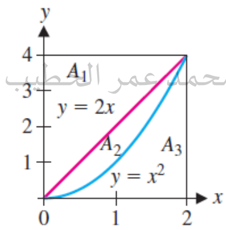
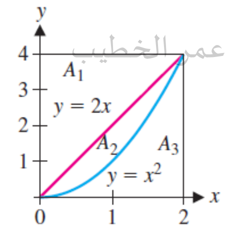
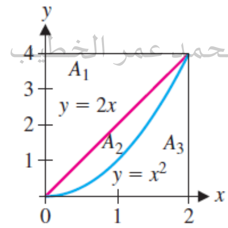
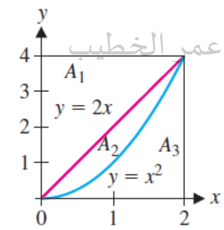
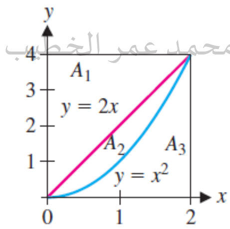




اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن المساحات التالية

بدلالة التكامل الذي يناسبه في كل مما يلي

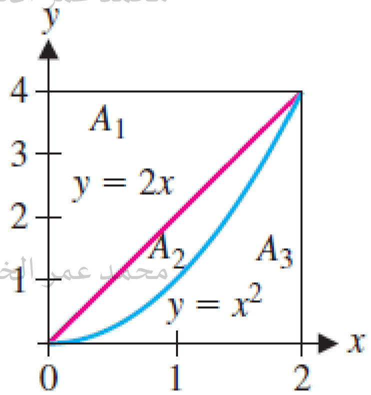
ملاحظة : اكتب التكامل بدلالة dx وبدلالة dy

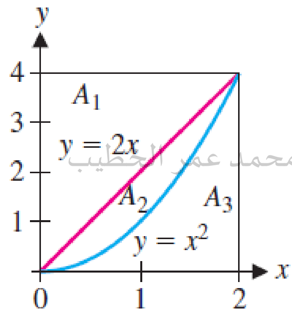
	بدلالة dx	بدلالة dy
(1) A_3		
(2) A_2		
(3) A_1		
(4) $A_2 + A_3$		
(5) $A_1 + A_2$		

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن كل من التكاملات التالية

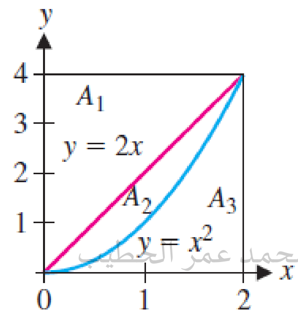
بدلالة A_3, A_2, A_1 في كل مما يلي:

ثم اكتب التكامل بدلالة المكامل الآخر

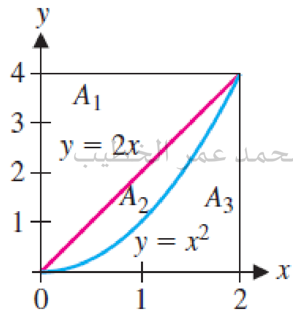




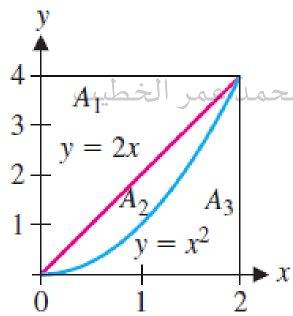
(1) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$



(2) $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



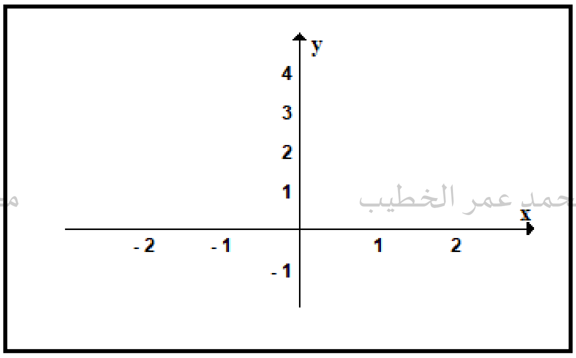
(3) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$



(4) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ و المستقيم $y = 2 - x$

الرسم ...أولاً



ملاحظة : يفضل إيجاد نقاط التقاطع قبل الرسم

نجد نقاط التقاطع من الآله الحاسبة بالخطوات التالية

ادخل المعادلة على الآله الحاسبة

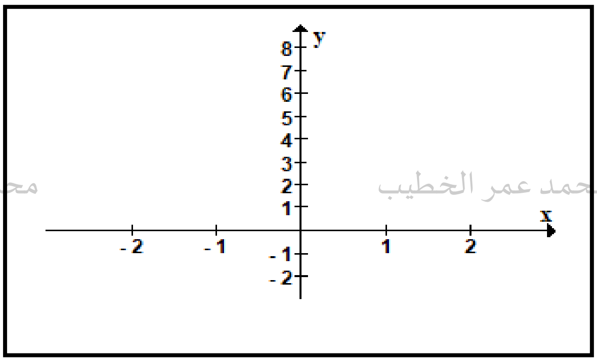
(1) اعمل shift solve للحصول على الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل shift solve

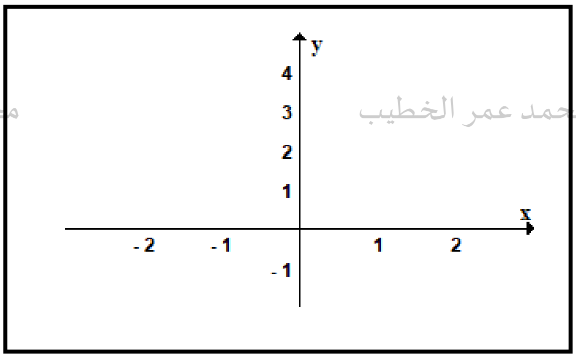
واضغط على الرقم 1 او الرقم 1- او الرقم 2

وهكذا ......

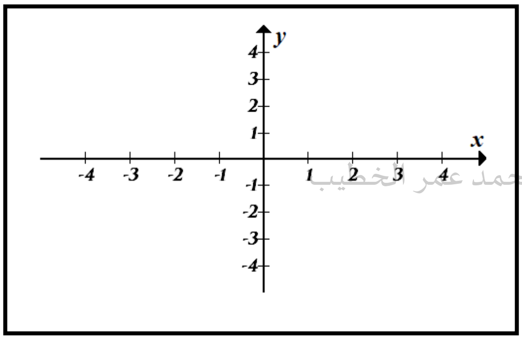
(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = 7 - x^2$



(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = \frac{1}{2}x^2$

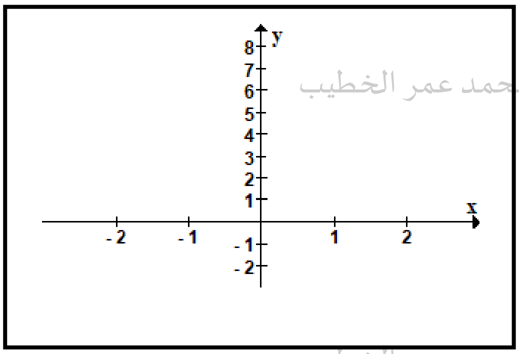


(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $x = y^2$



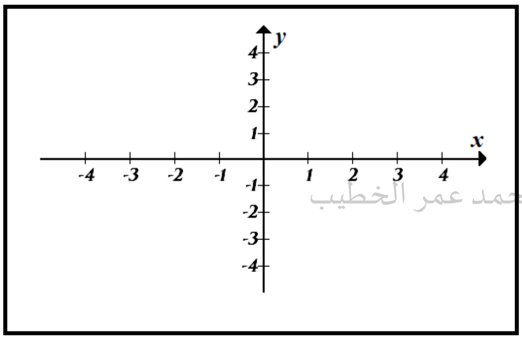
---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = 3x + 2$ و $y = x^3$

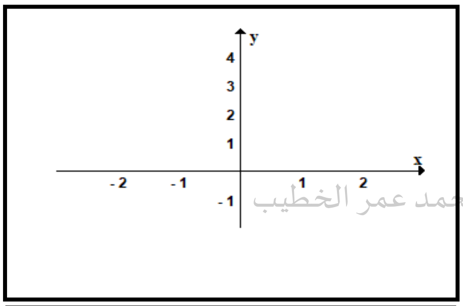


---

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \dfrac{3}{x}$ و المستقيمين $y = x - 2$ ، $x = 1$



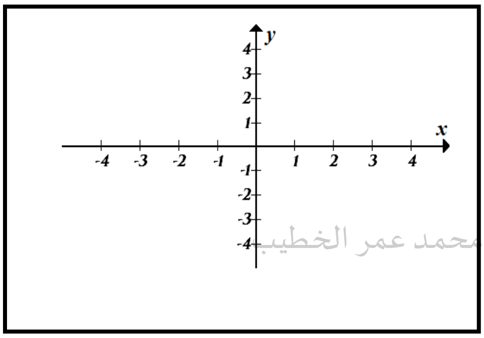
(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=e^{-x}$ على الفترة $[-1,0]$



اوجد نقاط التقاطع بين الدالتين

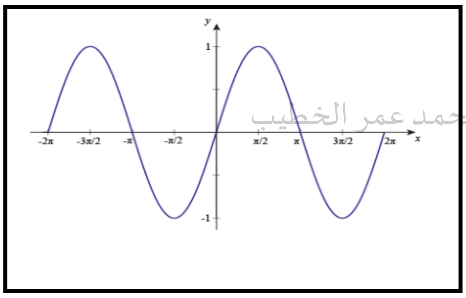
---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ على $[0,2]$

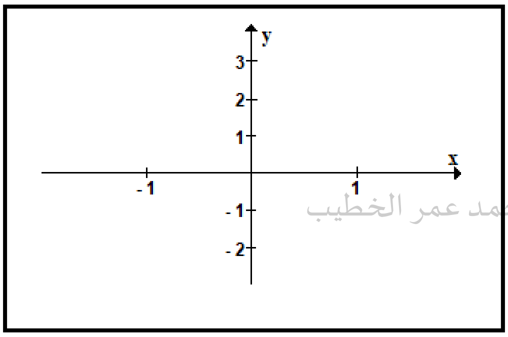


---

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=\sin x$ و $y=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$

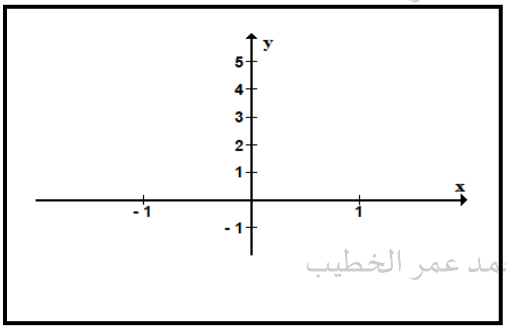


(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos \pi x$ و $y = x^2 + 1$ حيث $0 \le x \le 1$



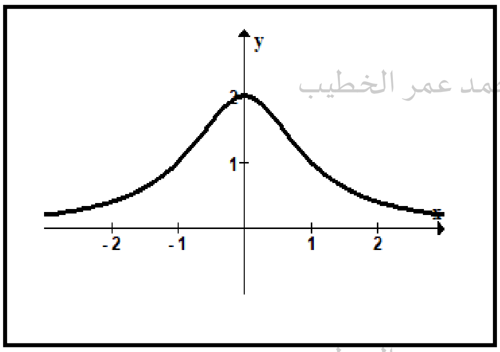
---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$ و $y = 4e^{-x}$ و $x = 0$

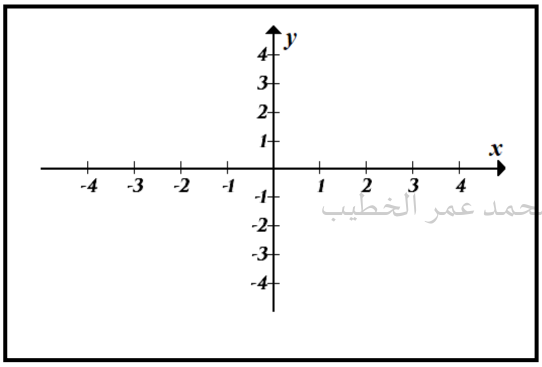


---

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$ و $y = |x|$

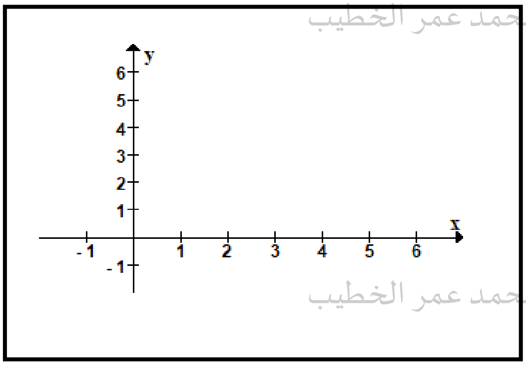


(1) ارسم المستقيمات $y = 4 - x$ و $y = x$ و $y = 0$ ثم اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة



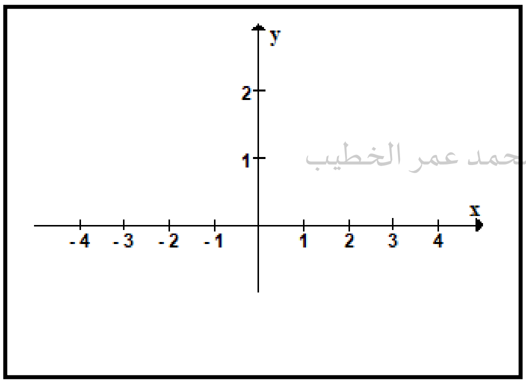
---

(2) ارسم المستقيمات $y = x$ ، $y = 6 - x$ ، $y = 2$ و $y = 0$ ثم اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

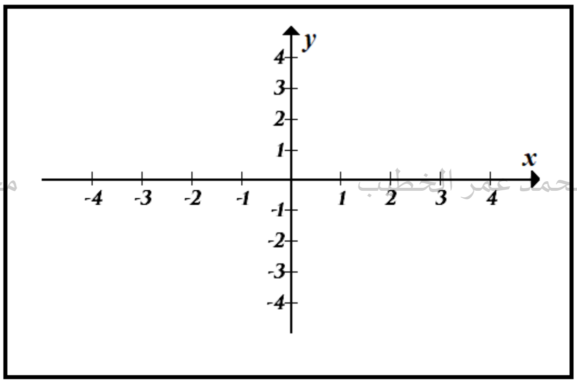


---

(3) ارسم الدوال $y = \sqrt{x}$ و $y = -x$ و $y = 2$ ثم اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة

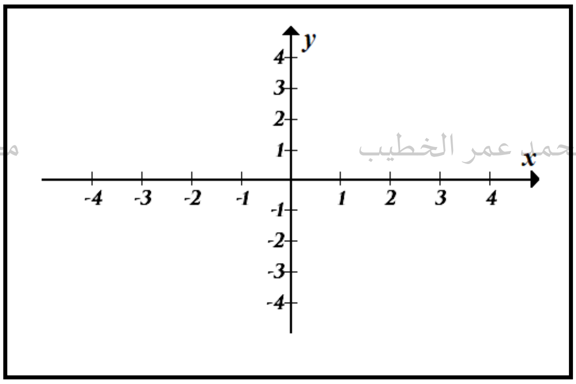


(1) اكتب تكامل <u>منفرد</u> يعبر عن المساحة المحصورة بين $x > 0, x = 0, y = 3 - x^2, y = 2x$



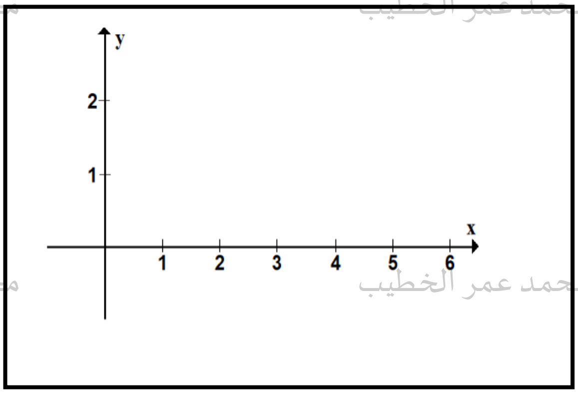
---

(2) ارسم المعادلات $x = y^2$ ، $x = 4$ ثم أوجد المساحة المحصورة



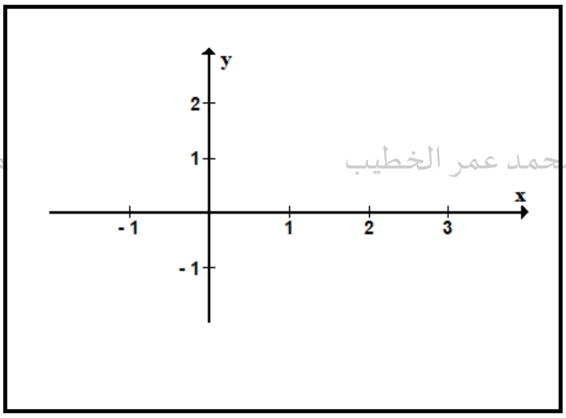
---

(3) ارسم المعادلات $x = 3y$ ، $x = y^2 + 2$ ثم اوجد المساحة المحصورة



(1) ارسم المعادلات $x = 2y$ ، $x = 3 - y^2$ ثم اوجد المساحة المحصورة

(2) ارسم الدالة $y = \ln x$ ثم اوجد المساحة المحصورة بين الدالة و المحور $y = 0$ والمستقيم $x = e$



هذه خطوات مقترحة لإيجاد المساحة بدون رسم... مع العلم ان الرسم هو افضل

يمكن إيجاد المساحة بين دالتين متصلتين $f(x)$ و $g(x)$ بدون خطوة الرسم

(1) نجد نقاط التقاطع بين المنحنين وذلك بجعل $f(x)=g(x)$

عدد نقاط التقاطع 2

ولتكن x_1 , x_2

لا يوجد تجزئة مساحة

نجد نقاط التقاطع من الآله الحاسبة بالخطوات التالية

ادخل المعادلة على الآله الحاسبة

(1) اعمل shift solve للحصول على الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل shift solve

واضغط على الرقم 1 او الرقم −1 او الرقم 2

عدد نقاط التقاطع 3

ولتكن x_1 , x_2 , x_3

يوجد تجزئة مساحة

(2) تحديد الدالة الأعلى

نختار عدد بين x_1 , x_2

ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة الأعلى تقابل القيمة الأكبر

نختار عدد بين x_1 , x_2

ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة الأعلى تقابل القيمة الأكبر

ونختار عدد بين x_2 , x_3 ونكرر العملية السابقة

(3) المساحة

$$A=\int_{x_1}^{x_2}\left[\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأسفل}\right] dx$$

,

$$A=\int_{x_1}^{x_2}[\quad]\,dx+\int_{x_2}^{x_3}[\quad]\,dx$$

ملاحظة: يمكن تجاوز الخطوة الثانية وتجاهل الدالة الأعلى والأسفل فتكون المساحة

$$A=\int_{x_1}^{x_2}\left| f(x)-g(x)\right| dx$$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = x + 2$ و $y = x^2$

---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة تحت المنحنى $y = 4 - x^2$ وفوق محور x

---

(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$, $y = \sin x$

---

(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 1 - x^2$, $y = e^x$

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = 2 + x$, $y = x^4$

---

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم $y = x$ و والمنحنى $y = x^3$

---

(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = x$, $y = \frac{5x}{x^2 + 1}$

---

(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x = y$, $x = 2 - y^2$

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$, $y = x^3$ على الفترة $1 \le x \le 3$

