تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

almanahj.com/ae

موقع المناهج الإماراتية

الملف مذكرة شاملة الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم

روابط مواد الصف الثاني عشر المتقدم على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	كل مايخص الاختبار التكويني لمادة الرياضيات للصف الثاني عشر يوم الأحد 9/2/2020
2	تدريبات متنوعة مع الشرح على الوحدة الرابعة(النهايات والاتصال)
3	تدريبات متنوعة على تطبيقات الاشتقاق
4	قوانين هندسية
5	الاختبار القياسي في الرياضيات

الرياضيات

سلسلة (RA) باللغتين
العربية والإنجليزية

الوحدة الرابعة

CHPTER 4

الفصل الدراسي الثاني

الثاني عشر متقدم

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

RA
MATHEMATICS

by.sabry 0020102696817

الأستاذ / هلال حسين

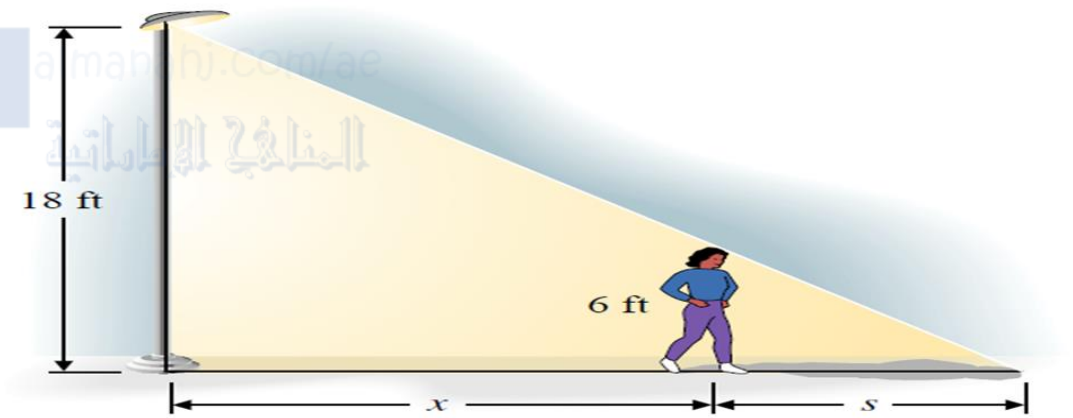
2022/2021

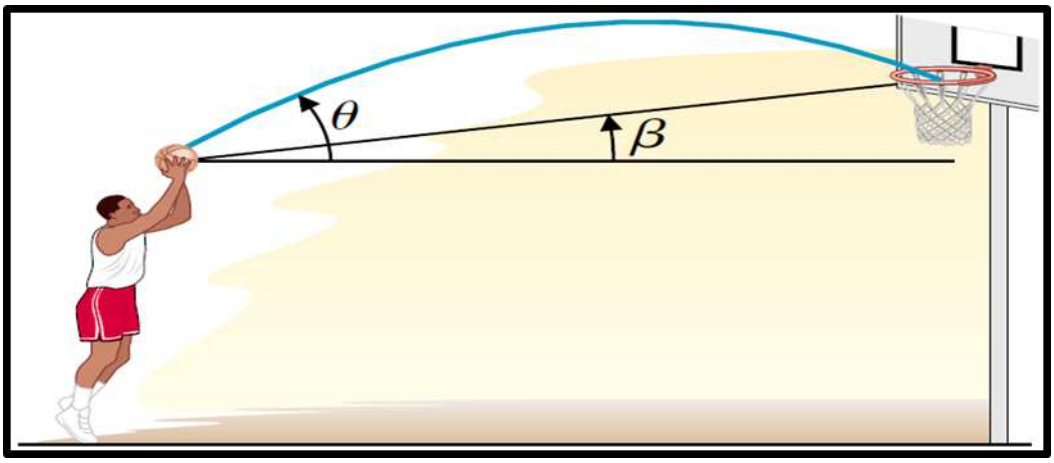
HILAL HUSSEIN

CHAPTER 4 الوحدة الرابعة

تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation





الدرس الثالث:- القيم العظمى والصغرى MAXIMUM AND MINIMUM VALUES

القيم العظمى والصغرى المطلقة (ملخص)

Absolute maximum and minimum values (summary)

Definition: Maximum values تعريف: القيم القصوى

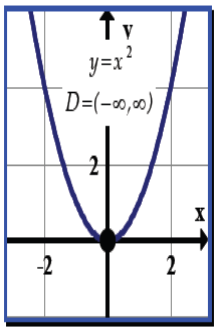
* إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ ، فإن $f(c)$ تكون :

(أ) القيمة العظمى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \le f(c)$ لكل x تنتمي إلى مجال D.

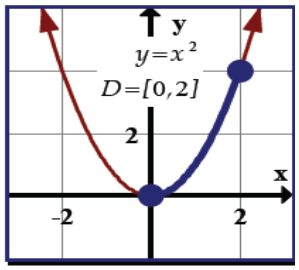
(ب) القيمة الصغرى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \ge f(c)$ لكل x تنتمي إلى المجال D.

ملاحظة: القيم القصوى هي (القيم العظمى و الصغرى المطلقة أو القيم العظمى و

(أ) قيمة صغرى فقط



(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى

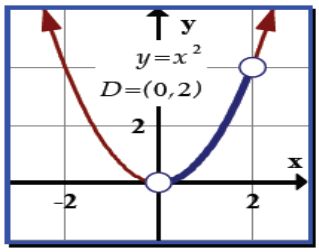


قاعدة الدالة	مجالها D	القيم القصوى المطلقة فوق D
(أ) $y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	لا يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$ There is no absolute maximum value An absolute minimum value of 0 at x = 0
(ب) $y = x^2$	$[0, 2]$	قيمة عظمى مطلقة مطلقة مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$ An absolute maximum value Absolute equal to 4 at x = 2 An absolute minimum value of 0 at x = 0
(ج) $y = x^2$	$(0, 2]$	قيمة عظمى مطلقة مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا يوجد قيمة صغرى مطلقة An absolute maximum value of 4 at x = 2 There is no absolute minimum value

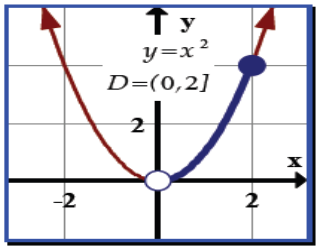
HILAL HUSSEIN

(د) $y = x^2$	$(0, 2)$	لا توجد قيم قصوى مطلقة There are no absolute maximum values

(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط

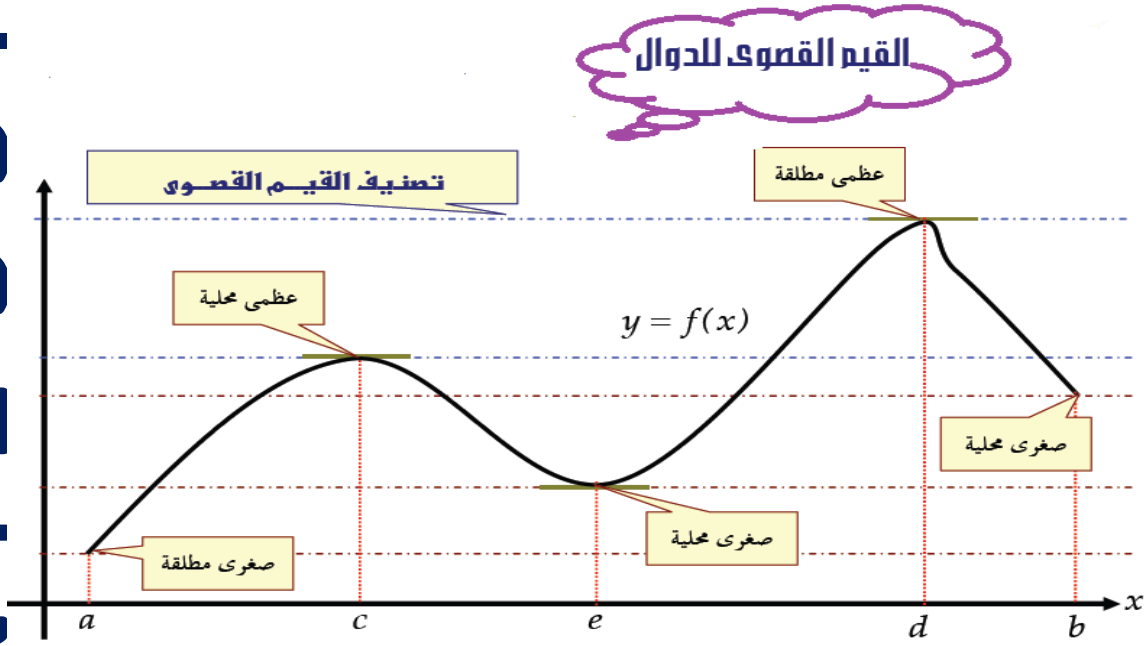


almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

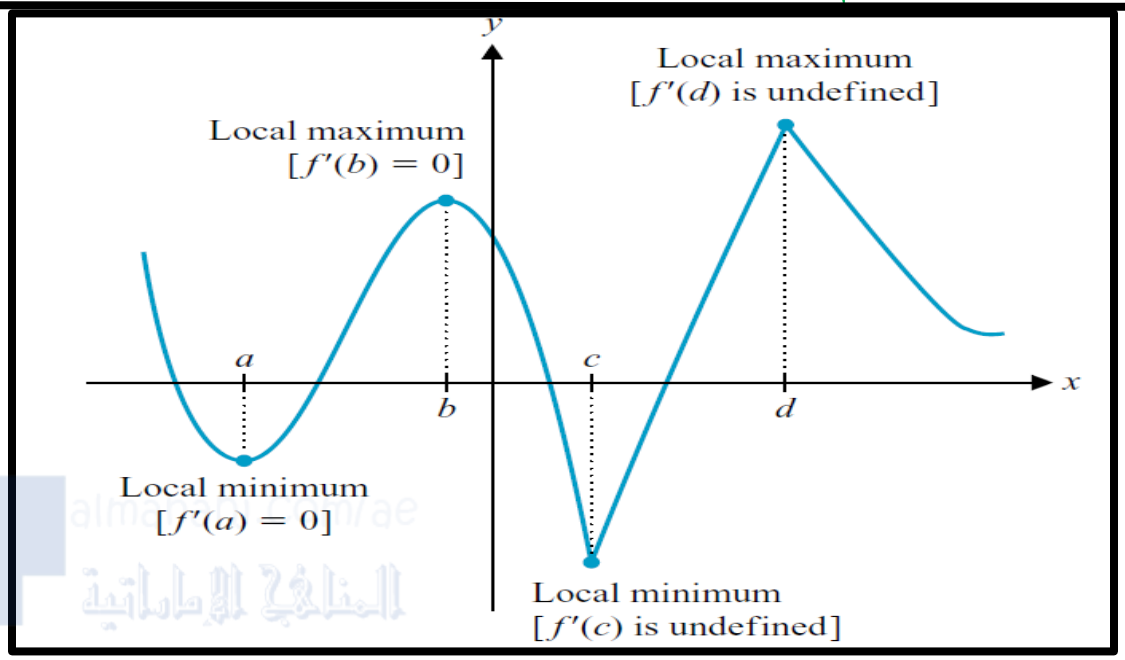
نظرية القيمة القصوى Maximum value theory

إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى و قيمة صغرى على هذه الفترة .

If f is a continuous function over a closed period [a, b] then f has a maximum and minimum value over that interval.



HILAL HUSSEIN



The critical number:العدد الحرج

يسمي العدد c مجال دالة معينة f عدداً حرجاً لـ f إذا

كان $f'(x) = 0$ أو $f'(c)$ غير معرفة .

A number c in the domain of a function f is called a critical number of f if $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ is undefined.