---

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 + 2$, $y = \cos x$ على الفترة $0 \le x \le 2$

---

(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $y = 2x$, $y = 3 - x^2$ على الفترة $0 \le x \le 2$

---

(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos x$, $y = \sin x$ حيث $0 \le x \le 2\pi$

(1) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = mx$ هي $\frac{4}{3}$ وحدة مساحة،

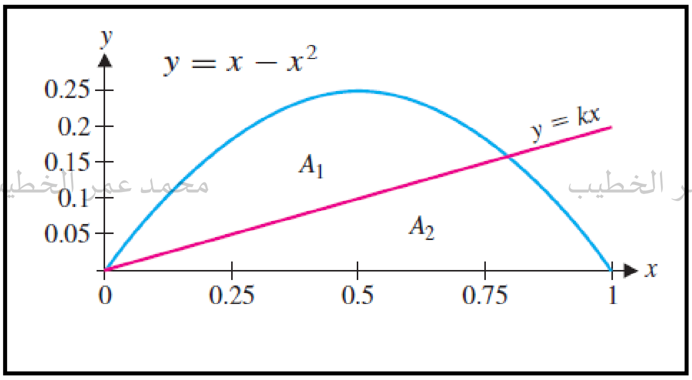
فأوجد قيمة الثابت m حيث $0 < m$

---

(2) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = a^2$ هي 36 وحدة مساحة،

فاوجد قيمة الثابت a حيث $0 < a$

في الشكل المجاور اذا كانت المساحة A_1 تساوي المساحة A_2 حيث $y = x - x^2$ و $y = kx$



(أ) اوجد قيمة A_1

(ب) اوجد قيمة k

إذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة ما هو $B(t) = 2e^{0.04t}$ مليون شخص ومعدل عدد الوفيات

في نفس المدينة هو $D(t) = 3e^{0.02t}$ مليون شخص حيث t بالسنوات

(أ) أوجد متى يتزايد و ومتى يتناقص عدد سكان المدينة في الفترة الزمنية $[0,30]$

عدد السكان $\mathrm{P}(t)$

معدل التغير في عدد السكان

$P'(t) = B(t) - D(t)$

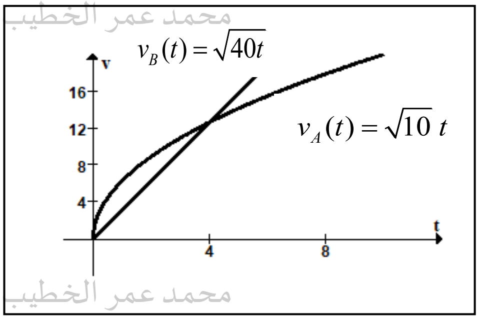
(ب) أوجد تكامل $P'(t)$ على الفترة $[0,30]$ وفسر ماذا يعني هذا التكامل

يمثل التكامل صافي التغير

(الزيادة او النقصان) في عدد

السكان خلال 30 سنة

$$\Delta P = \int_0^{30} P'(t)\, dt$$



(1) تمثل الدالة $v_A(t)=\sqrt{10}\ t$ سرعة السيارة A

وتمثل الدالة $v_B(t)=\sqrt{40t}$ سرعة السيارة B بالمتر لكل الثانية

(أ) أوجد المسافة التي تقطعها كل سيارة خلال أول 4 ثواني

وأي السيارتين أسرع خلال أول 4 ثواني

(ب) اكتب التكامل الذي يمثل الفرق بين المسافتين التي قطعتهما السيارتين خلال أول 4 ثواني

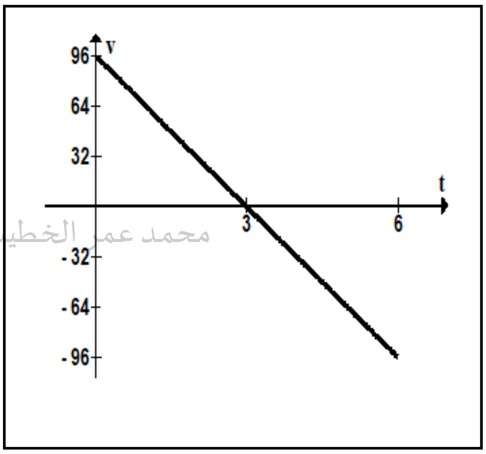
---

(2) يمثل الشكل المجاور العلاقة بين الزمن والسرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم

الإزاحة تساوي التكامل

المسافة تساوي المساحة

(أ) أوجد الإزاحة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني



(ب) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 3 ثواني

(ج) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني

هذا السؤال غير مهم في امتحان الوزارة لانه يعتمد على معلومات كانت محذوفة في الفصل الثاني

الطاقة المفقودة [يعرف تكامل القوة بانه الطاقة (الشغل)]

عند حدوث تصادم بين مضرب التنس والكرة يتغير شكل الكرة ،بحيث تتكمش مسافة x سنتيميتر اولا ،ثم تتمدد ،مما يسبب حركة للكرة ،اذا كانت القوة التي بذلت على الكرة هي $f(x)$ فان القوة اثناء الانكماش تسمى $f_c(x)$ وعند التمدد تسمى $f_e(x)$ ويتم نقل الطاقة الى الكرة اثناء الانكماش وتحركها بعيداً اثناء التمدد وتخسر جزء من طاقتها تسمى الطاقة المفقودة وتساوي

$$\int_0^m \left[f_c(x)-f_e(x)\right]dx$$

حيث m مسافة الانكماش

وتعرف نسبة الطاقة المفقودة للكرة اثناء الاصتدام بـ

$$\frac{\int_0^m \left[f_c(x)-f_e(x)\right]dx}{\int_0^m \left[f_c(x)\right]dx}\times 100\% = 1-\frac{\int_0^m \left[f_e(x)\right]dx}{\int_0^m \left[f_c(x)\right]dx}\times 100\%$$

يمثل الجدول التالي بعض البيانات اثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب

x cm	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ N	0	110	220	400	700
$f_e(x)$ N	0	100	200	300	700

$n=4$

اوجد نسبة الطاقة المفقودة باستخدام طريقة سمبسون

$$S_n f(x)=\frac{b-a}{3n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f_c(x_2)+4f(x_3)+\cdots+f(x_n)\right]$$

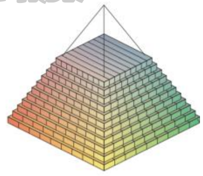
$$S_4 f_c(x)=\frac{1-0}{3(4)}\left[f_c(0)+4f_c(1)+2f_c(0.5+4f_c(0.75)+f_c(1)\right]=265$$

$$S_4 f_e(x)=\frac{1-0}{3(4)}\left[f_e(0)+4f_e(1)+2f_e(0.5)+4f_e(0.75)+f_e(1)\right]=225$$

نسبة الطاقة المفقودة تساوي $(1-\frac{225}{265})\times 100\% = 15\%$ و نسبة الطاقة المحتفظ بها تساوي 85%

الحجوم

المقطعية (التقطيع)



(1) مساحة المقطع $A(x)$ معلوم

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

(2) مساحة المقطع $A(x)$ غير معلوم

لكن المقطع معلوم (مربع ،دائرة،...) ومحدود بدالتين

(أ) مربع ، طول ضلعه

$$s=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=s^2$$

(ب) دائرة ، نصف قطرها

$$r=\frac{f(x)-g(x)}{2}\Longrightarrow A(x)=\pi r^2$$

(ج) مثلث متساوي الاضلاع ،طول ضلعه

$$l=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

(ج) مربعات ،طول قطرها

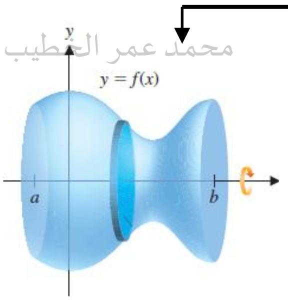
$$d=f(x)-g(x)\Longrightarrow A(x)=\frac{1}{2}d^2$$

(3) مساحة المقطع غير معلوم والمقطع غير معلوم (الهرم)

ملاحظة: عندما يكون المقطع العرضي هو دائرة ....

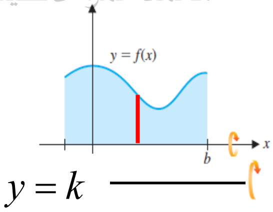
فإن الحجم المقطعي هو نفسه حجم دوراني

الدورانية



الحالة الأولى

المكامل dx



(1) الدوران حول محور x أو $y=0$

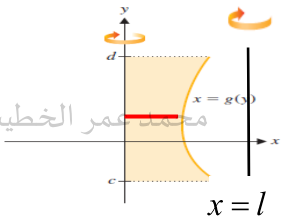
$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dx$	$r_o=f(x)$ $r_i=g(x)$

(2) الدوران حول المحور $y=k$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dx$	$r_o=f(x)-k$ $r_i=g(x)-k$

الحالة الثانية

المكامل dy



(1) الدوران حول محور y أو $x=0$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dy$	$r_o=f(y)$ $r_i=g(y)$

(2) الدوران حول المحور $x=l$

$V=\pi\int_a^b r_o^2-r_i^2\ dy$	$r_o=l-f(y)$ $r_i=l-g(y)$

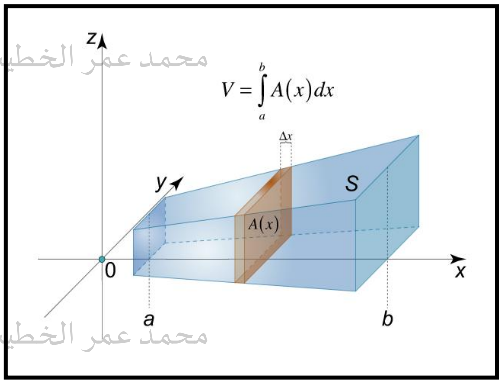
اولاً : الحجوم باستخدام المقاطع العرضية (التقطيع أو الشرائح)

الحالة الأولى : مساحة المقطع معلوم

أذا كانت مساحة المقطع العرضي لمجسم هي $A(x)$

حيث $a \le x \le b$ فان حجم المجسم يعطى بالتكامل

$$v = \int_a^b A(x)\,dx$$



(1) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 4x$ حيث $0 \le x \le 1$

(2) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 10\,e^{0.01x}$ حيث $0 \le x \le 10$

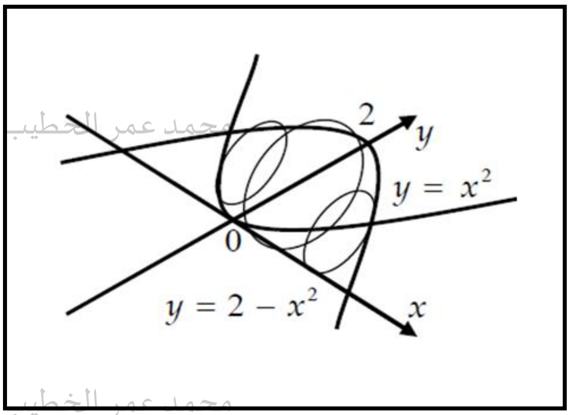
(3) أوجد حجم الهرم الذي مقطعه العرضي مربع مساحته $A(x) = \frac{4}{25}(10-x)^2$ وارتفاعه 10 متر

الحالة الثانية : مساحة المقطع غير معلومة (لكن المقطع معلوم و محدد بدالتين)

أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$

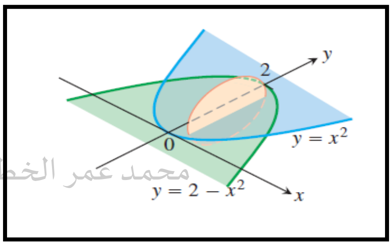
في الحالات التالية:



(أ) المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور x

(ب) المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x^2$ و $y=2-x^2$ ، $-1\le x\le 1$



في الحالات التالية:

(أ) المقاطع عرضية <u>نصف دائرة</u> متعامدة على محور x

(ب) المقاطع عرضية <u>مثلثة متساوية الأضلاع</u> متعامدة على محور x

---

(ج) المقاطع عرضية <u>مربعات اقطارها</u> متعامدة على محور x

(1) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$0 \le x \le \pi \ ، \quad y = 0 \ ، \quad y = 2\sqrt{\sin x}$$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على محور x

---

(2) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$-1 \le x \le 1 \ ، \quad y = \sqrt{1-x^2} \ ، \ و \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على محور x

---

(3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $0 \le x \le \ln 5 \ ، \ y = 0 \ ، \ y = e^{-2x}$

والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

(1) اوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$y = \sec x$ و $y = 0$ ، $0 \le x \le \pi / 4$ ،

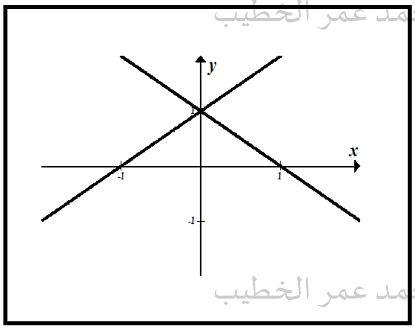
والمقاطع العرضية هي مستطيلات عرضها بين الدالتين وطولها ضعف عرضها متعامدة على محور x

---

(2) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x + 1$ و $y = -x + 1$

ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

يفضل استخدام التماثل

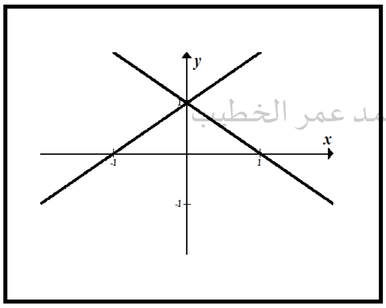


---

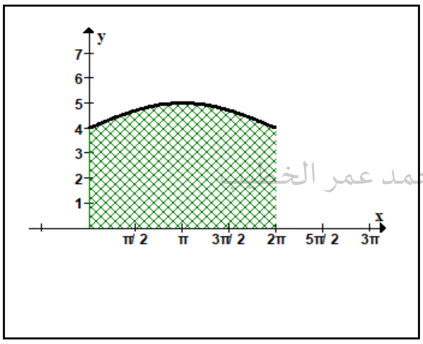
(3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x + 1$ و $y = -x + 1$

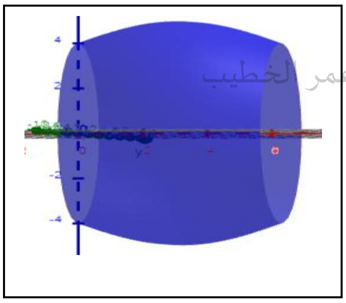
ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور y

لا يجوز استخدام التماثل لان الجزء الايمن يصبح مستطيل



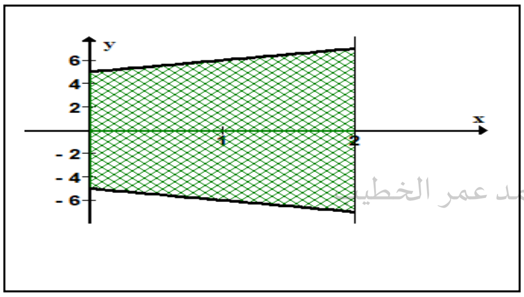
(1) إناء فخاري مقاطعه عرضية دائرية نصف قطرها $4+\sin\dfrac{x}{2}$ ، $0 \le x \le 2\pi$ **أوجد حجم الإناء**

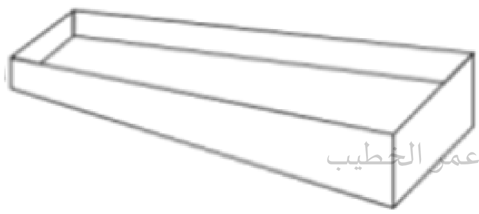




---

(2) اوجد حجم بركة للسباحة تم مشاهدتها من مكان مرتفع، فكانت على شكل إطار محدود بالمعادلتين $y=\pm(x+5)$ **حيث** $0 \le x \le 2$ **وعمقها معطى بالدالة** $x+4$



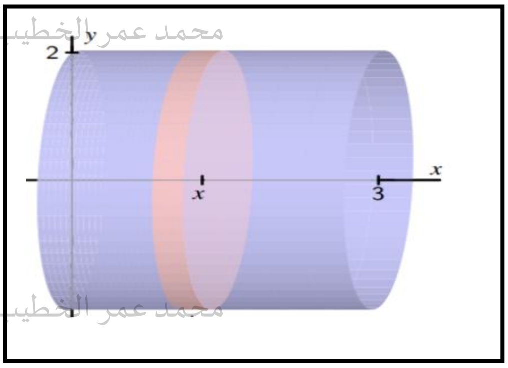


الحالة الثالثة : مساحة المقطع غير معلومة و المقطع غير معلوم

ملاحظة مهمة : يجب أن تكون المقاطع $A(x)$ متشابهة (وممكن أن تكون متطابقة ولكن ليس شرط) في اتجاه واحد (ويكون هو المكامل)

(1) الشكل المجاور يمثل اسطوانة نصف قطرها 2 وارتفاعها 3

اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم

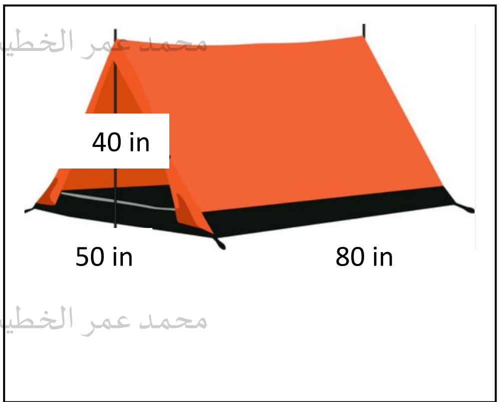


مساحة المقطع ثابت... وهو دائرة

---

(2) الشكل المجاور يمثل خيمة على شكل منشور،

اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم

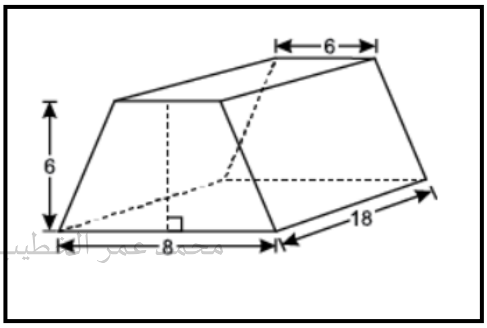


مساحة المقطع ثابت... وهو مثلث

---

(3) الشكل المجاور يمثل بيت على شكل منشور ،

اكتب التكامل الذي يمثل حجمه ثم جد قيمة الحجم



مساحة المقطع ..ثابت وهو شبه منحرف

أوجد حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته 180 متر وارتفاعه 100 متر

باستخدام التكامل

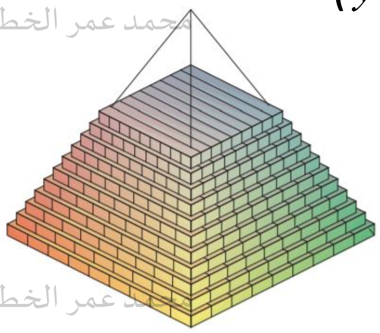
ملاحظة :إذا كان السؤال اختيار من متعدد نستخدم قانون حجم الهرم: وهو ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

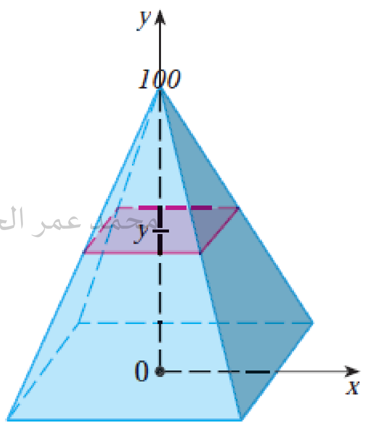
يمكن استخدام القانون $V=\int_0^H (B-\frac{B}{H}x)^2\,dx$ حيث $H=100$ ارتفاع الهرم و $B=180$ طول قاعدة الهرم