تعريف :القيم القصوى المحلية

إذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f ، فإن $f(c)$ تكون:

(i) قيمة عظمى محلية عند c إذا و فقط إذا كانت

$f(x) \leq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

(ii) قيمة صغرى محلية عند c إذا و فقط إذا كانت

$f(x) \geq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي c .

HILAL HUSSEIN

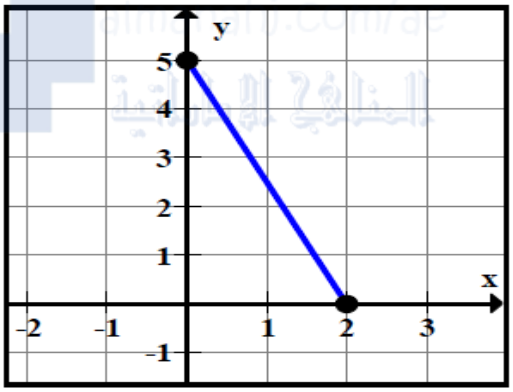
Definition: local maximum values

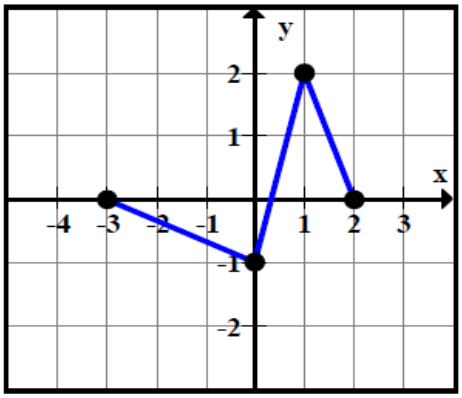
If c is an internal point in the domain of the function f, then f (c) is:

(I) A local maximum of c if and only if it is f (x) ≤f (c) for every x in an open interval containing c. (II) A local minimum value of c if and only if it is f (x) ≥f (c) for every x in an open interval containing c.

السؤال الرابع :- أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى

Fourth question: - Find the points for which there are maximum values





… … … …

السؤال الخامس:- Fifth question

أوجد القيم القصوي المطلقة لدالة محددة في كل فترة مشار إليها.

Find the absolute maximum values of the specified function in each indicated interval.

(1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ (In the two periods) في الفترتين $(a)\ [-3,1]$, $(b)\ [-1,3]$

.....

.....

.....

.....

(2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (In the two periods) في الفترتين $(a)\ [-4,-2]$, $(b)\ [-1,3]$

.....

.....

.....

.....

(3) $f(x) = \sin x + \cos x$ (In the two periods) في الفترتين $(a)\ [0,2\pi]$, $(b)\ \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

.....

.....

.....

.....

(4) $f(x) = x^2 e^{-4x}$ (In the two periods) في الفترتين $(a)\ [-2,0]$, $(b)\ [0,4]$

.....

.....

.....

HILAL HUSSEIN

(5) $f(x) = tan^{-1}(x^2)$ (In the two periods) في الفترتين $(a)\ [0,1]$, $(b)\ [-3,4]$

… … … …

(10) $y = \begin{cases} 5 - 2x^2 & , x \le 1 \\ x + 2 & , x > 1 \end{cases}$ (On the period) على الفترة $[-1, 3]$

(11) $y = \sin x \times \cos x$ (On the period) على الفترة $[0, 2\pi]$

Question Six: - السؤال السادس :-

أوجد كل الأعداد الحرجة و القيم القصوى المحلية أن وجدت.

Find all critical numbers and local maximums, if any.

(1) $y = \begin{cases} 3 - x & , x < 0 \\ 3 + 2x - x^2 & , x \ge 0 \end{cases}$

HILAL HUSSEIN

(2) $f(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $, 0 \le x \le \frac{7\pi}{4}$

(3) $y = x^{\frac{2}{3}}(x + 2)$

(4) $y = 2x\sqrt{x + 1}$

(5) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

HILAL HUSSEIN

(6) $y = xe^{-2x}$

(7) $y = |x^2 - 1|$

(8) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(9) $y = \frac{x^2-x+4}{x-1}$