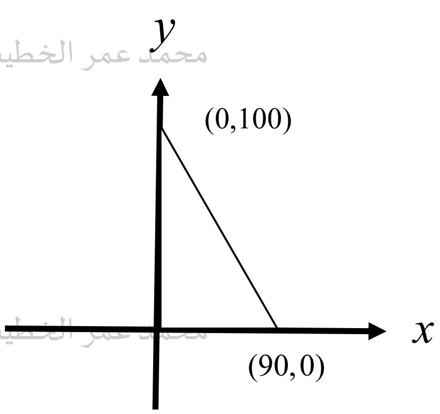
ملاحظة: يتشكل الهرم من تجميع مقاطع عرضية وهي مربعات (متعامدة على محور y)

في اتجاة المحور y لذلك يجب أن يكون المكامل dy

ومساحة المقطع بدلالة y ونجد مساحة المربع عند اي ارتفاع بدلالة y



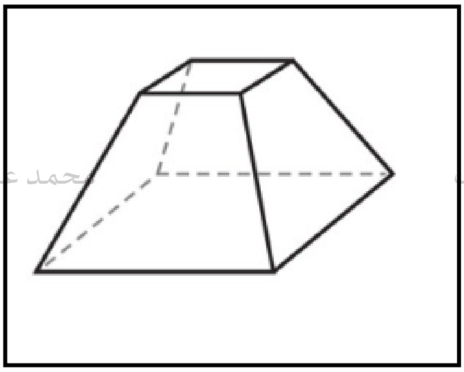


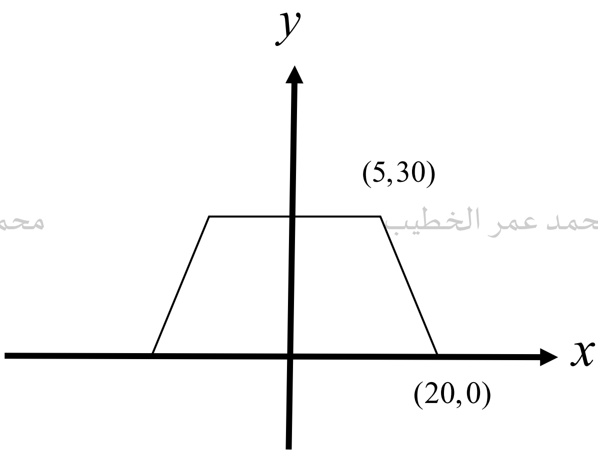


(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته 30 متر وارتفاعه 10 متر

---

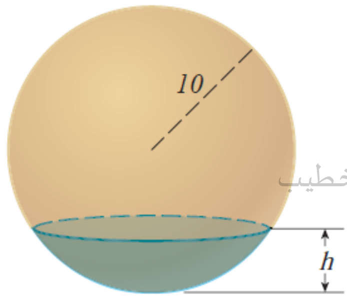
(2) أوجد حجم الهرم الناقص الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته السفلية 40 متر، وقاعدته من الأعلى مربعة الشكل وطول ضلعها 10 متر وارتفاعه 30 متر





(1) أثبت أن حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره $10m$ وارتفاعه الماء h يعطى بالعلاقة

$$v(h) = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$



من فيثاغورس

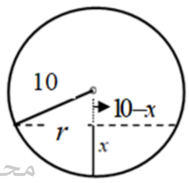
نجد العلاقة بين r و x

$$r^2 + (10-x)^2 = 100$$

$$r^2 + 100 - 20x + x^2 = 100$$

$$r^2 = 20x - x^2$$

عمق الماء في اي لحظه هو x



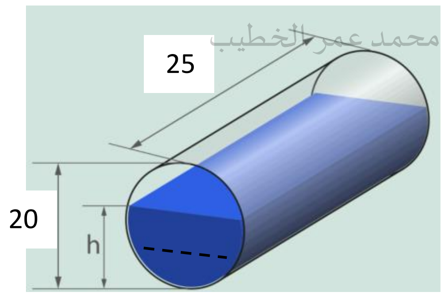
هذه العلاقة صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها R

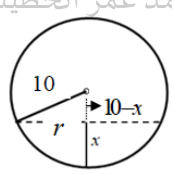
$$r^2 = 2Rx - x^2$$

يفضل حفظها

---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الماء في الخزان الاسطواني القائم كما في الشكل المجاور الذي نصف قطرها $10m$ وارتفاعها $25m$ وارتفاع الماء h

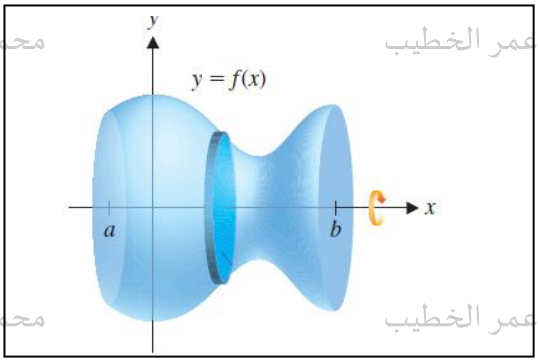


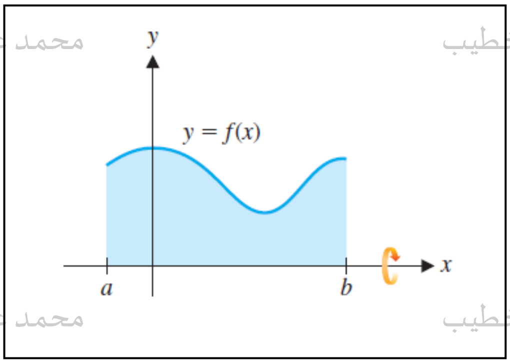


$$r^2 = 2Rx - x^2$$

ثانياً : الحجوم الدورانية : الأقراص و الحلقات

الحجوم الدورانية (الأقراص والحلقات)

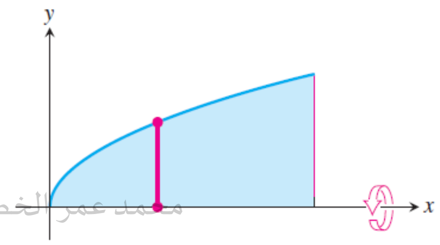




ملاحظات:

الشريحة عمودية على محور الدوران

(1) طريقة إيجاد الحجم باستخدام الأقراص هي نفس طريقة إيجاد الحجم بطريقة الحلقات

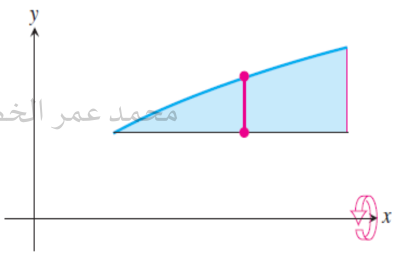


(2) عندما يكون حجم المجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R

المحصورة بدالة مع أحد المحاور

(لا يوجد فراغ بين المساحة ومحور الدوران)

فإننا نستخدم <u>الأقراص</u>



(3) عندما يكون حجم المجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R

المحصورة بدالة او دالتين وليست مع محور الدوران

(يوجد فراغ بين المساحة ومحور الدوران)

فإننا نستخدم <u>الحلقات</u> .

(4) إذا كان الدوران حول محور السينات او مستقيم يوازيه فإن المكامل (dx)

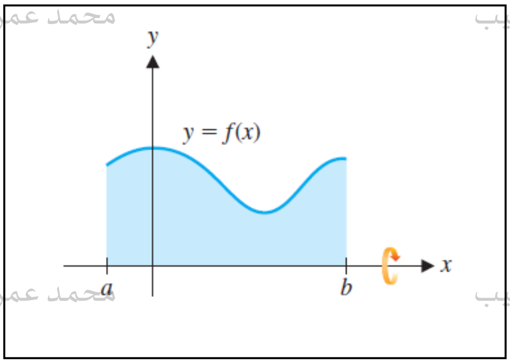
(5) إذا كان الدوران حول محور الصادات او مستقيم يوازيه فإن المكامل (dy)

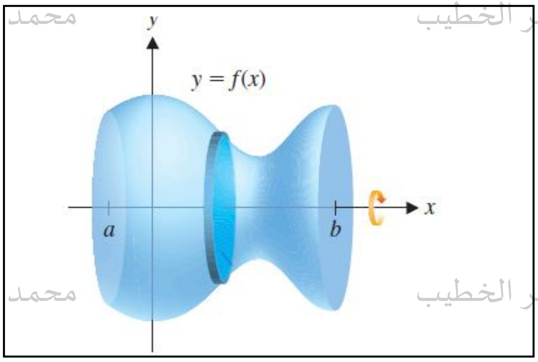
(6) إذا كانت الطريقة محددة وهي (أقراص /حلقات) ومحور الدوران محدد فان الشريحة (الارتفاع)

يجب أن يتم اختيارها بحيث تعامد محور الدوران

الحالة الأولى: الدوران حول محور السينات (x)

إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور السينات والمستقمين $x = a, x = b$ حول محور السينات (x) يعطى بالتكامل



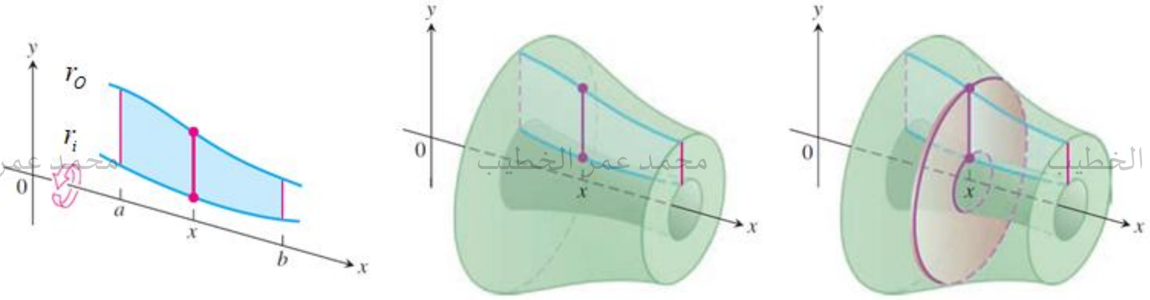


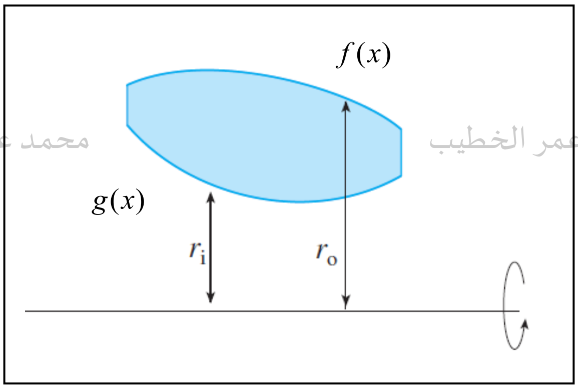
$$v = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

الحجم بطريقة الحلقات (المجسمات المجوفة)

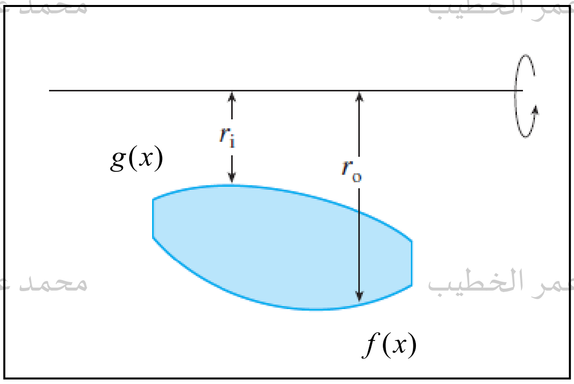
إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين $f(x), g(x)$ حيث $f(x) \geq g(x)$ والمستقمين $x = a \,, x = b$ حول محور x يعطى بالتكامل

$$v = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \, dx$$





$$v = \pi \int_a^b (r_O{}^2 - r_I{}^2)\, dx$$



حيث

r_O نصف قطر الدوران الخارجي (بعد الدالة الخارجية عن محور الدوران)

و

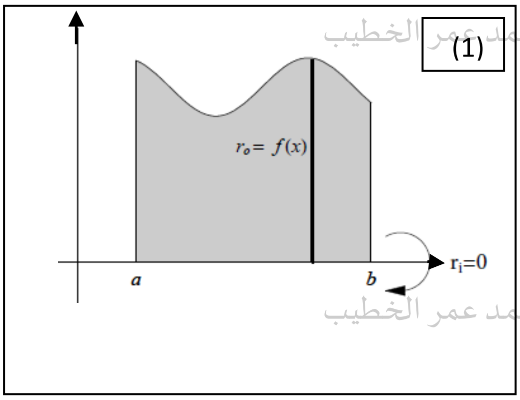
r_I نصف قطر الدوران الداخلي (بعد الدالة الداخلية عن محور الدوران)

ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل للشكل، فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dx

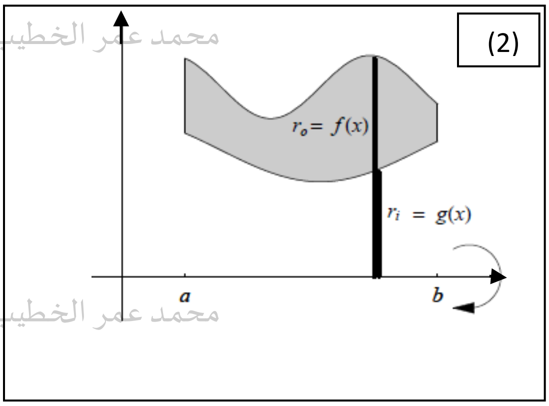
هذه الحالات ليست حفظ

$$v = \pi \int_a^b r_o^{\,2} - r_i^{\,2} \quad dx$$

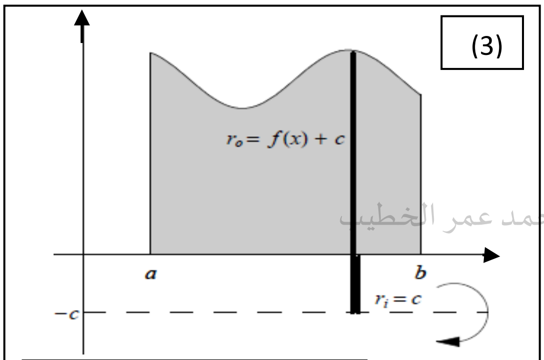


الدالة الأعلى	$y = f(x)$
الدالة الادنى	$y = 0$
محور الدوران	$y = 0$

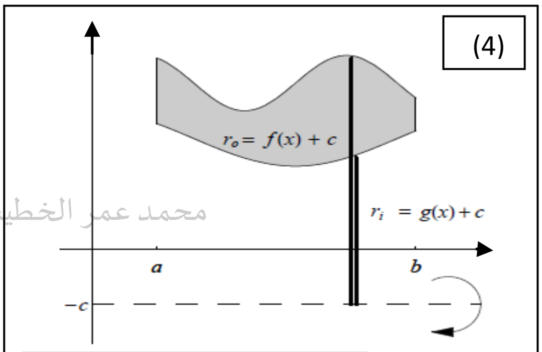
$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ y = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = f(x) - 0 \\ r_i = \ 0 \ - \ 0 \end{cases}$$



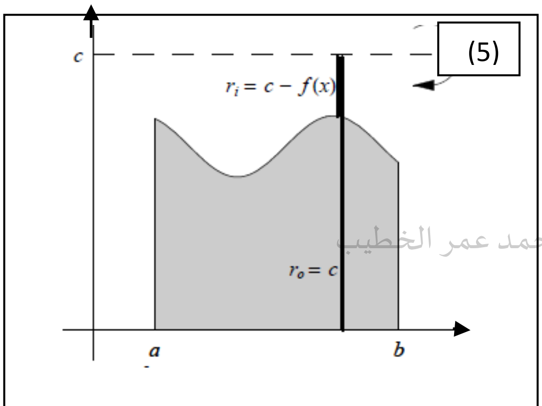
$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = f(x) - 0 \\ r_i = g(x) - 0 \end{cases}$$



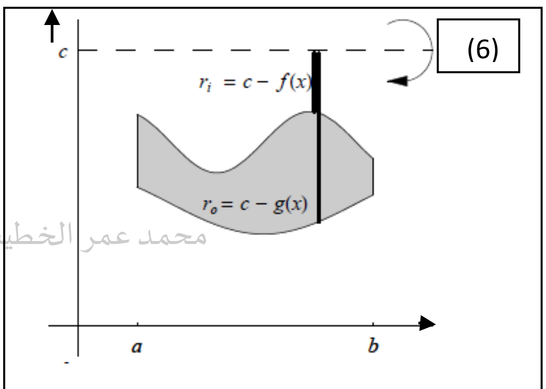
$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ y = 0 \\ y = -c \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = f(x) - (-c) \\ r_i = 0 - (-c) \end{cases}$$



$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = -c \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = f(x) - (-c) \\ r_i = g(x) - (-c) \end{cases}$$

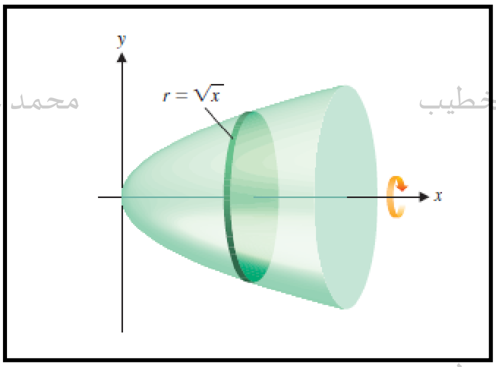


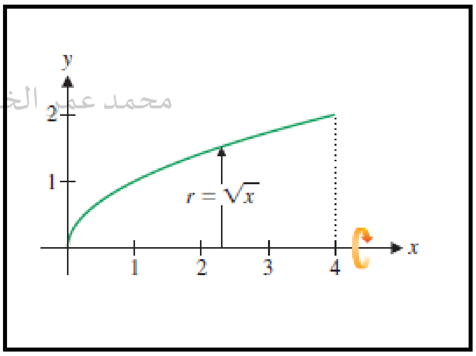
$$\left.\begin{matrix} y = c \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = c - 0 \\ r_i = c - f(x) \end{cases}$$



$$\left.\begin{matrix} y = c \\ y = f(x) \\ y = g(x) \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} r_o = c - g(x) \\ r_i = c - f(x) \end{cases}$$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[0,4]$ حول محور x بطريقة <u>الأقراص</u>

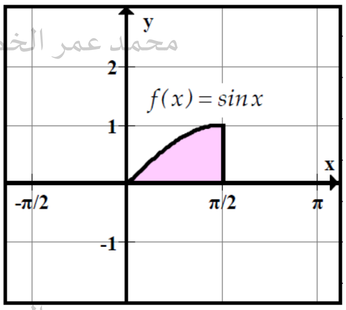




ملاحظة مهمة... قبل البدأ بالحل: لاحظ أن الطريقة محددة وهي اقراص /حلقات، ومحور الدوران محدد وهو(x) فإن الشريحة يجب أن يتم اختيارها بحيث <u>تعامد</u> محور الدوران فيكون (dx) وهو المكامل

---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $f(x)=\sin x$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x بطريقة <u>الأقراص</u>