HILAL HUSSEIN

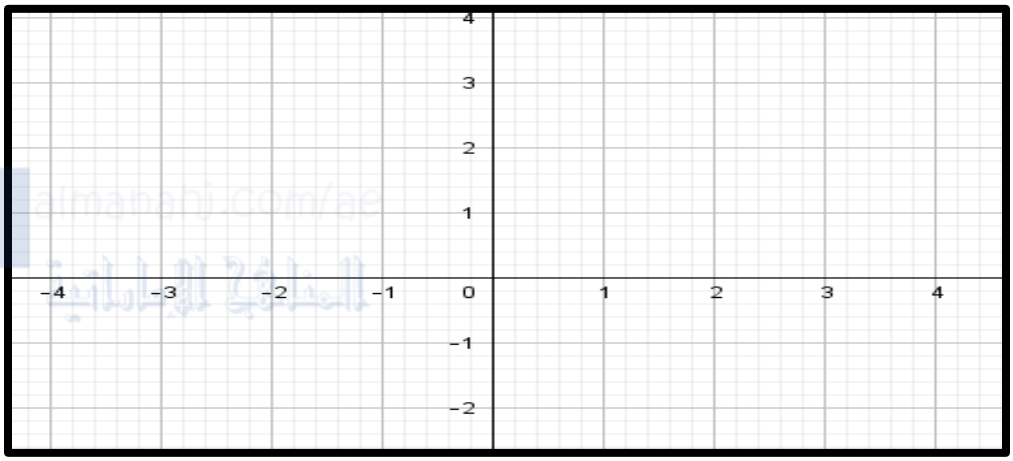
(10) $y = \frac{x^2-2}{x+2}$

… … … …

Question Eight: - السؤال الثامن :-

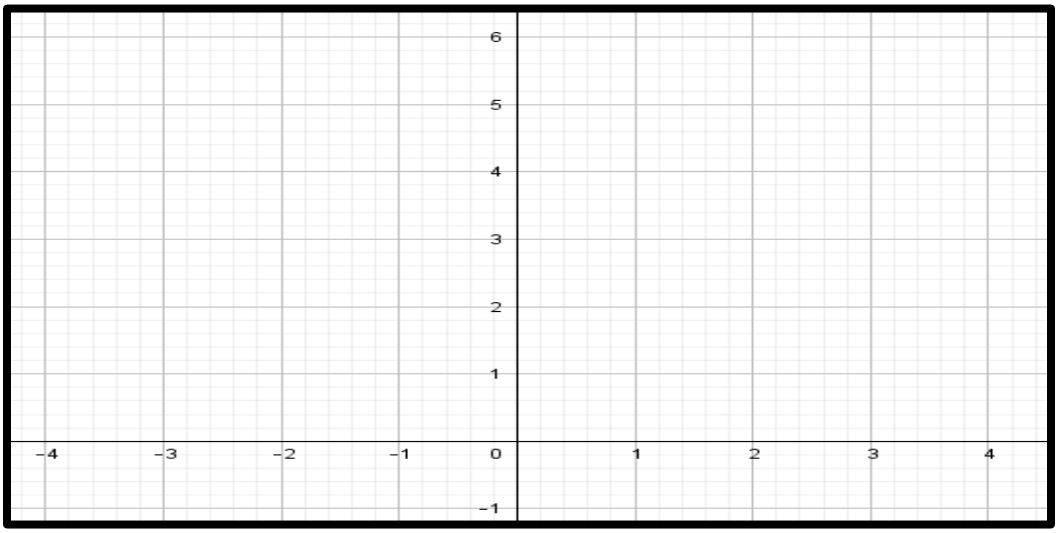
(1) Draw a graphical representation of the function f such that the absolute maximum value of $f(x)$ in the period [-2, 2] is equal to 3 and the absolute minimum value does not exist.

(1) ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ$f(x)$ في الفاصل $[-2,2]$ يساوي 3 وتكون القيمة الصغرى المطلقة غير موجودة.



(2) Draw a graphical representation of the function f such that the absolute maximum value of $f(x)$ in the period $(-2,2)$ does not exist and the absolute minimum value is equal to 3

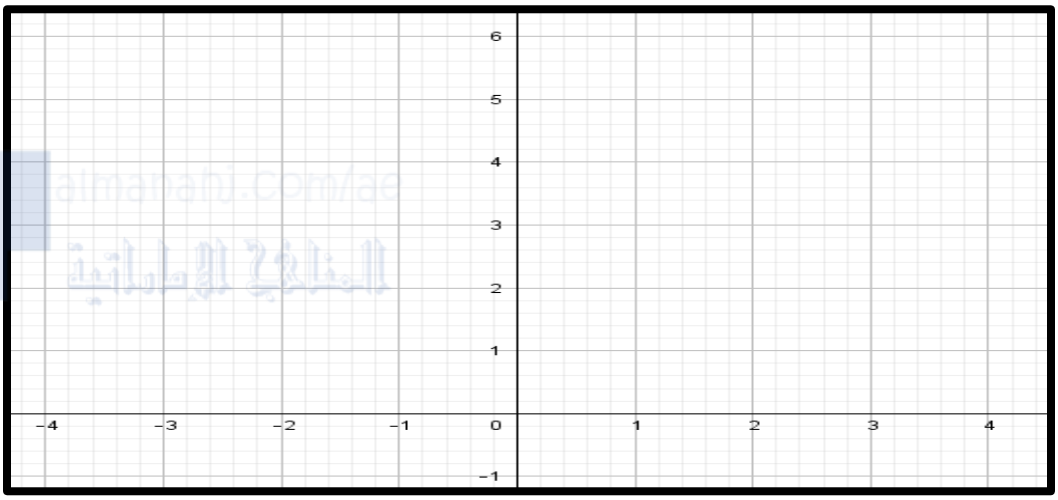
(2) ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ$f(x)$ في الفاصل $(-2,2)$ غير موجودة وتكون القيمة الصغرى المطلقة 3.



HILAL HUSSEIN

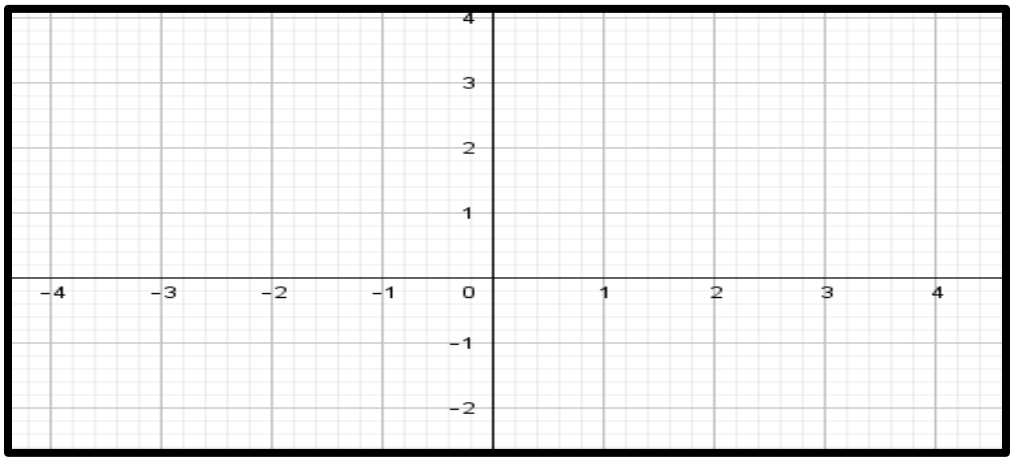
(3) ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة f بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة لـ$f(x)$ في الفاصل $(-2,2)$ **يساوي** 4 وتكون القيمة الصغرى المطلقة 2 .

(3) Draw a graphical representation of the function f such that the absolute maximum value of $f(x)$ in the period $(-2,2)$ is equal to 4 and the absolute minimum value is equal to 2



(4) ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة f لا توجد القيمة العظمى المطلقة لـ$f(x)$ في الفاصل $[-2,2]$ وكذلك لا توجد قيمة صغرى مطلقة.

(3) Draw a graphical representation of the function f such that the absolute maximum value of $f(x)$ in the period $[-2,2]$ does not exist and the absolute minimum value does not exist



HILAL HUSSEIN

السؤال التاسع :- Question Nine

(1) لتكن $f(x)$ حدودية من الدرجة الثانية في x بحيث منحني الدالة $f(x)$

يمر بالنقطة $(5\,,0)$ وللدالة $f(x)$ قيمة قصوي محلية

عند $x = 1\,, f''(x) = 4$ أوجد $f(x)$؟

(1) Let $f\ (x)$ be a second degree parametric in x, so that the curve of the function $f\ (x)$ passes through the point $(5, 0)$ and the function $f\ (x)$ has a local maximum value at $x\ =\ 1\ , f''(x)\ =\ 4$ Find $f(x)$?

… … … …

الدرس الرابع :- الدوال المتزايدة والمتناقصة

INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS

تعريف: الدالة المتزايدة و الدالة المتناقصة

Definition: an incremental function and a decreasing function

لتكن f دالة معرفة على الفترة I ولتكن : x_1, x_2 أي نقطتين في الفترة I

(1) f دالة متزايدة على I إذا كان : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(2) f دالة متناقصة على I إذا كان : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Let f be a function defined on the interval I and let it be: x_1, x_2 i.e. two points in the interval I.

(1) f is an increasing function of I if: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(2) f is a decreasing function on I if: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

نظرية:- الدالة المتزايدة و الدالة المتناقصة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على الفترة I

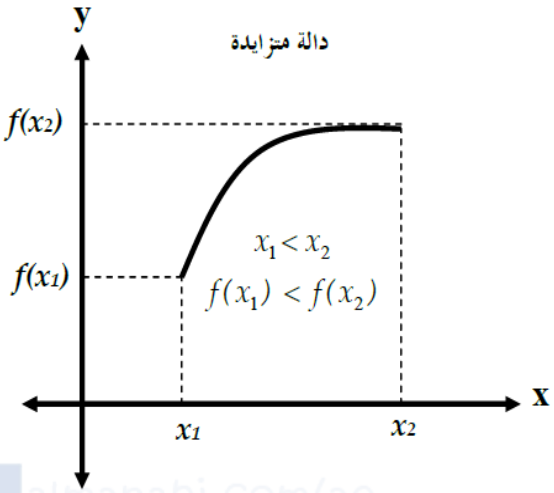
(1) إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كل قيم $x \in I$، فإن f تكون متزايدة في I

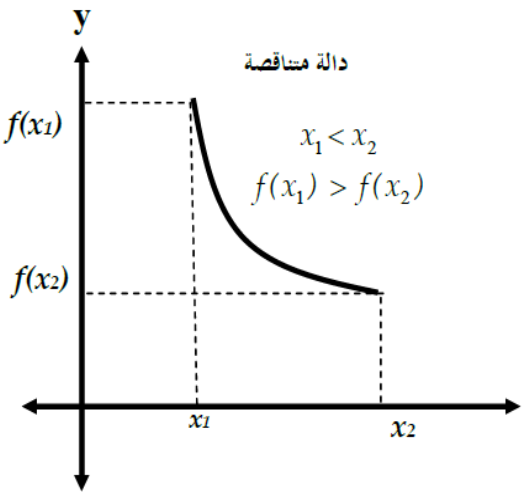
(2) إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كل قيم $x \in I$، فإن f تكون متناقصة في I

THEOREM

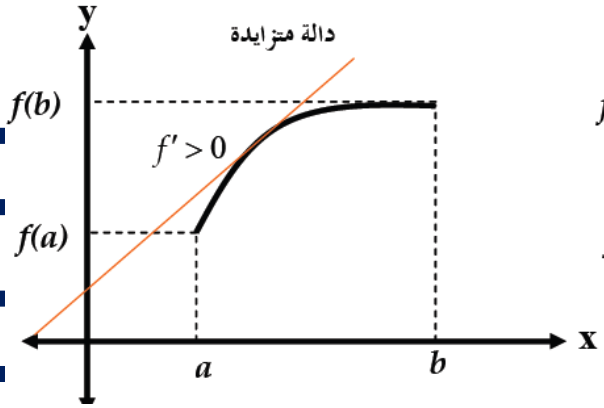
Suppose that f is differentiable on an interval I .
(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in I$, then f is increasing on I .
(ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in I$, then f is decreasing on I .

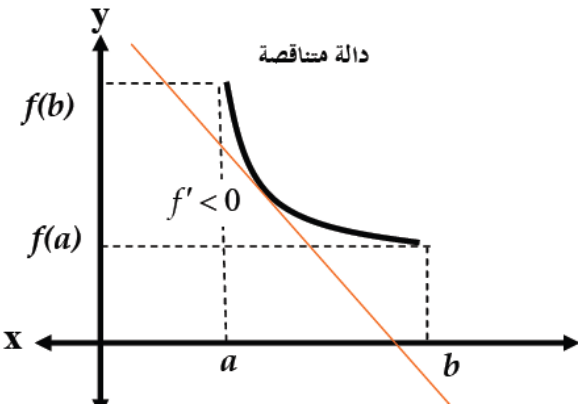
HILAL HUSSEIN
almanahj.com/ae المناهج الإماراتية





almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية





من دراسة إشارة $f'(x)$ ماذا توجد ؟

- الأعداد الحرجة
- فترات التزايد والتناقص
- القيم القصوي المحلية

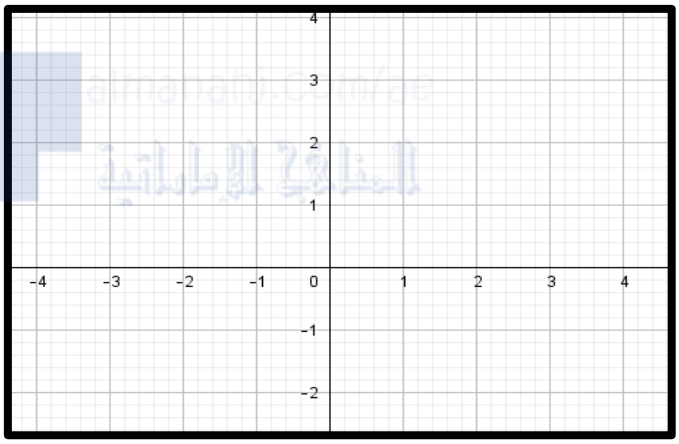
HILAL HUSSIN

السؤال العاشر :- Question 10

(i) حدد فترات التزايد والتناقص للدوال التالية ثم أوجد القيم القصوي المحلية أن وجدت وارسم تمثيلاً بيانياً.