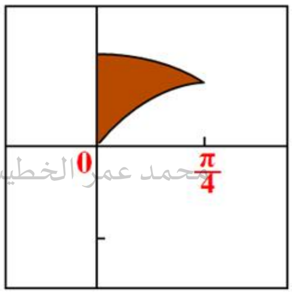


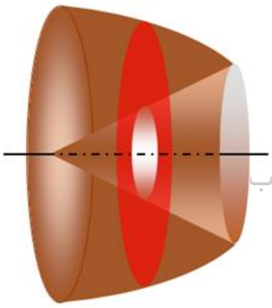
(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالتين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ والمستقيم $x = 0$

على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ حول محور x

بطريقة الحلقات





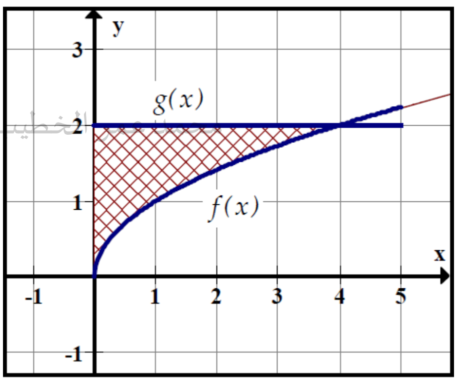
---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالتين $y = \sqrt{x}$ و والمستقيم $y = 2$

والمستقيم $x = 0$

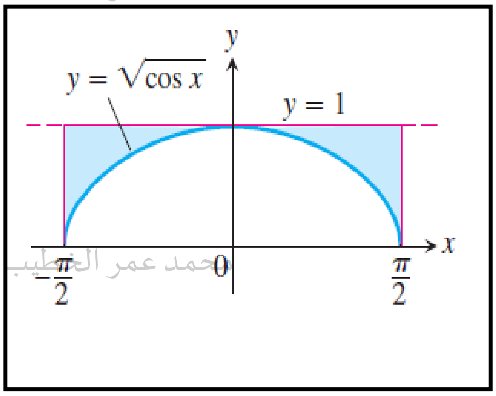
حول محور x بطريقة الحلقات



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y=1$

على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x بطريقة الحلقات

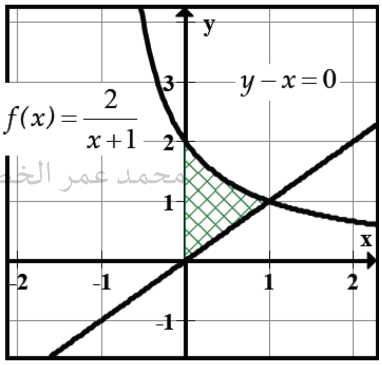


---

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالة $y=\frac{2}{x+1}$ والمستقيم $y=x$

والمستقيم $x=0$ حول محور x بطريقة الحلقات



الحالة الثانية: الدوران حول محور الصادات (y)

أن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $g(y)\geq 0$ ومحور y والمستقمين $y=c, y=d$ حول محور y يعطى بالتكامل

$$v=\int_c^d A(y)\,dx=$$

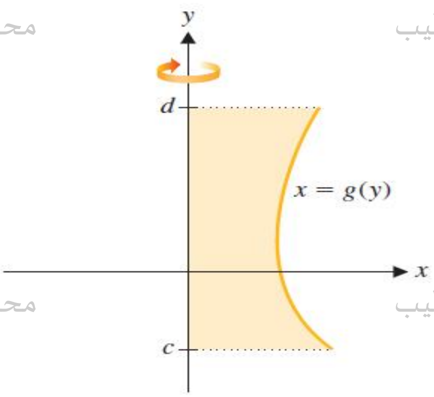
$$=\int_c^d \pi r^2\,dx$$

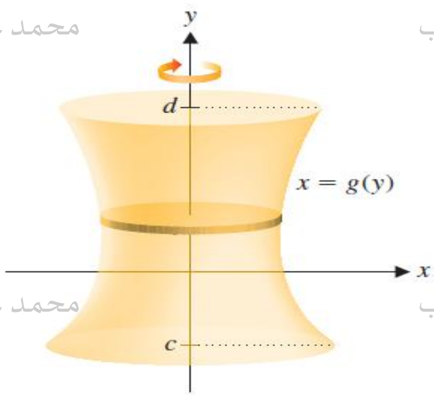
$$=\pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy$$

مساحة القرص الدائري

$$A=\pi r^2=\pi x^2=\pi[g(y)]^2$$

سمك القرص الدائري dy



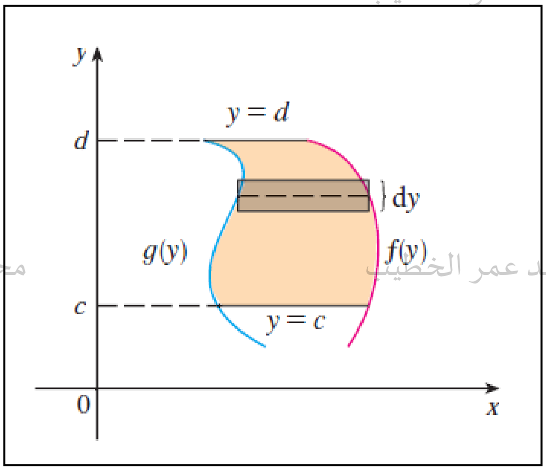


إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بمنحنى الدالتين $g(y)$ و $f(y)$ حيث $f(y)\geq g(y)$ والمستقمين $y=c, y=d$ حول محور y هو

$$v=\int_c^d A(y)\;dy$$

$$=\pi\int_c^d r_o^2-r_i^2\,dy$$

$$=\pi\int_c^d [f(y)]^2-[g(y)]^2\,dy$$

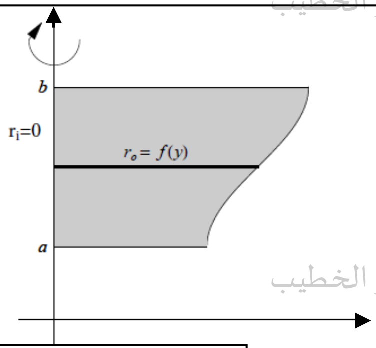


حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dy

هذه الحالات ليست حفظ

$$v = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 \quad dy$$

(1)

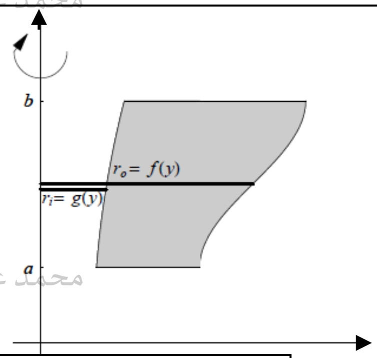


$x=0 \qquad x=0 \qquad x=f(y)$

$r_o = f(y) - 0$

$r_i = 0 - 0$

(2)

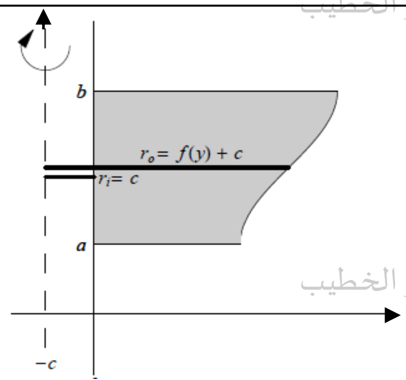


$x=0 \qquad x=g(y) \qquad x=f(y)$

$r_o = f(y) - 0$

$r_i = g(y) - 0$

(3)

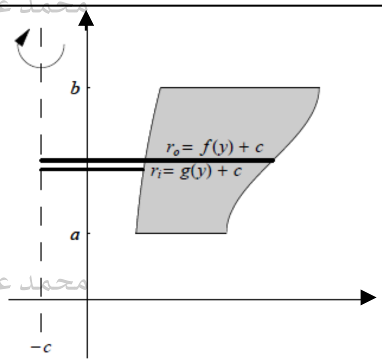


$x=-c \qquad x=0 \qquad x=f(y)$

$r_o = f(y) - (-c)$

$r_i = 0 - (-c)$

(4)

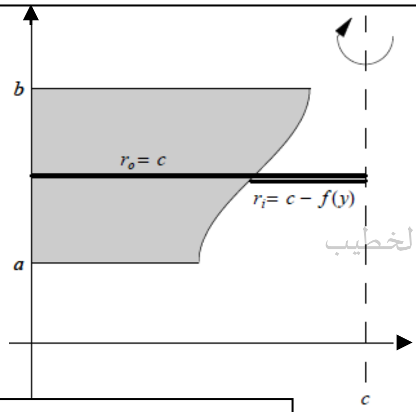


$x=-c \qquad x=g(y) \qquad x=f(y)$

$r_o = f(y) - (-c)$

$r_i = g(y) - (-c)$

(5)

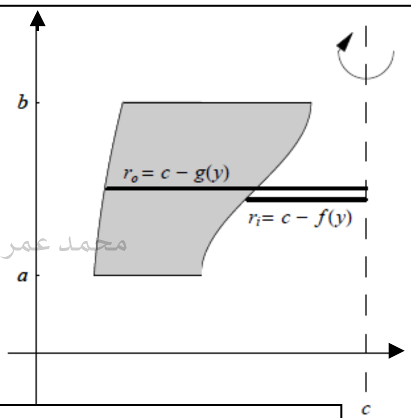


$x=0 \qquad x=f(y) \qquad x=c$

$r_o = c - 0$

$r_i = c - f(y)$

(6)



$x=g(y) \qquad x=f(y) \qquad x=c$

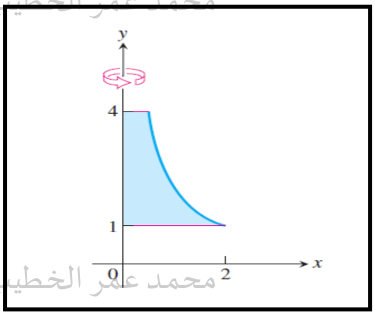
$r_o = c - g(y)$

$r_i = c - f(y)$

(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$x = \frac{2}{y}$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $y = 4$ ومحور y

حول محور y بطريقة **الأقراص**

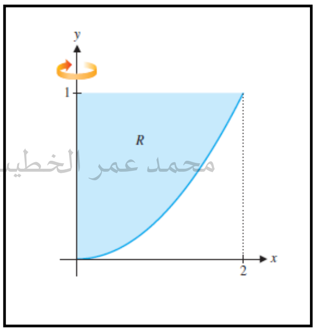


---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ و المستقيم $x = 0$

حول محور y بطريقة **الأقراص**

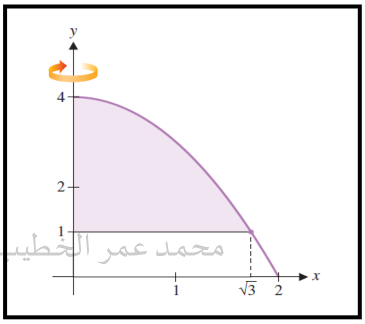


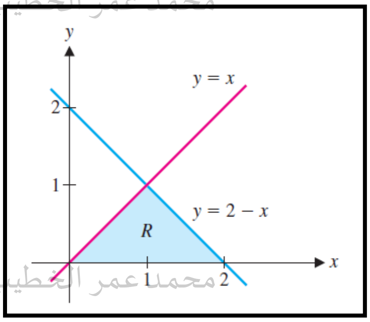
---

(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمنحنى $y = 4 - x^2$ والمستقيم $x = 0$ والمستقيم و $y = 1$

حول محور y بطريقة **الأقراص**





(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

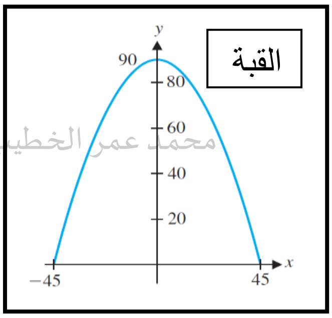
بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور y

بطريقة الحلقات

---

(2) إذا كان شكل القبة يتكون من تدويرالمساحة المحصورة بالمنحنى $y=-\frac{2}{45}x^2+90$

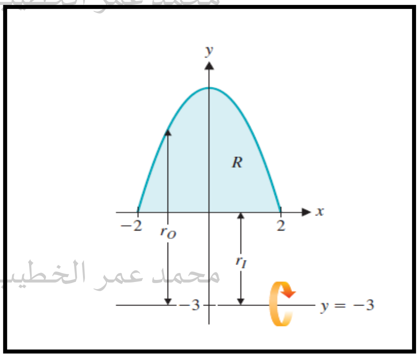
ومحور السينات حول محور y ، أوجد حجم هذه القبة بطريقة الأقراص



ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل

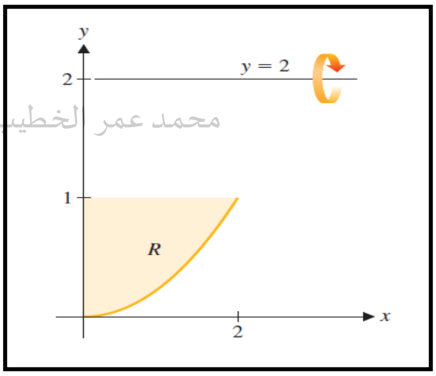
للشكل فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

الحالة الثالثة: الدوران حول مستقيم أفقي أو رأسي



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $y = -3$ بطريقة الحلقات



(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

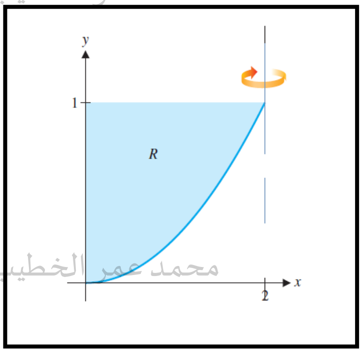
بالمنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ و محور y

حول المستقيم $y = 2$ بطريقة الحلقات

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=1$ ومحور y

حول المستقيم $x=2$ بطريقة **<u>الحلقات</u>**

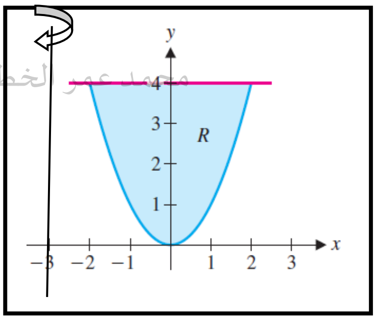


---

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالمنحنى $y=x^2$ المستقيم $y=4$

حول المستقيم $x=-3$ بطريقة **<u>الحلقات</u>**

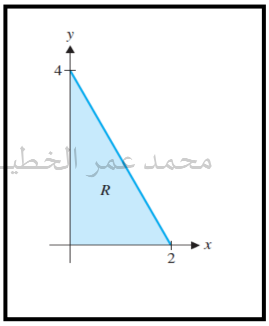


تمارين متنوعة

اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

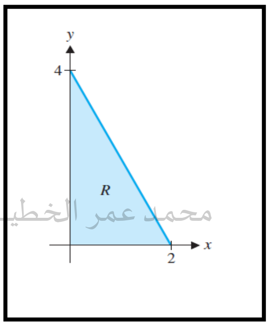
المحصورة بالمستقيم $y = 4 - 2x$ والمحورين

(1) حول محور x



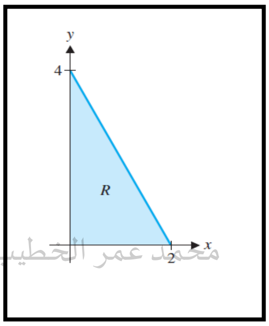
---

(2) حول محور y



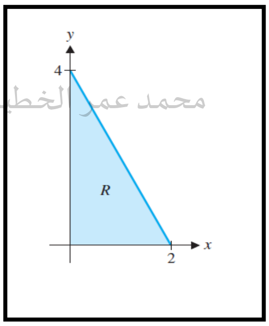
---

(3) حول المستقيم $y = 4$



---

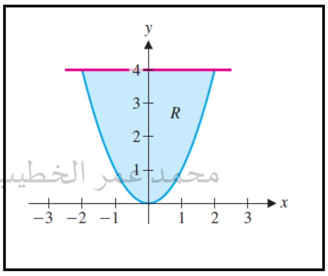
(4) حول لمستقيم $x = -2$



اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

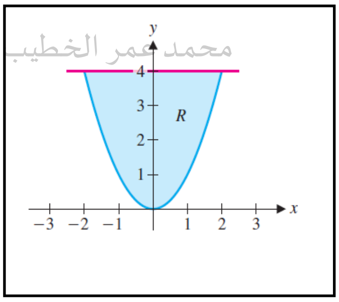
المحصورة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$

(1) حول محور x



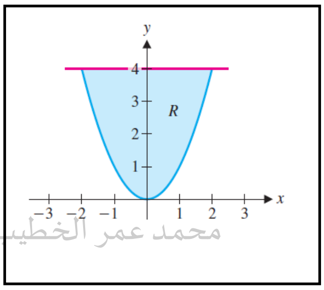
---

(2) حول محور $y = 4$



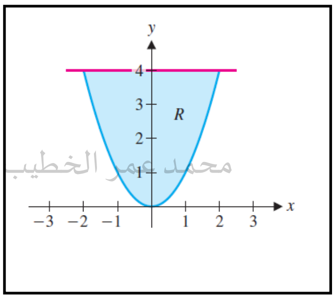
---

(3) حول محور $y = -2$



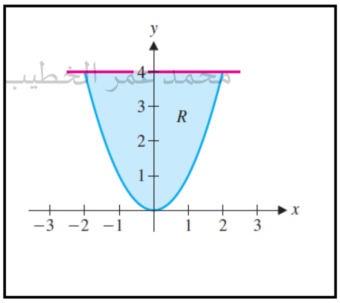
---

(4) حول محور y



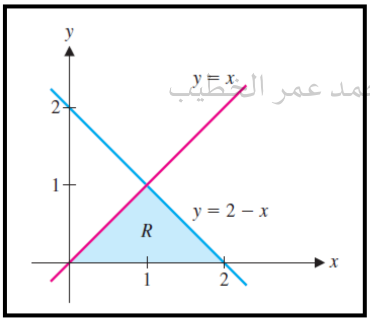
---

(5) حول محور $x = -4$

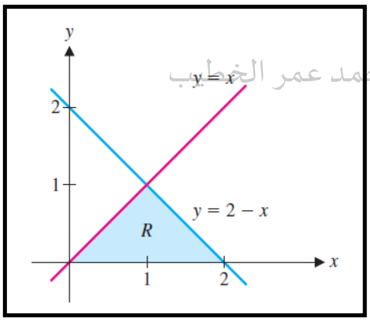


اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R

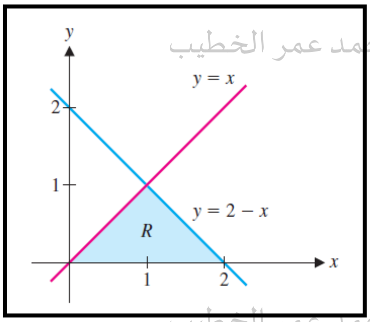
(1) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور y



(2) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور $x=3$

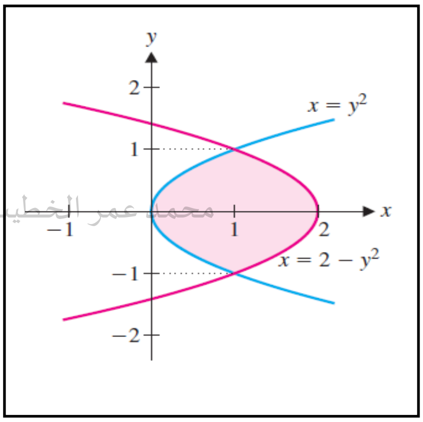


(3) المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ والمستقيم $y=x$ و $y=0$ حول المحور x