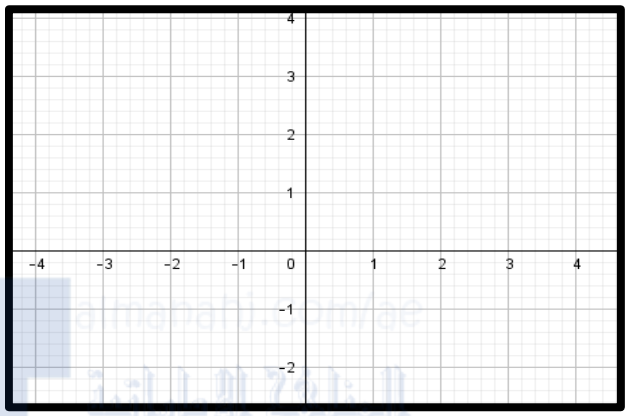
(i) Determine the increasing and decreasing periods of the following functions, then Find Local maximum values, if any, and plot a graph

$(1)\ f(x) = x^3 - 3x + 2$

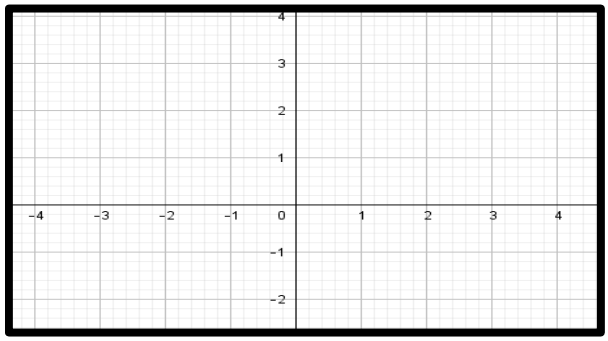


. … … …

$(3)\ f(x) = ln(x^2 - 1)$



$(3)\ f(x) = e^{x^2-1}$



(ii) استخدم اختبار المشتقة الأولي لتصنيف نوع القيم القصوي المحلية من حيث نوعها صغري أم عظمي محلية أوغير ذلك

(ii) The primary derivative test was used to classify the type of local maximal values in terms of micro, local bone or other types.

$(1)\ f(x) = x^4 + 4x^3 - 2$

$(2)\ f(x) = tan^{-1}(x^2)$

$(3)\ f(x) = sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

$(4)\ f(x) = xe^{-2x}$

$(5)\ f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

$(6)\ f(x) = \frac{x}{1+x^4}$

HILAL HUSSEIN

$(7)\ f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

……

……

……

……

$(6)\ f(x) = x^2 \times e^{-x}$

……

……

……

……

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

السؤال الحادي عشر Question eleventh

Draw a graph of a function with the following properties.

ارسم تمثيلاً بيانياً لدالة بالخصائص التالية .

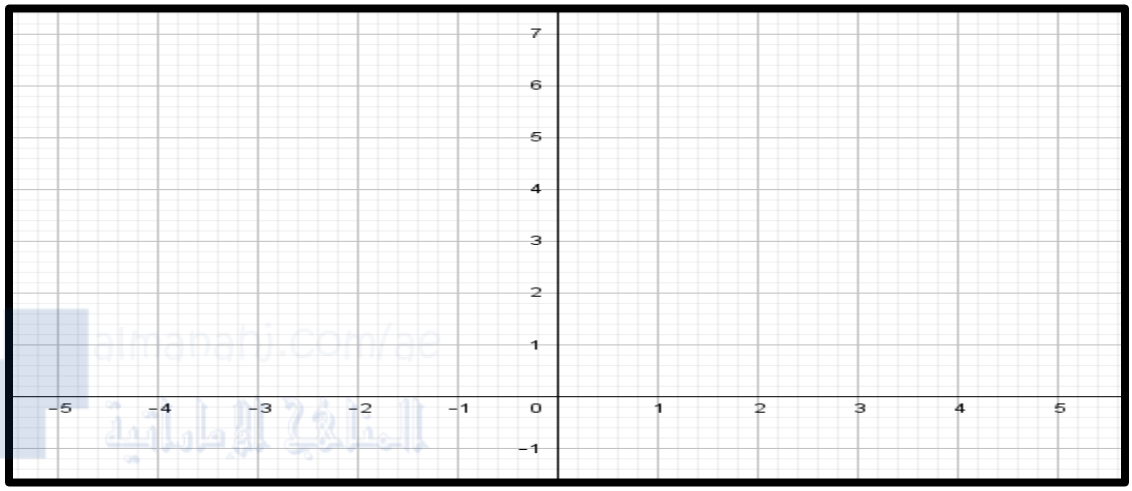
$(1)\ f(0) = 1, f(2) = 5, f'(x) < 0$ لكل $x < 0, x > 2,$

$f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 2$.

HILAL HUSSEIN

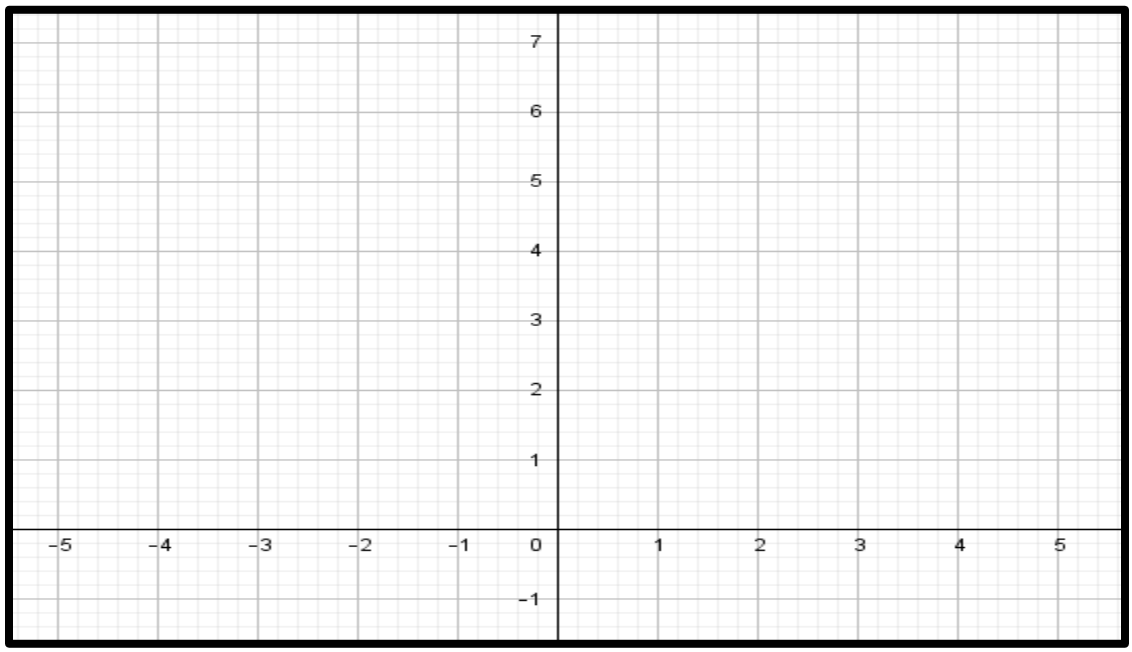
(2) $f(-1) = 1, f(2) = 5, f'(x) < 0$ لكل $x < -1, x > 2$,

$f'(x) > 0$ لكل $-1 < x < 2$, $f'(-1) = 0, f'(2)$ غير موجودة.



(3) $f(3) = 0, f'(x) < 0$ لكل $x < 0, x > 3$,

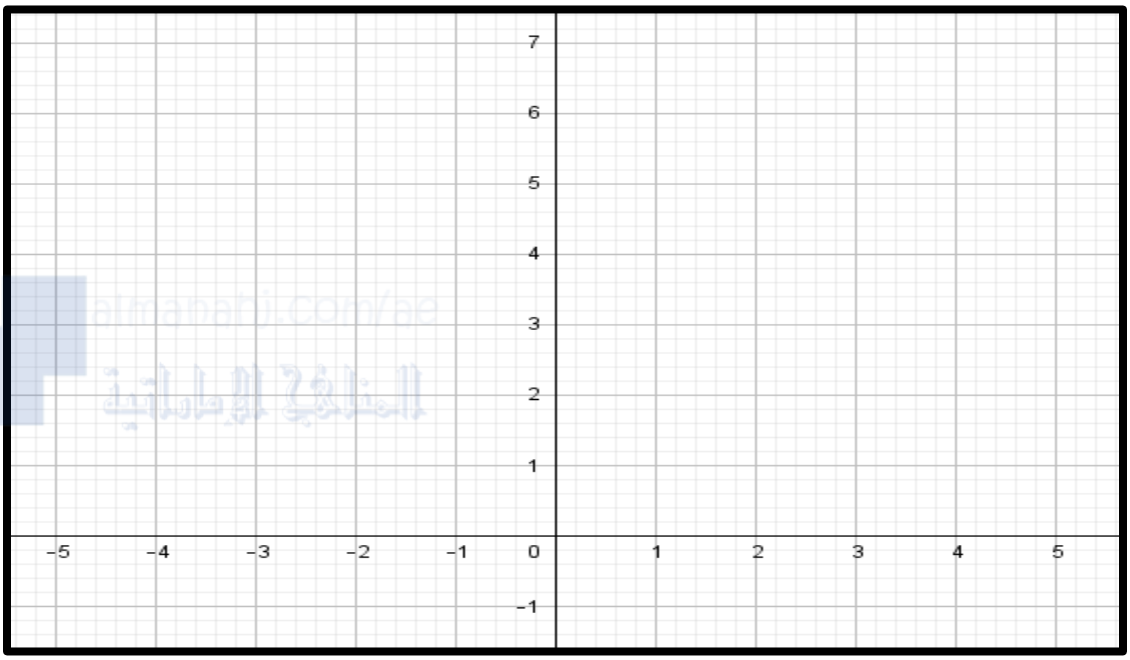
$f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 3$, $f'(3) = 0$ حيث $f(0), f'(2)$ غير موجودة.