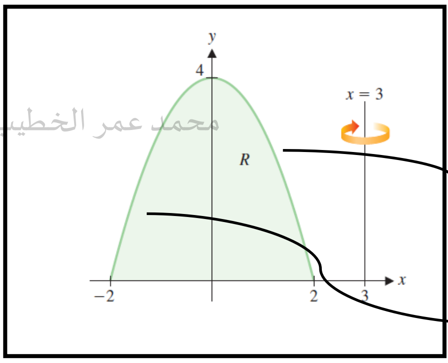
(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة R

حول محور y ($x=0$)



(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y=4-x^2$ ومحور x حول المستقيم $x=3$ بطريقة الحلقات

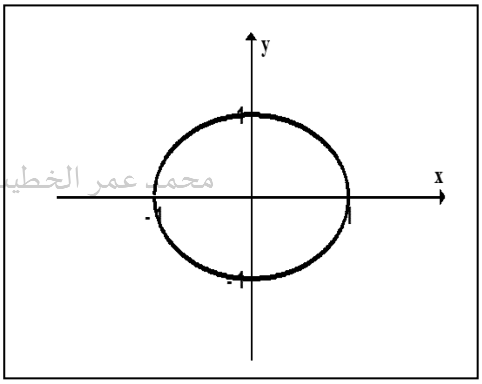


$x=\sqrt{4-y}$

$x=-\sqrt{4-y}$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2 + y^2 = 1$

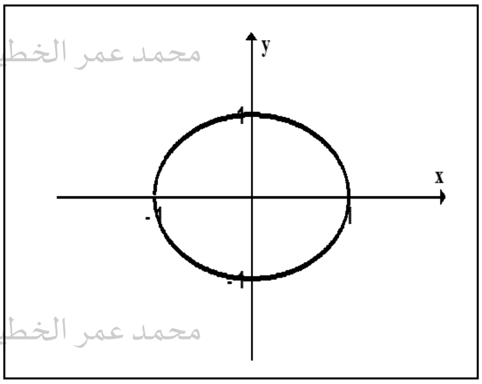
حول المستقيم y



---

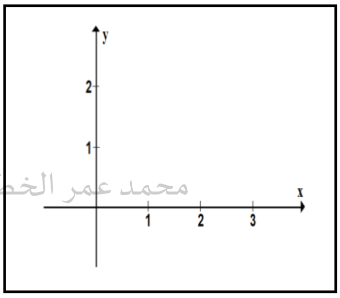
(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2 + y^2 = 1$

حول المستقيم $y = 2$



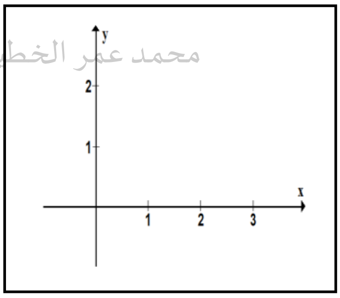
اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمستقيم $y=2-x$ و $y=0$ و $x=0$

(1) حول محور x



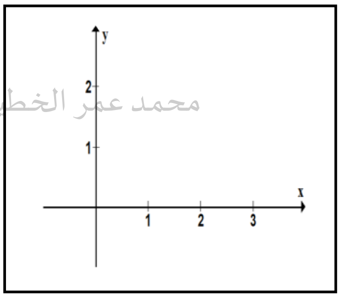
---

(2) حول محور y



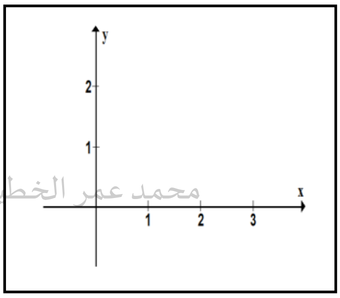
---

(3) حول المستقيم $y=3$



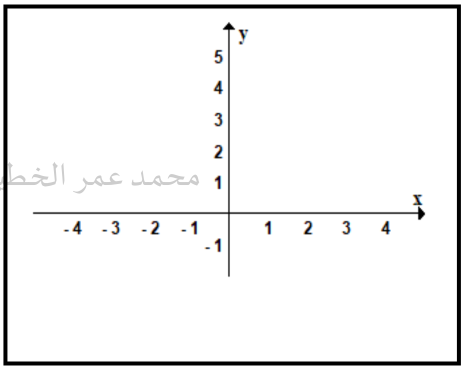
---

(4) حول المستقيم $x=3$

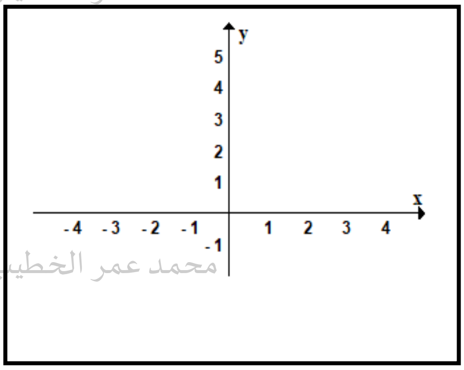


أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 0$ و $x = 2$

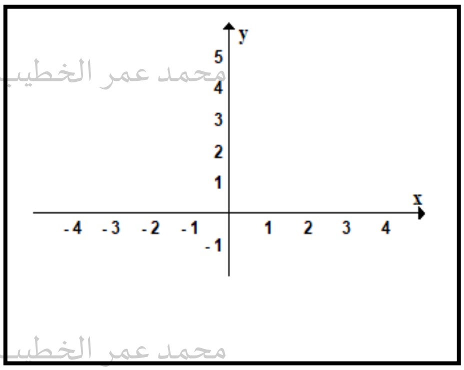
(1) حول محور x



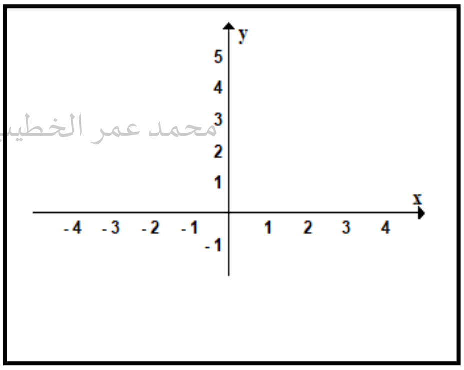
(2) حول محور y



(3) حول المستقيم $y = 4$

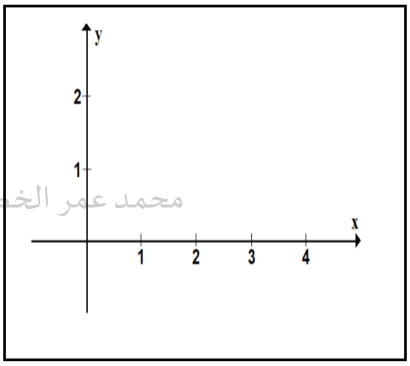


(4) حول المستقيم $x = 2$



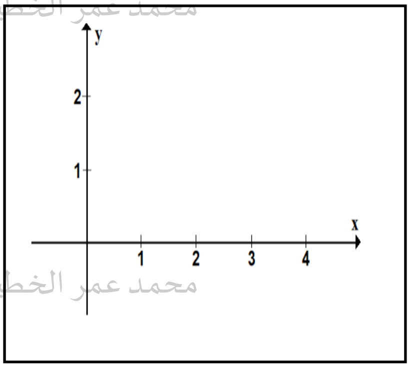
اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ و $y=2$ و $x=0$

(1) حول محور x



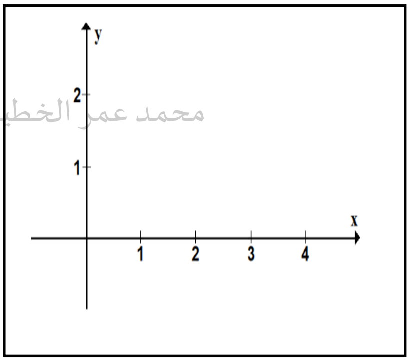
---

(2) حول محور y



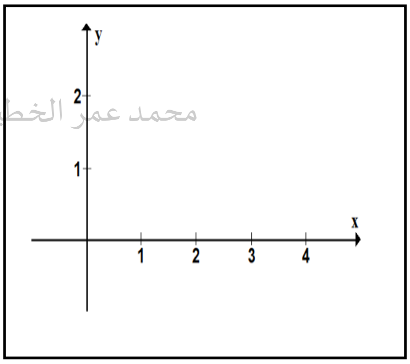
---

(3) حول المستقيم $y=2$



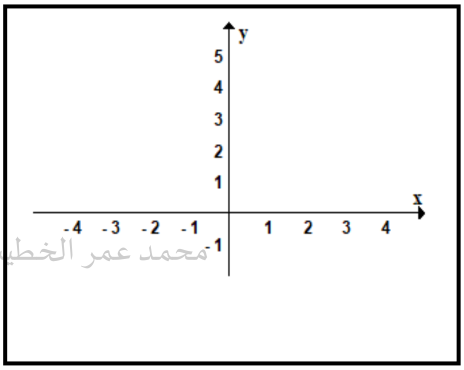
---

(4) حول المستقيم $x=4$

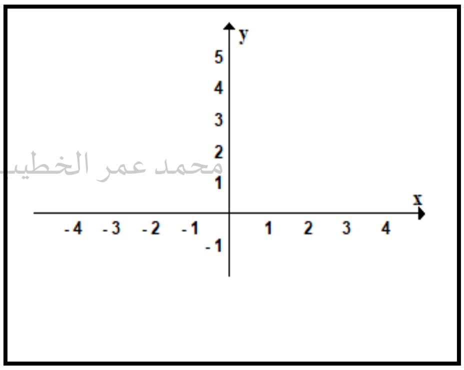


أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y = 4$ والمستقيم $x > 0, x = 0$ و المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$

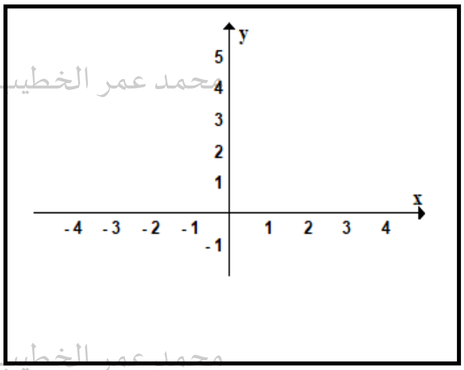
(1) حول محور x



(2) حول المستقيم $y = 5$

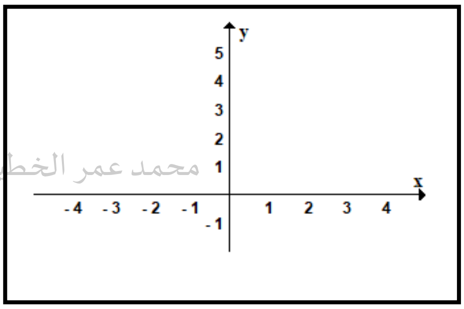


(3) حول محور y



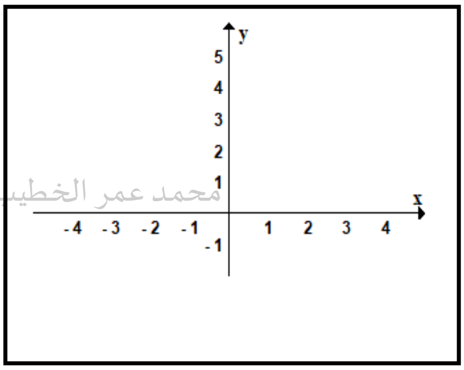
أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$ ومحور x

(1) حول محور y



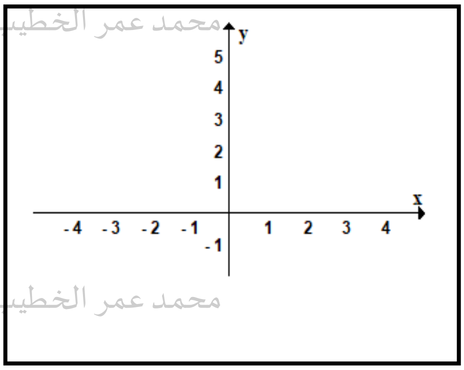
---

(2) حول المستقيم $y = -3$



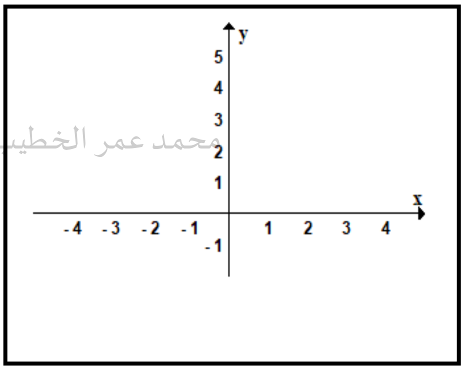
---

(3) حول المستقيم $y = 5$



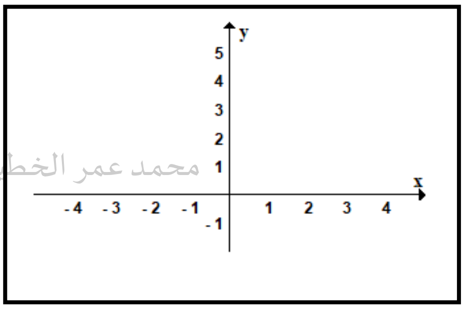
---

(4) حول المستقيم $x = 3$



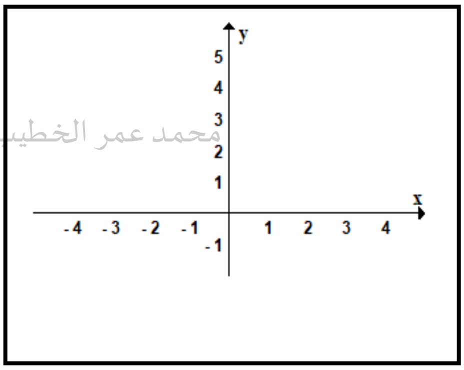
أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ والمستقيم $y=1$

(1) حول محور x



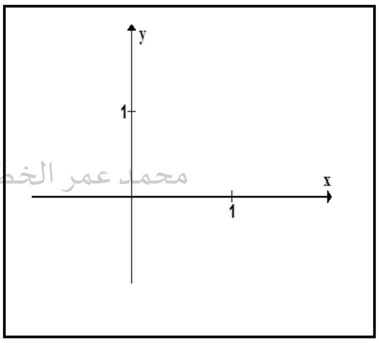
---

(2) حول محور y

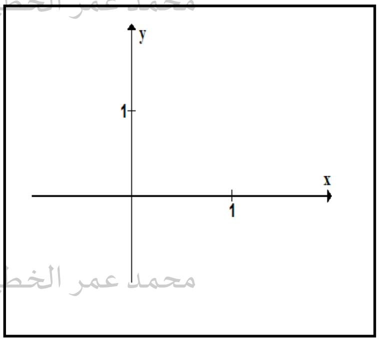


أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالمنحنى $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$

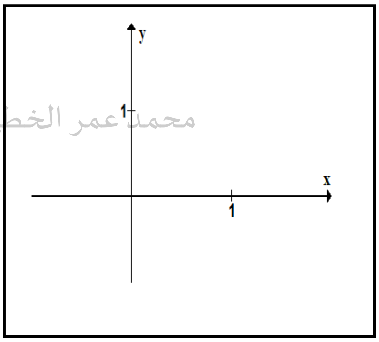
(1) حول محور x



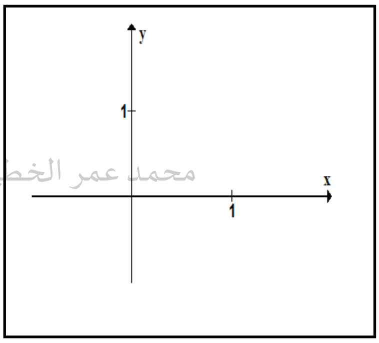
(2) حول محور $y = 1$



(3) حول محور $y = -1$

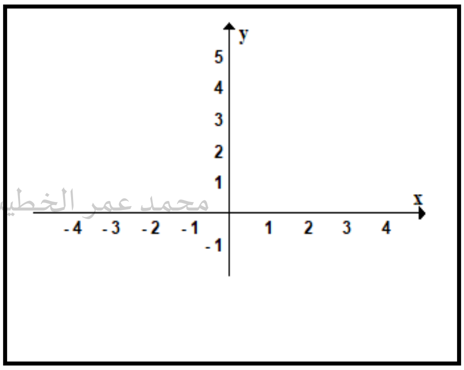


(4) حول محور y



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$ و $y = x^2$

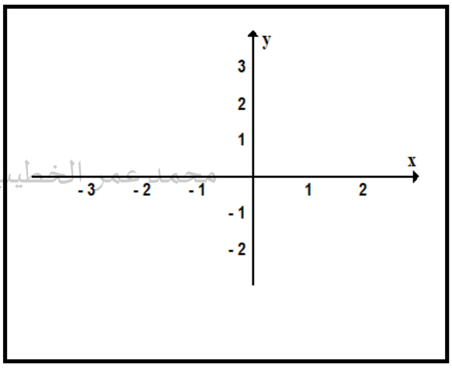
حول محور x



---

(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$

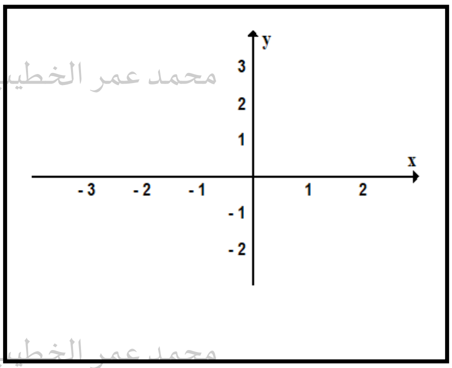
والمستقيم $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المستقيم $y = -2$



---

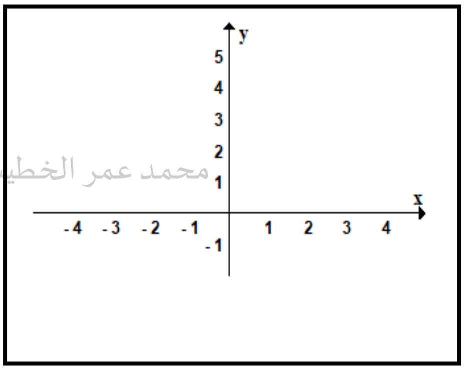
(3) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$ والمستقيم

$y = -x - 2$ و $x = 0$ حول المستقيم $x = -2$



(1) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = e^x$ و $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 2$

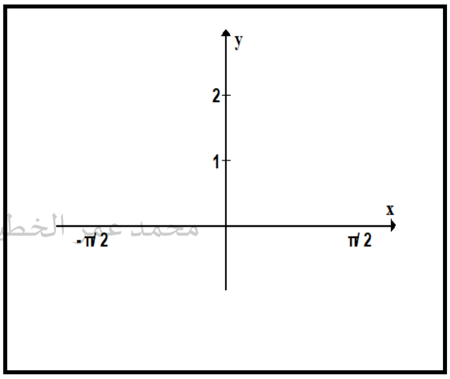
حول محور $y = -2$



---

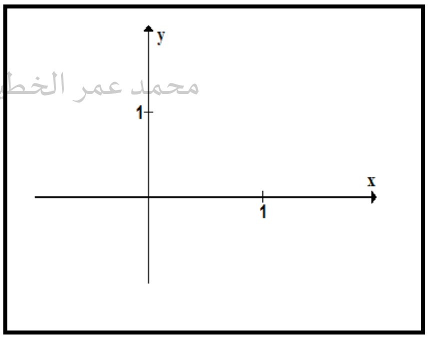
(2) أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = \sec x$ و $y = 0$ ،

$x = \frac{-\pi}{4}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ حول محور x



(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+2}}$ و $y=0$ ، $x=1$

حول محور x



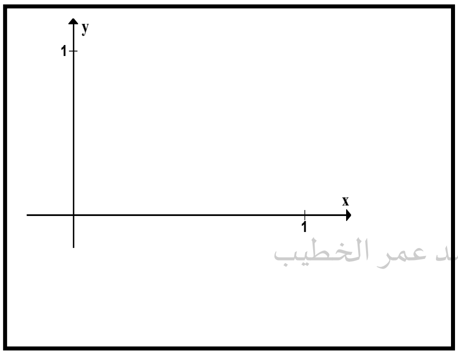
(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة R

بالمنحنى $y=\ln x$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[1,e]$

حول y

يمثل كل من التكاملات التالية حجم مجسم بطريقة الاقراص والحلقات، ارسم المنطقة R وحدد محور الدوران اللذين ينتج عنهما المجسم

(1) $\int_0^1 \pi\left[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2\right]dx$



---

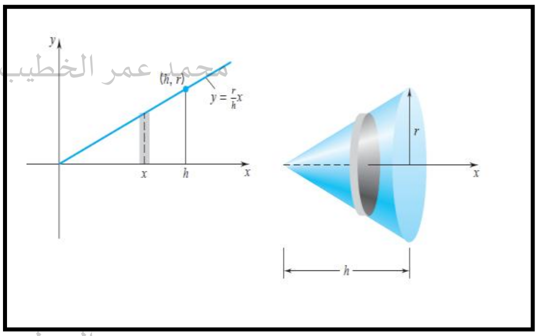
(2) $\int_0^2 \pi(4-y^2)^2\ dy$

(1) اثبت أن حجم الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو $v=\pi r^2 h$

(2) يتشكل المخروط القائم الذي نصف قطر قاعدة r

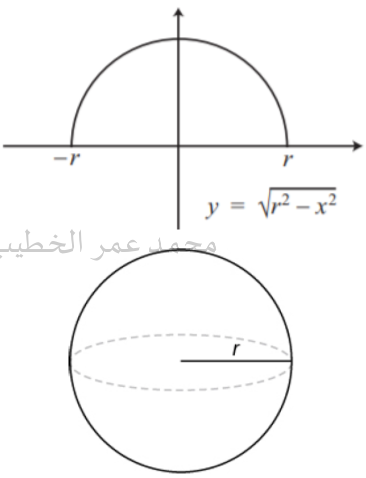
وارتفاعه h من تدوير المستقيم الذي معادلته $y=\frac{r}{h}x$

حول المحور x أثبت أن حجم المخروط هو $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h$



(3) تتشكل الكرة التي نصف قطرها r من تدوير الجزء العلوي من معادلة الدائرة $x^2+y^2=r^2$

حول المحور x ، أثبت أن حجم الكرة هو $v=\frac{4}{3}\pi r^3$

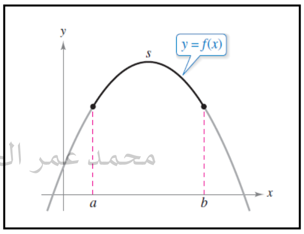


الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الرابع : طول القوس ومساحة السطح

طول القوس (المنحنى)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق، ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن طول منحنى الدالة يعطى بالتكامل

$$s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1+[y']^2}\ dx$$



اكتب <u>التكامل</u> الذي يمثل طول منحنى الدالة y على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

(1) $y = x^3 \quad , \quad -1 \le x \le 1$

(2) $y = e^x \quad , \quad [0,1]$

(3) $y = lnx \quad , \quad [1,3]$

(4) $y = \tan x \quad , \quad 0 \le x \le \pi / 4$

(5) $y = \int_0^x u\ sinu\ \ du \quad , \quad [0,\pi]$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y=\sqrt{3}\,x+1$ على الفترة $[0,5]$

---

(2) أوجد طول منحنى الدالة $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ حيث $1\le x\le 4$

---

(3) أوجد طول منحنى الدالة $y=\sqrt{1-x^2}$ حيث $-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y = \ln \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

---

(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ على الفترة $[2, 3]$

---

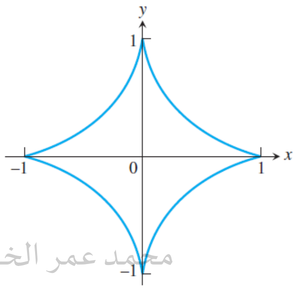
(3) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4t^2 - 1}\, dt$ على الفترة $[-2, 0]$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ حيث $0\leq x\leq 1$

(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{6}x^{3}+\frac{1}{2x}$ على الفترة $[1,3]$

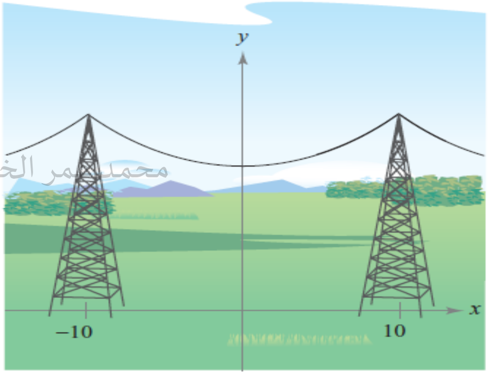
تمثل العلاقة $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

الشكل النجمي المجاور أوجد طول منحى الشكل



ملاحظة : طول المنحنى النجمي الذي معادلتة $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ هو $s=6\,a$

يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عموديين للكهرباء والمسافة بينهم $20\ m$



حيث تمثل المعادلة

$$y = 5\left(e^{x/10} + e^{-x/10}\right)$$

ارتفاع الكابل عند أي مسافة x حيث $-10 \le x \le 10$

أوجد طول الكابل الكهربائي بين العمودين

ملاحظة : عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما $2L\ ft$ ، و معادلته $y = \frac{2L}{4}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)$

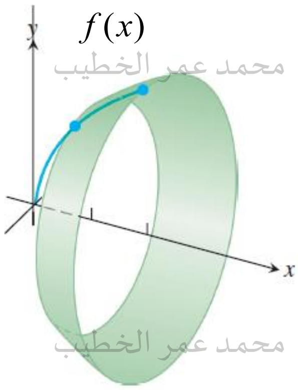
حيث $-L \le x \le L$ فان التكامل الذي يمثل طول الحبل هو

$$s = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)dx = \int_{0}^{L}\left(e^{x/L} + e^{-x/L}\right)dx = L\left(e - e^{-1}\right)$$

مساحة السطح

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[a,b]$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران الدالة حول محور x يعطى بالتكامل

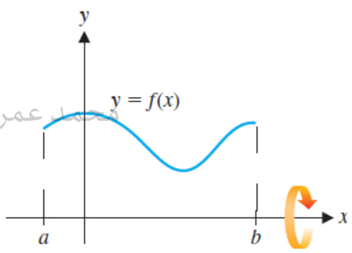
$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \quad = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+[y']^2}\ dx$$



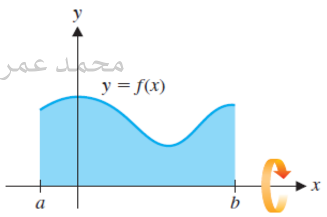
إذا كانت $x = g(y)$ دالة قابلة للإشتقاق ،ومشتقتها متصلة على الفترة $[c,d]$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران الدالة حول محور y يعطى بالتكامل

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1+[g'(y)]^2}\ dy$$

ملاحظات :



(1) اذا تم تدوير المنحنى $y = f(x)$ حول محور على x على الفترة $[a,b]$ فان مساحة السطح تكون هي المساحة الجانبية وليست الكلية (بدون القاعدتين)



(2) اذا تم تدوير المساحة المحصورة بالدالة $y = f(x)$ ومحور x حول محور x على الفترة $[a,b]$ فان مساحة السطح تكون هي المساحة الكلية وليست الجانبية (يجب اضافة القاعدتين)

(1) اكتب __التكامل__ الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة y حول محور x

على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

$(a)\ y = \sin x \quad , \ [0, \pi]$

$(b)\ y = e^x \quad , \ [0, 1]$

$(c)\ y = \ln x \quad , \ [1, 2]$

$(d)\ y = \tan x \quad , \ \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(2) اكتب __التكامل__ الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران المعادلة $g(y) = y^2 + 1$

حيث $0 \le y \le 1$ حول محور y (بدون إجراء عملية التكامل)

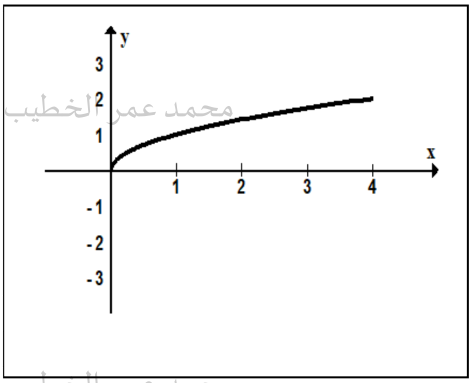
(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y=2$ حول محور x حيث $0\le x\le 5$

---

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران الدالة $f(x)=\sqrt{3x}$ حول محور x حيث $1\le x\le 7$

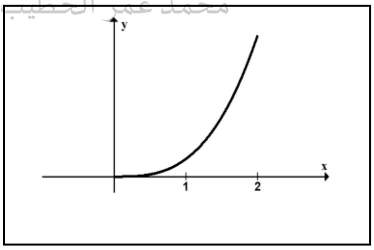
---

(3) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{x}$
حول محور x على الفترة $[0,4]$



(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\frac{1}{9}x^3$

حول محور x على الفترة $[0,2]$



---

(2) اوجد مساحة سطح المجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ حول محور x على الفترة $[-1,1]$ تساوي

(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران المساحة المحصورة بالدالة $y=2$ حول محور x حيث $0 \le x \le 5$

---

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران المربع المكون من جميع قيم (x, y) حيث $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ حول المحور y

الشكل الناتج
اسطوانة رأسية

(بما انه تم تدوير المنطقة المحصورة بالمربع .... يعني المساحة)

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الخامس : حركة المقذوفات

$g = 9.8 m/s^2 \quad or \quad g = 32 ft/s^2$

اولاً : حركة المقذوف في بعد واحد

(1) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك رأسياً للأعلى أو للأسفل عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$$h''(t) = y''(t) = -g = -32 \, ft/s^2 \quad , y'(0) = v_0 \quad , y(0) = y_0$$ بالقدم ft

أو

$$h''(t) = y''(t) = -g = -9.8 \, m/s^2 \quad , y'(0) = v_0 \quad , y(0) = y_0$$ بالمتر m

والحل يكون

$$v(t) = y'(t) = -g\,t + v_0$$ معادلة السرعة المتجهة الرأسية

$$h(t) = y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_0 t + y_0$$ معادلة الارتفاع

(2) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك أفقياَ لليمين أو لليسار عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$$x''(t) = 0 \quad , x'(0) = v_0 \quad , x(0) = x_0$$

والحل يكون

$$x'(t) = v_0$$ معادلة السرعة المتجهة الافقية

$$x(t) = v_0 t + x_0$$ معادلة الموقع الافقي

ملاحظات مهمة:

(1) تكون السرعة المتجهه موجبة إذا كانت الحركة للأعلى(لليمين) وسالبة إذا كانت الحركة للأسفل (لليسار)

(2) زمن التحليق أو زمن الرحلة يحدث عندما يكون الارتفاع يساوي صفر ($h(t) = y(t) = 0$)

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

(3) يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما تنعدم السرعة ($h'(t) = y'(t) = 0$)

(أ) نضع $v(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $y(t)$

$$H = \frac{v_0^{\,2}}{2g}$$

(4) سرعة اصطدام الجسم بالأرض (أ) نضع $y(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $v(t)$

اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط الابتدائية لكل مما يلي:

(1) قذفت كرة للأعلى من الأرض بسرعة متجهة قدرها $48\ ft/s$

---

(2) قذفت كرة للأعلى من يد شخص ترتفع عن الارض $1m$ وبسرعة متجهة قدرها $7m/s$

---

(3) سقطت كرة من برج ارتفاعه $100\,ft$

---

(4) قذفت كرة وزنها $50gm$ من برج ارتفاعه $75\,ft$ وبسرعة متجهة للأسفل قدرها $18\,ft/s$

---

(5) اكتب معادلة السرعة المتجهة والارتفاع لحل المعادلة التفاضلية بالشروط الابتدائية التالية:

$$h''(t) = y''(t) = -16\ m/s^2 \quad , \quad y'(0) = 10 \quad , \quad y(0) = 120$$

قذفت كرة من الارض رأسياً للأعلى بشكل مستقيم وبسرعة متجهة ابتدائية $19.6\, m/s$ ، بتجاهل مقاومة الهواء

(1) اكتب المعادلة التفاضلية التي تتمزج معادلة الارتفاع مع الشروط عند أي زمن t

(2) أوجد معادلة الارتفاع عند أي زمن t

(3) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثواني

(4) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة

(5) أوجد زمن التحليق للكرة (مقدار الزمن التي تبقى فيه الكرة بالهواء)

(1) تسقط قطرات المطر من غيمة على ارتفاع $1000\ m$ عن سطح الارض أوجد السرعة المتجهة لقطرة الماء عند اصطدامها بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

قطرة الماء مثل الكرة ، مثل الغطاس، مثل أي جسم

---

(2) قذف جسم للأسفل من ارتفاع $160\,ft$ عن سطح الأرض وبسرعة متجهة $48\,ft/s$ أوجد السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

---

(3) سقطت كرة رأسياَ من ارتفاع $80\ ft$ وفي نفس الوقت تم قذف كرة رأسيا من الأرض للأعلى وبسرعة $40\,ft/s$ ، حدد الارتفاع الذي تلتقي عنده الكرتين (تجاهل مقاومة الهواء)

(1) إذا كان أقصى ارتفاع تصل إليه قدمي لاعب كرة سلة لتسديد الكرة هي $1.35\ m$ أوجد السرعة المتجهة الابتدائية التي قفز بها اللاعب ليصل إلى هذا الارتفاع (تجاهل مقاومة الهواء)

---

(2) يسقط جسم من ارتفاع $H\ ft$ من سطح الارض

(أ) بين أن الجسم يصل إلى الأرض بعد الزمن $T=\frac{1}{4}\sqrt{H}\ s$ (تجاهل مقاومة الهواء)

(ب) بين أن السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض هي $V=-8\sqrt{H}\ ft/s$ (تجاهل الهواء)

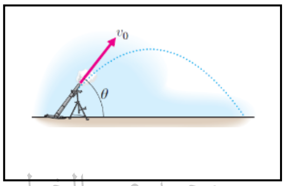
$g = 9.8 m/s^2 or\ g = 32 ft/s^2$

ثانياً : حركة المقذوف في بعدين

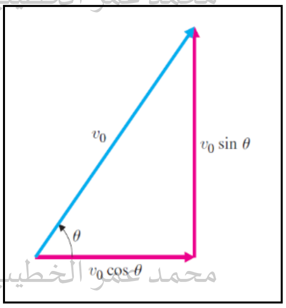
نحتاج في حركة المقذوف في بعدين إلى معادلات الحركة الرأسية والأفقية

(1) معادلة الحركة الرأسية للمقذوف عند أي زمن في المعادلة التفاضلية

$$y''(t) = -9.8 m/s^2 or -32 ft/s^2 \qquad , y'(0) = v_0 \sin\theta \quad , y(0) = y_0$$



حيث θ زاوية ميل المقذوف عن المستوى الأفقي



معادلة السرعة المتجهة الراسية ←

$$y'(t) = -g\,t + v_0 \sin\theta$$

معادلة الارتفاع ←

$$y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$$

(2) معادلة الحركة الافقية عند أي عند زمن في المعادلة التفاضلية

$$x''(t) = 0 \qquad , x'(0) = v_0 \cos\theta \quad , x(0) = x_0$$

.

معادلة السرعة المتجهة الافقية ←

$$x'(t) = v_0 \cos\theta$$

معادلة الموقع الافقي ←

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$$

السرعة الأفقية دائما ثابتة طول فترة الرحلة

(1) زمن التحليق للمقذوف يحدث عندما يكون الارتفاع يساوي صفر

اوجد قيمة الزمن الذي يجعل $y(t) = 0$

(2) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما تنعدم السرعة

($y'(t) = 0$)

(أ) نضع $y'(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $y(t)$

(3) المدى الافقي

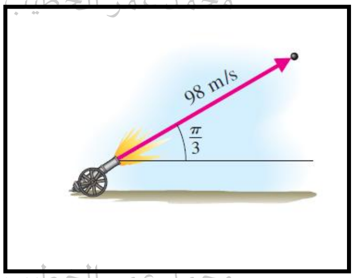
(أ) نضع $y(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $x(t)$

ملاحظات (من الفيزياء) تستخدم هذه القوانين للتاكد من الاجابات لمسائل اختيار من متعدد

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$H = \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$$



تطلق قذيفة من الأرض بسرعة ابتدائية متجهة قدرها $98\,m/s$ ،

بزاوية ميل قدرها $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t (معادلة الارتفاع)

(2) أوجد معادلة الحركة الافقية في أي زمن t

(3) أوجد زمن التحليق للقذيفة

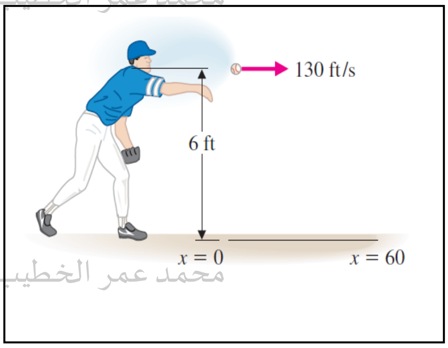
(4) أوجد المدى الأفقي (أقصى بعد تصل إليه القذيفة)

(1) يتم اطلاق جسم من ارتفاع $6\,ft$ بزاوية 20° و بسرعة ابتدائية $48\ ft/s$

اوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم

---

(2) يطلق لاعب، كرة بيسبول من ارتفاع $6\,ft$ وبسرعة أفقية ابتدائية قدرها $130\ ft/s$



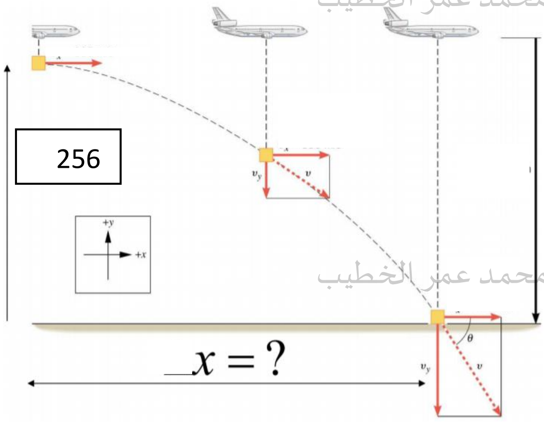
(أ) أوجد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى المنصة (على بعد $60\,ft$)

الزاوية $\theta = 0$

السرعة الأفقية ثابتة

(ب) اكتب المعادلة التي تربط x و y

(1) تريد طائرة على ارتفاع $256\,ft$ ، اسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض، إذا كان للطائرة سرعة أفقية $100\,ft/s$ ،فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف. (اوجد المدى الافقي للمقذوف)



---

(2) يتم اطلاق كرة قدم من ارتفاع $6\,ft$ و بسرعة ابتدائية $80\ f/s$ وبزاوية 8° يقف شخص في نهاية الملعب ويبعد $40\,yd$ في اتجاه الرمي ،هل سيلتقط هذا الشخص الكرة ام لا.

ملاحظة

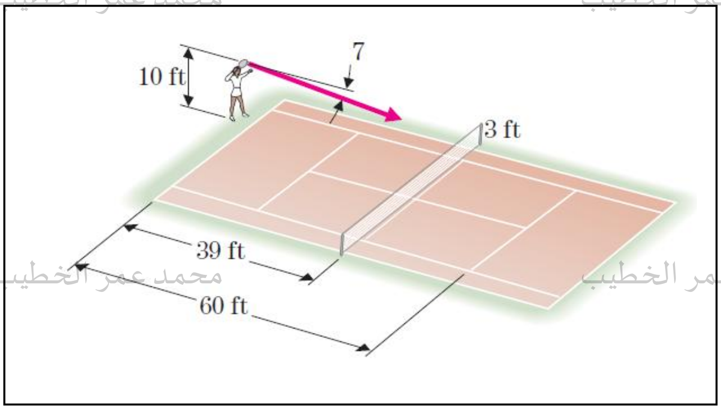
$1yd = 3\,ft$

يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع $10\ ft$

و بسرعة ابتدائية $176\ ft/s$

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 7°

كما هو موضح بالشكل



(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t

(2) أوجد معادلة الحركة الأفقية في أي زمن t

(3) أوجد زمن وصول الكرة إلى الشبكة

(4) أوجد ارتفاع الكرة عن الأرض عند وصول الكرة إلى الشبكة، هل ستمر الكرة فوق الشبكة ؟

(5) أوجد زمن التحليق للكرة

(6) أوجد المدى الأفقي للكرة

(7) هل ستكون الكرة داخل أم خارج الحد (على بعد $60\ ft$ من اللاعب)

معادلة المسار للمقذوف

يمكن استخدام معادلة المسار التربيعية التي تربط بين المتغيرين x, y في هذا النوع من المسائل وهي

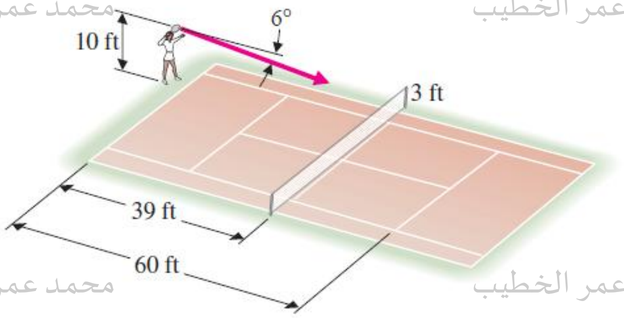
$$y = y_0 + \tan\theta \; x - \frac{g}{2[v_0 \cos\theta]^2} x^2$$

يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع $10\ ft$

و بسرعة ابتدائية $176\ ft/s$

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 6°

كما هو موضح بالشكل



فان المدى الافقي للكرة هو

عوض الخيارت مكان x في معادلة المسار حتى تحصل على $y=0$

أو حل المعادلة $y=0$ لتجد قيمة x

$$g = 32 \,,\, v_0 = 176 \,,\, y_0 = 10 \,,\, \theta = -6^\circ$$

$$y = 10 + \tan(-6^\circ) \;\; x - \frac{32}{2\left[176\cos(-6^\circ)\right]^2} x^2$$

(a) $55.31\,ft$

(b) $81.42\,ft$

(c) $43.14\,ft$

(d) $70.47\,ft$

ثالثاً: حركة المقذوف في ثلاث أبعاد (معادلة الحركة لقذيفة جنونية)

قوة ماغنوس

تعطى المسافة الجانبية لكرة تتحرك وتدور بمعدل w راديان في الثانية بالمعادلة التفاضلية

$$x''(t) = \frac{-0.1}{m}\sin(4wt+\theta_0) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

حيث θ_0 الزاوية الابتدائية عند رمي الكرة

و m كتلة الكرة ب صلج و x بالقدم

أوجد معادلة الحركة الجانبية لكرة البيسبول التي تزن 0.01 صلج والتي تدور بمعدل $w=2$ راديان بالثانية حيث ترمى الكرة من الموقع صفر والزاوية الابتدائية صفر والسرعة الابتدائية صفر.

ثم أوجد موقع الكرة الجانبية بعد نصف ثانية

$$x''(t) = \frac{-0.1}{0.01}\sin(4\times 2\times t+0) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

$$x''(t) = -10\sin(8t) \quad , \quad x'(0)=0 \quad , \quad x(0)=0$$

انتهت الوحدة السادسة بحمد الله

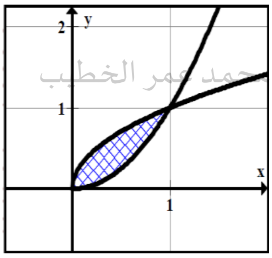
اجابات التمارين العامة موجودة
في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة السادسة

الوحدة السادسة ///// اسئلة الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين الدالتين $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ تعطى بالتكامل



(a) $\int_0^1 (x^2-\sqrt{x})\,dx$ (b) $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$

(c) $\pi\int_0^1 (x^4-x)\,dx$ (d) $2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)\,dx$

---

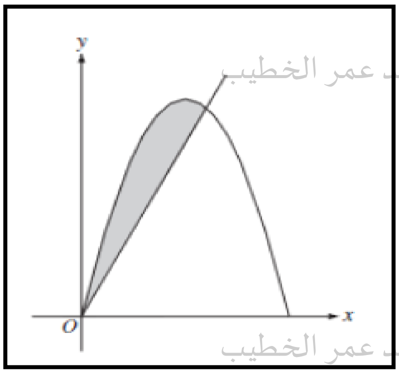
(2) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $y=4-x^2$ والمستقيم $y=x-2$ تعطى بالتكامل

(a) $\int_{-3}^2 (x^2+x-6)\,dx$ (b) $\int_{-3}^2 (-x^2-x+6)\,dx$

(c) $\int_{-3}^2 (-x^2-x-2)\,dx$ (d) $\int_{-3}^2 (x^2+x-2)\,dx$

---

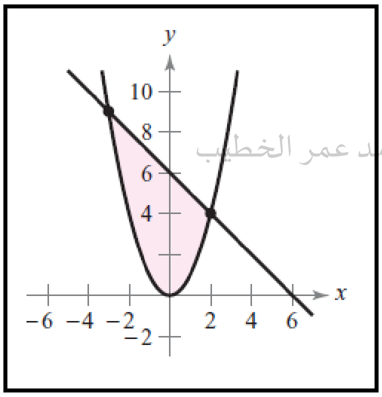
(3) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $y=5x-x^2$ والمستقيم $y=2x$ تساوي



(a) $\frac{25}{6}$ (b) $\frac{9}{2}$

(c) $\frac{27}{2}$ (d) $\frac{45}{2}$

(4) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 6 - x$ تساوي



(a) $\dfrac{25}{6}$ (b) $\dfrac{75}{6}$

(c) $\dfrac{125}{3}$ (d) $\dfrac{125}{6}$

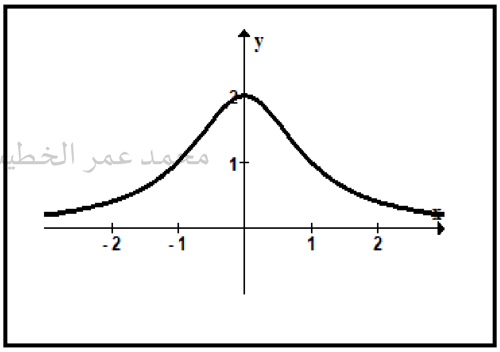
---

(5) إن مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال

$$y = \frac{2}{x^2+1} \text{ و } y = |x|$$

حيث نقاط التقاطع للدالتين هما $-1,1$

هي

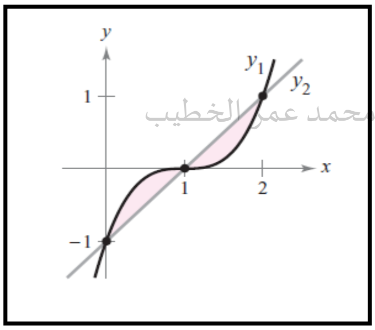


(a) $2\tan^{-1}x - x^2\Big]_0^1$ (b) $4\tan^{-1}x - x^2\Big]_0^1$

(c) $4\tan^{-1}x - x^2\Big]_{-1}^1$ (d) $\tan^{-1}x - x\Big]_{-1}^1$

---

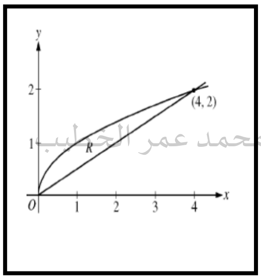
(6) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بالدالة $y_1 = (x-1)^3$ والمستقيم $y_2 = x - 1$ تساوي



(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{4}$

(c) 1 (d) 0

(7) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = \frac{x}{2}$ تعطى بالتكامل



(a) $\int_0^2 (y^2 - \frac{y}{2})\, dy$

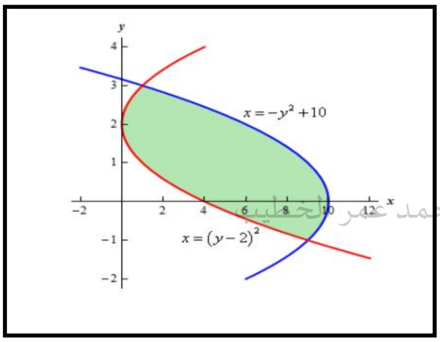
(b) $\int_0^2 (y^2 - 2y)\, dy$

(c) $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$

(d) $\int_0^4 (2y - y^2)\, dy$

---

(8) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيين تساوي



(a) $\frac{32}{3}$

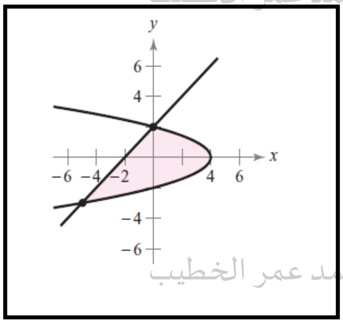
(b) $\frac{64}{3}$

(c) $\frac{16}{3}$

(d) $\frac{128}{3}$

---

(9) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بالعلاقة $x = 4 - y^2$ والمستقيم $x = y - 2$ تساوي



(a) $\frac{125}{12}$

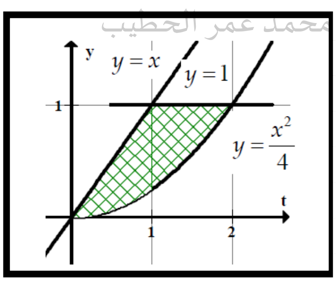
(b) $\frac{125}{2}$

(c) $\frac{125}{3}$

(d) $\frac{125}{6}$

---

(10) إن مساحة المنطقة المظللة تعطى بالتكامل



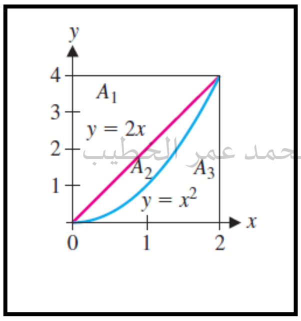
(a) $\int_0^1 (2\sqrt{y} - y)dy$

(b) $\int_0^2 (2\sqrt{y} - y)dy$

(c) $\int_0^2 (y + 2 - y^2)dy$

(d) $\int_0^2 (1 - \frac{y^2}{4})dy$

(11) في الشكل المجاور، التكامل $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$ يعبر عن المساحة

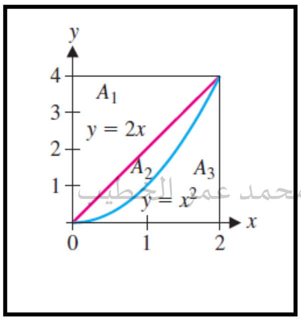


(a) A_1 **(b)** A_2

(c) A_3 **(d)** $A_1 + A_2$

---

(12) في الشكل المجاور، التكامل $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$ يعبر عن المساحة

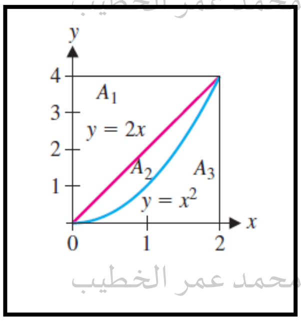


(a) A_1 **(b)** A_2

(c) A_3 **(d)** $A_2 + A_3$

---

(13) في الشكل المجاور، التكامل $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$ يعبر عن المساحة



(a) A_1 **(b)** A_2

(c) $A_2 + A_3$ **(d)** $A_1 + A_2$

---

(14) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ ، $y = 2 - x^2$ على الفترة $[0,2]$ تساوي

(a) $\frac{8}{3}$ **(b)** $\frac{4}{3}$

(c) 6 **(d)** 4

(15) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ على الفترة $[0, \pi]$ تساوي

(a) $\int_0^{\pi} (\cos x - \sin x)\, dx$

(b) $\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos)\, dx$

(d) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos)\, dx$

---

(16) إنّ مساحة المنطقة المحصورة بالدالة $y = e^{\frac{1}{2}x}$ والمستقيم $y = 0$ على الفترة $[0, 2]$ تساوي

(a) $2e - 2$

(b) $2e - 1$

(c) $\frac{1}{2}(e - 1)$

(d) $\frac{1}{2}(e - 2)$

---

(17) إنّ التكامل الذي يمثل مساحة المنطقة R المحصورة بالدالة $y = f(x)$ والدالة $y = g(x)$ على الفترة $[a, b]$ يعطى بالتكامل

(a) $\int_a^b f(x) - g(x) \quad dx$

(b) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

(c) $\int_a^b f(x) + g(x) \quad dx$

(d) $\int_a^b g(x) - f(x) \quad dx$

---

(18) إن التكامل المنفرد الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين المستقيمات $y = x$ ، $y = 2$ ، $y = 6 - x$ ، $y = 0$ هو

(a) $\int_0^3 (6 - 2y)\ dy$

(b) $\int_0^2 (6 - 2y)\ dy$

(c) $\int_2^3 (6 - 2y)\ dy$

(d) $\int_0^2 (2y - 6)\ dy$

(19) إن التكامل المنفرد الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين المستقيمات

$y = x$ ، $y = 6 - 2x$ ، $y = 0$ هو

(a) $\int_0^3 (6-2x)\ dx$

(b) $\int_0^2 (6-3x)\ dx$

(c) $\int_0^2 (3-\frac{3}{2}y)\ dy$

(d) $\int_0^3 (3-\frac{3}{2}y)\ dy$

---

(20) إن التكامل المنفرد الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنى $x = y^2$ ، والمستقيم $x = 4$ هو

(a) $\int_0^4 (4-y^2)\ dy$

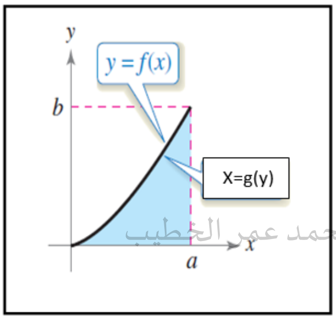
(b) $2\int_{-2}^2 (4-y^2)\ dy$

(c) $2\int_0^2 (4-y^2)\ dy$

(d) $2\int_0^2 (y^2-4)\ dy$

---

(21) إحدى التكاملات يمثل مساحة المنطقة المظللة



(a) $\int_0^b f(x)dx$

(b) $\int_0^b (a-g(y))dy$

(c) $\int_0^a (b-f(x))dx$

(d) $\int_0^b g(y)dy$

---

(22) إن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y^2 = x$ ، $y = x$ تساوي

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{3}{2}$

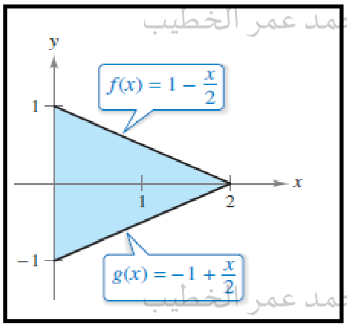
(23) إن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2 - 4$ ، **والمنحنى** $y = 4 - x^2$ **تساوي**

(a) $\frac{64}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

---

(24) إن قيمة التكامل $\int_0^2 [f(x) - g(x)]\,dx$ **يساوي**



(a) 4 (b) 2

(c) 0 (d) 6

---

(25) إن التكامل الذي يمثل مساحة المنطقة R **المحصورة بالمنحنى** $y = \sqrt{x}$ **و المستقيم** $y = -x$
والمستقيم $y = 2$ **يعطى بالتكامل**

(a) $\int_0^2 (y^2 + y)\; dy$ (b) $\int_0^2 (y^2 - y)\; dy$

(c) $\int_0^4 (\sqrt{x} + x)\; dx$ (d) $\int_0^4 (\sqrt{x} - x)\; dx$

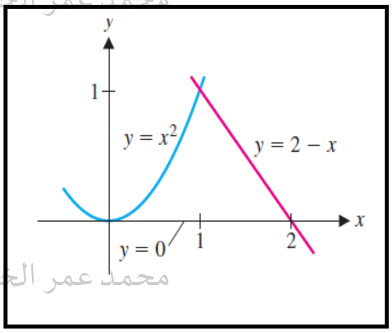
---

(26) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \ln x$ **و المحور** $y = 0$ **و والمستقيم** $x = e$

(a) $\int_0^e \ln x\; dx$ (b) $\int_0^1 e - e^y\; dy$

(c) $\int_0^1 e^y\; dy$ (d) $\int_1^e e - e^y\; dy$

(27) إن المساحة المحصورة بالدالتين ومحور x تعطى بالتكامل



(a) $\int_0^1 (2-y-y^2)\ dy$ (b) $\int_0^2 (2-y-\sqrt{y})\ dy$

(c) $\int_0^2 (2-y-y^2)\ dy$ (d) $\int_0^1 (2-y-\sqrt{y})\ dy$

---

(28) إن المساحة المحصورة بالدالتين $y = x^2 , y = e^{-x}$ على الفترة $1 \le x \le 4$ هي

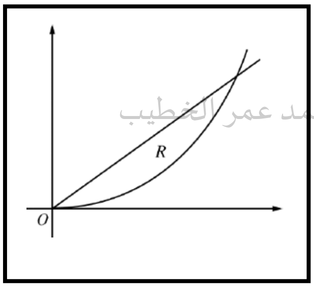
(a) $e^4 - e - 21$ (b) $e^{-4} - e^{-1} + 21$

(c) $-e^4 - e^{-1} + 21$ (d) $e^4 - e + 21$

---

(29) إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = kx$ هي $\frac{4}{3}$

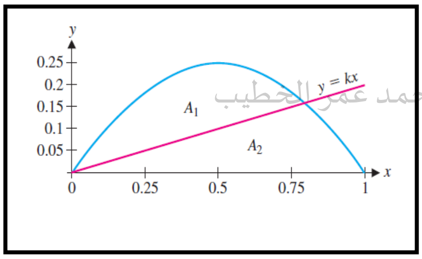
فإن k تساوي



(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

(30) إنّ قيمة A_1 التي تجعل المساحتين A_1, A_2 متساويتين في الشكل المجاور حيث $y = x - x^2$ و $y = kx$ هي



(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{1}{6}$

(c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{2}$

---

(31) إذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة عدد سكانها 10000هو $B(t) = 10 + 2t$ شخص ومعدل عدد الوفيات هو $D(t) = 4 + t$ شخص فإن عدد السكان بعد 30 سنة يكون

(a) 10630 (b) 11770

(c) 11200 (d) 11500

---

(1) إنّ حجم الهرم الذي مقطعه العرضي $A(x)=\frac{4}{25}(10-x)$ وارتفاعه 10 متر يساوي

(a) 8 (b) 16

(c) 24 (d) 12

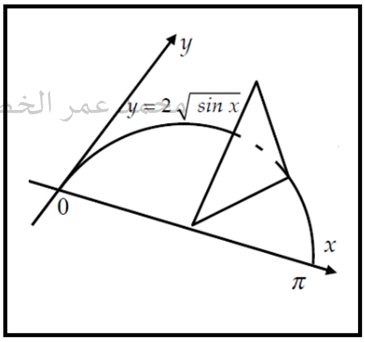
---

(2) إنّ حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة

بالدالة $y=2\sqrt{\sin x}$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $0\le x\le\pi$

والمقاطع العرضية هي <u>مثلثات</u> متساوية الأضلاع متعامدة

على محور x يساوي



(a) $4\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$

---

(3) إن حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالة $y=\sqrt{2\sin x}$ والمستقيم $y=0$

على الفترة $0\le x\le\pi$ والمقاطع العرضية هي <u>مربعات أقطارها</u> متعامدة على محور x يساوي

(a) 1 (b) 2

(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

(4) إنّ حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ ، $y = 2 - x^2$ على الفترة $-1 \le x \le 1$ والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x يساوي

(a) $\frac{32}{15}$ (b) $\frac{64}{15}$

(c) $\frac{128}{15}$ (d) $\frac{8}{15}$

---

(5) إنّ التكامل الذي يمثل حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = \ln x$ ، $y = 0$ والمستقيم $x = 2$ والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x هو

(a) $\int_0^2 (\ln x)^2 \, dx$ (b) $\pi \int_0^2 (\ln x)^2 \, dx$

(c) $\int_1^2 (\ln x)^2 \, dx$ (d) $\int_1^2 \ln x \, dx$

---

(6) إنّ حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل وطول ضلع قاعدته 180متر و وارتفاعه 100 متر يعطى بالتكامل

a) $\int_0^{100} (180 - \frac{9}{5}x)^2 \, dx$ (b) $\pi \int_0^{100} (180 - \frac{9}{5}x)^2 \, dx$

(c) $\int_0^{50} (180 - \frac{9}{5}x)^2 \, dx$ (d) $\int_0^{100} (90 - \frac{5}{9}x)^2 \, dx$

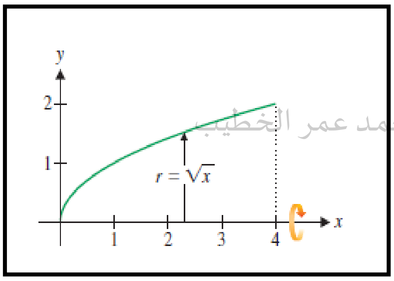
---

(7) إنّ حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالة $x = -2y + 6$ في الربع الأول ، والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور y يساوي

(a) 12 (b) 36

(c) 18 (d) 72

(8) إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ ومحور x على الفترة $[0,4]$ حول محور x بطريقة الأقراص تساوي

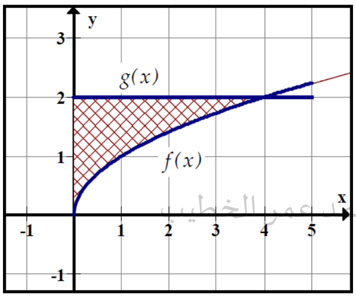


(a) 8 (b) 16

(c) 8π (d) 16π

---

(9) إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $y=\sqrt{x}$ و والمستقيم $y=2$ ومحور y على الفترة $[0,4]$ حول محور x بطريقة الحلقات يساوي

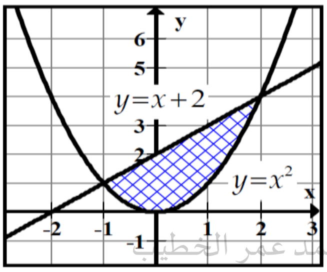


(a) 8 (b) 16

(c) 8π (d) 16π

---

(10) إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالدالة $y=x^2$ والمستقيم $y=x+2$ حول محور x بطريقة الحلقات يساوي

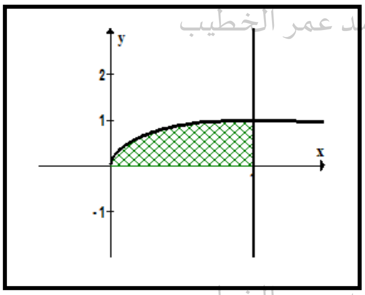


(a) $\frac{72\pi}{5}$ (b) $\frac{36\pi}{5}$

(c) $\frac{39\pi}{2}$ (d) $\frac{144\pi}{5}$

---

(11) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}}$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ حول محور x تساوي

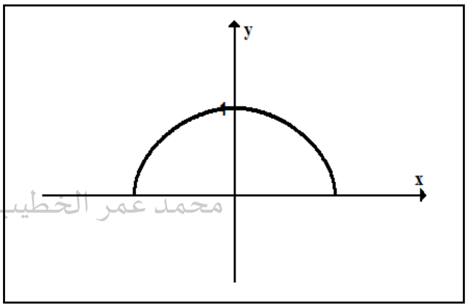


(a) $2\pi\ln 2$ (b) $\pi\ln 2$

(c) $\frac{\pi^2}{2}$ (d) $\frac{\pi^2}{4}$

(12) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالدالة $y=\sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y=0$

حول محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ يساوي



(a) π (b) 2π

(c) 3π (d) 4π

---

(13) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $y=\sec x$ والمستقيم $y=0$

حول محور x على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ يساوي

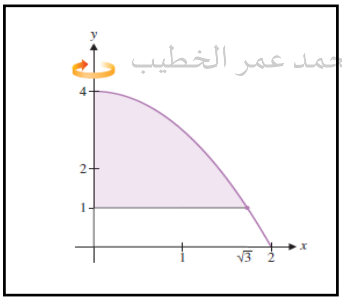
(a) π (b) 2π

(c) $\frac{8\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi^2}{4}$

---

(14) إنّ حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=4-x^2$ والمستقيم $x=0$

والمستقيم $y=1$ حول محور y بطريقة الأقراص يساوي



(a) $\frac{9}{2}\pi$ (b) $\frac{16}{3}\pi$

(c) $\frac{8}{3}\pi$ (d) $\frac{64}{3}\pi$

(15) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالدالة $y=\frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y=1$

حول محور y يساوي

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{6}{15}\pi$ (d) $\frac{79}{80}$

---

(16) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $x=-y^2+9$ والمستقيم $x=0$

حول محور y يساوي

(a) 18π (b) 90π

(c) $\frac{1296\pi}{5}$ (d) $\frac{648\pi}{5}$

---

(17) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمستقيمات $y=x$ و $y=-x$ و $x=1$

حول المستقيم $y=2$ يعطى بالتكامل

(a) $\pi\int_{-1}^{1} (2+x)^2-(2-x)^2 \ dx$ (b) $\pi\int_{0}^{1} (2+x)-(2-x) \ dx$

(c) $\pi\int_{0}^{1} (2-x)^2-(2+x)^2 \ dx$ (d) $\pi\int_{0}^{1} (2+x)^2-(2-x)^2 \ dx$

---

(18) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=\sqrt{x^2+1}$ والمستقيم $y=0$

حيث $0\le x\le 4$ حول $y=0$ يعطى بالتكامل

(a) $\pi\int_{0}^{4} x^2+1 \, dx$ (b) $\int_{0}^{4} x^2+1 \ dx$

(c) $\pi\int_{0}^{4} \sqrt{x^2+1} \ dx$ (d) $\pi\int_{0}^{4} x+1 \ dx$

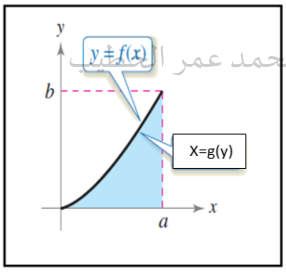
(19) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالدالة $y=\sin x$ والدالة $y=\cos x$ حول محور x على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ يساوي

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

---

(20) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة حول محور $y=b$ يعطى بالتكامل

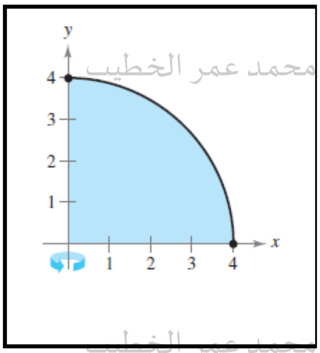


(a) $\pi\int_0^a b^2-[b-f(x)]^2\,dx$ (b) $\pi\int_0^b [g(y)]^2\,dy$

(c) $2\pi\int_0^a x[f(x)]\,dx$ (d) $2\pi\int_0^a [f(x)]^2\,dx$

---

(21) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $y=\sqrt{16-x^2}$ في الربع الأول حول محور y يساوي

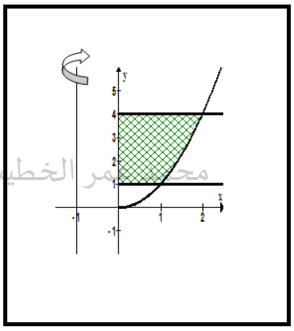


(a) $\frac{128\pi}{3}$ (b) $\frac{128}{3}$

(c) $\frac{64\pi}{3}$ (d) $\frac{256\pi}{3}$

(22) إن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y=x^2$ والمستقيمين $y=1, y=4$

وتقع بالربع الأول حول المستقيم $x=-1$ يعطى بالتكامل



(a) $\pi\int_1^4 (\sqrt{y}+1)^2\,dy$

(b) $\pi\int_1^4 (\sqrt{y}+1)^2-1\quad dy$

(c) $\pi\int_1^4 (\sqrt{y}+1)^2+1\quad dy$

(d) $\pi\int_1^4 y\,dy$

---

(23) عند تدوير المساحة المحصورة بالمستقيم $y=2$ ومحور x حول محور x على الفترة $[0,5]$

فان المجسم يكون

(a) اسطوانة نصف قطرها 2 وارتفاعها 5

(b) اسطوانة نصف قطرها 4 وارتفاعها 5

(c) اسطوانة نصف قطرها 1 وارتفاعها 5

(d) اسطوانة نصف قطرها 5 وارتفاعها 2

---

(1) إن التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = \tan x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ هو

(a) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \sec^4 x}\, dx$

(b) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$

(c) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \tan^4 x}\, dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^4 x}\, dx$

---

(2) إن طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ على الفترة $[1,3]$ يساوي

(a) 4

(b) 2.8

(c) 8

(d) 4.2

---

(3) إن طول منحنى الدالة $f(x)$ ، حيث $f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ على الفترة $[2,4]$ يساوي

(a) 8

(b) 4

(c) 2

(d) 1

---

(4) إن طول منحنى الدالة $f(x)$ ، حيث $f(x) = \int_3^x \sqrt{4t^2 - 1}\, dt$ على الفترة $[3,5]$ يساوي

(a) 9

(b) 25

(c) 16

(d) 32

(5) إن التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y=\ln\sec x$ على الفترة $[0,b]$ هو

(a) $\int_0^b |\sec x|\,dx$ **(b)** $\int_0^b \sec^2 x\,dx$

(c) $\int_0^b \sqrt{1+[\ln\sec x]^2}\,dx$ **(d)** $\int_0^b \sqrt{1+\sec^2 x\tan^2 x}\,dx$

---

(6) إن طول منحنى الدالة $y=\int_0^x e^{-u}\sin u\,du$ على الفترة $[0,1]$ يعطى بالتكامل

(a) $s=\int_0^1 \sqrt{1+e^{-x}\sin x}\,dx$ **(b)** $s=\int_0^1 \sqrt{1+e^{-2x}\sin^2 x}\,dx$

(c) $s=2\pi\int_0^1 \sqrt{1+e^{-2x}\sin^2 x}\,dx$ **(d)** $s=\int_0^1 \sqrt{1+e^{x^2}\sin^2 x}\,dx$

---

(7) إن طول منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ على الفترة $[0,1]$ يساوي

(a) $\frac{1}{2}\pi$ **(b)** $\frac{1}{4}\pi$

(c) π **(d)** 2π

---

(8) عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما $40\,ft$ ، إذا كان الحبل يتخذ شكل سلسلة معادلتها

$y=10(e^{x/20}+e^{-x/20})$ حيث $-20\le x\le 20$ فإن طول الحبل يعطى بالتكامل

(a) $\frac{1}{2}\int_{-20}^{20} e^{x/20}-e^{-x/20}\;dx$ **(b)** $\frac{1}{2}\int_{-20}^{20} e^{x/20}+e^{-x/20}\;dx$

(c) $\frac{1}{2}\int_{-20}^{20} \sqrt{e^{x/20}+e^{-x/20}}\;dx$ **(d)** $\frac{1}{2}\int_{-2}^{20} (e^{x/20}+e^{-x/20})^2\;dx$

(9) إذا تم تدوير الدالة $y=\ln x$ على الفترة $[1,e]$ حول محور x فإن التكامل الذي يمثل المساحة السطحية هو

a) $2\pi\int_1^e \ln x\sqrt{1+[\ln x]^2}\,dx$ (b) $2\pi\int_1^e \ln x\sqrt{1+x^2}\,dx$

(c) $2\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x}\sqrt{x^2+1}\,dx$ (d) $2\pi\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\sqrt{x^2+1}\,dx$

---

(10) إن مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\frac{1}{9}x^3$ حول محور x على الفترة $[0,3]$ تساوي

(a) $2\pi\int_0^3 x\sqrt{1+9x^4}\,dx$ (b) $2\pi\int_0^3 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$

(c) $6\pi\int_0^3 x^2\sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$ (d) $\frac{2}{9}\pi\int_0^3 x^3\sqrt{1+\frac{1}{9}x^4}\,dx$

---

(11) إن مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ حول محور x على الفترة $[-1,1]$ تساوي

(a) π (b) 2π

(c) 8π (d) 4π

---

(12) إن التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ حيث $1\le x\le 2$ هو

(a) $\frac{1}{2}\int_1^2 x+\frac{1}{x}\,dx$ (b) $\frac{1}{2}\int_1^2 x-\frac{1}{x}\,dx$

(c) $\int_1^2 x+\frac{1}{x}\,dx$ (d) $\int_1^2 x-\frac{1}{x}\,dx$

(13) إذا كان طول منحنى الدالة $f(x)$ الذي يمر بالنقطة $(1,6)$ يعطى بالتكامل

$s=\int_{1}^{4}\sqrt{1+9x^4}\,dx$ فإن الدالة $f(x)$ ممكن أن تكون

(a) $f(x)=3+3x^2$ **(b)** $f(x)=5+x^3$

(c) $f(x)=6+x^3$ **(d)** $f(x)=6-x^3$

الوحدة السادسة ///// اسئلة الدرس الخامس

(1) قذف جسم من ارتفاع $6\ m$ عن سطح الأرض بسرعة متجهة للأسفل قدرها $1.2 m/s$ إن الشروط الابتدائية التي تتمذج هذه المعادلة التفاضلية هي

(a) $y(0)=6\ ,\ y'(0)=-1.2$

(b) $y(0)=-6\ ,\ y'(0)=-1.2$

(c) $y(0)=6\ ,\ y'(0)=1.2$

(d) $y(0)=6\ ,\ y'(0)=0$

---

(2) قذفت كرة رأسياً للاعلى بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$ بتجاهل مقاومة الهواء ، إن زمن التحليق للكرة يساوي

(a) 2

(b) 4

(c) 3

(d) 6

---

(3) يسقط غطاس من منصة الغطس على ارتفاع $36\ m$ من سطح الماء، بتجاهل مقاومة الهواء

إن سرعة الغطاس عند اصطدامه بسطح الماء تساوي

(a) $26.5\ m/s$

(b) $-26.5\ m/s$

(c) $72\ m/s$

(d) $-72\ m/s$

---

(4) قذف جسم للأسفل من ارتفاع $160\,ft$ عن سطح الارض وبسرعة متجهة $48\,ft/s$ فإن السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض تساوي (تجاهل مقاومة الهواء)

(a) $-112\ ft/s$

(b) $-101\ ft/s$

(c) $-54\ ft/s$

(d) $-32\ ft/s$

(5) قذفت كرة من الأرض وبسرعة متجهة ابتدائية $98\ m/s$ وبزاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ بتجاهل مقاومة الهواء إن معادلة ارتفاع الكرة عند أي زمن t تعطى بالمعادلة

(a) $h(t) = -4.9t^2 + 98$ **(b)** $h(t) = -4.9t^2 + 98t$

(c) $h(t) = -4.9t^2 + 49\sqrt{3}t$ **(d)** $h(t) = -4.9t^2 + 49t$

---

(6) قذفت كرة بسرعة متجهة ابتدائية $98\ m/s$ وبزاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ بتجاهل مقاومة الهواء ، إن معادلة المدى الافقي للكرة عند أي زمن t تعطى بالمعادلة

(a) $x(t) = 49\sqrt{3}\ t$ **(b)** $x(t) = 49\sqrt{3}$

(c) $x(t) = 49\ t$ **(d)** $x(t) = -4.9t^2 + 49t$

---

(7) قذفت كرة بسرعة متجهة ابتدائية $98\ m/s$ وبزاوية قدرها $\frac{\pi}{6}$ بتجاهل مقاومة الهواء ، إن المدى الأفقي للكرة تقريباً يساوي

(a) 424 **(b)** 526

(c) 849 **(d)** 268

---

(8) إن زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق من الأرض بزاوية 30° و بسرعة ابتدائية $40\ m/s$ هما

(a) $t = 4s \quad , x = 81.6\ m$ **(b)** $t = 4.08s \quad , x = 141.4\ m$

(c) $t = 2s \quad , x = 70\ m$ **(d)** $t = 8.163s \quad , x = 282\ m$

(9) تريد طائرة على ارتفاع $1050m$ ، اسقاط امدادات الى موقع معين على الارض، اذا كان للطائرة سرعة افقية $115m/s$ ، فان المسافة التي ينبغي ان تبعدها الطائرة عن الهدف عند اطلاق الامدادات من اجل ان تسقط في الموقع المستهدف هي

(a) 1190 (b) 1682

(c) 932 (d) 841

---

(10) قذف جسم من نقطة الأصل بسرعة متجهة ابتدائية $4\ ft/s$ وبزاوية قدرها 45° بتجاهل مقاومة الهواء ، إن معادلة الحركة بدلالة x و y تعطى بالمعادلة

(a) $y=-2x^2+x$ (b) $y=-x^2+x$

(c) $y=-x^2+2x$ (d) $y=-16x^2+4x$

---

(11) يسقط جسم من ارتفاع $H\ ft$ من سطح الارض فإن الجسم يصل إلى الأرض بعد الزمن T يساوي (تجاهل مقاومة الهواء)

(a) $T=\sqrt{H}\ s$ (b) $T=-8\sqrt{H}\ s$

(c) $T=\frac{1}{2}\sqrt{H}\ s$ (d) $T=\frac{1}{4}\sqrt{H}\ s$

---

(12) إن زمن التحليق لجسم أطلق من الأرض بزاوية 60° و بسرعة ابتدائية $30\ m/s$ هو

(a) $t=5.30s$ (b) $t=4.33s$

(c) $t=2.08s$ (d) $t=3.06$

إجابات الوحدة السادسة

الدرس الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	B	B	D	B	A	C	B	D	A	B	C	D	D	C	A	B	B	C	C
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31									
	B	C	A	B	A	B	D	B	B	A	A									

الدرس الثاني	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	B	B	B	C	A	B	C	C	A	B	B	A	A	B	C	D	A	C	A
	21	22	23																	
	A	B	A																	

الرابع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13							
	B	B	B	C	A	B	A	B	C	D	D	A	B							

الخامس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12								
	A	B	B	A	D	A	C	B	B	A	D	A								

انتهت الوحدة السادسة بحمد الله ...... **إعداد : محمد عمر الخطيب**