HILAL HUSSEIN

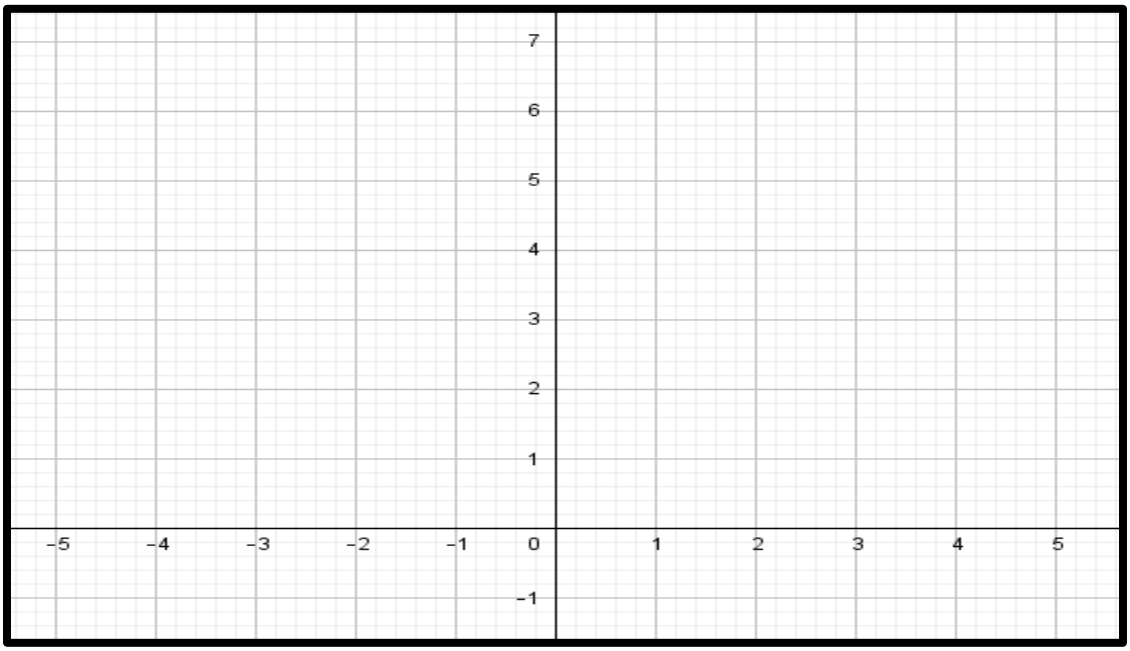
(4) $f'(x) < 0$ لكل $x < 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$,

$f'(x) > 0$ لكل $x > 1$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$.



(5) $f'(x) < 0$ لكل $x < -1$, $0 < x < 2$, $x > 2$, $f(-1) = f(2) = 0$,

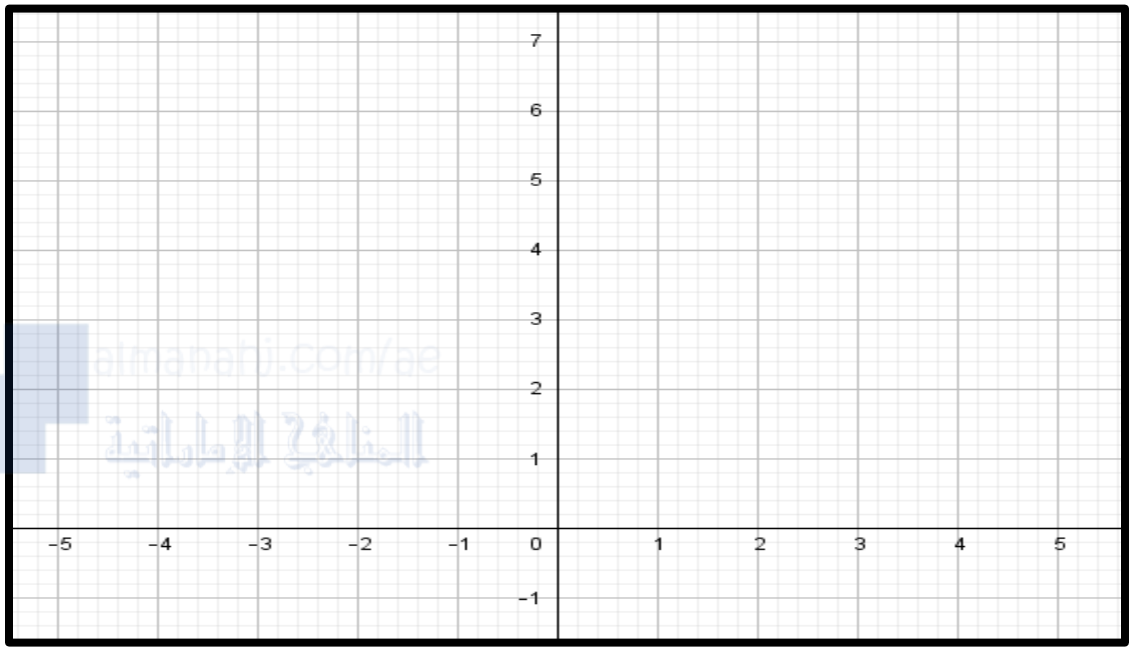
$f'(x) > 0$ لكل $-1 < x < 0$, $f'(-1)$ غير موجودة , $f'(2) = 0$.



HILAL HUSSEIN

$f'(x) < 0(6)$ لكل $x > 3$, $f(0) = 0, f(3) = -1$ $f'(x) > 0$,

لكل $x < 0, 0 < x < 1, 1 < x < 3$, $f'(1)$ غير موجودة, $f'(0) = 0$, $f'(3) = 0$.



السؤال الثاني عشر :- Question 12: -

Find all asymptotes and maximal values and plot a representation.

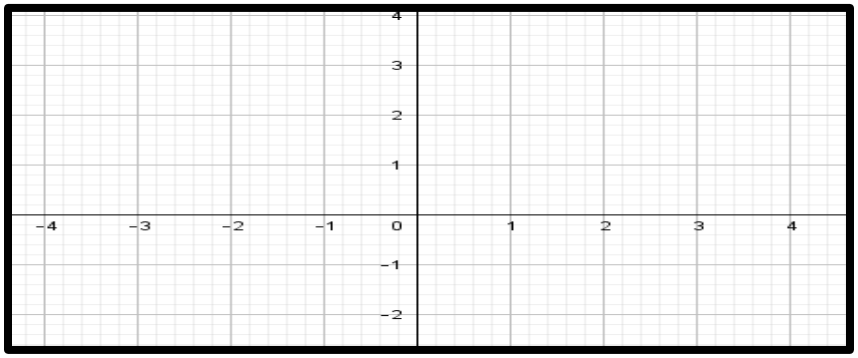
أوجد كافة خطوط التقارب والقيم القصوي , وارسم تمثيلاً بيانياً .

$(1)\ y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

……

……

……



HILAL HUSSEIN

$$(2)\ y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

……

……

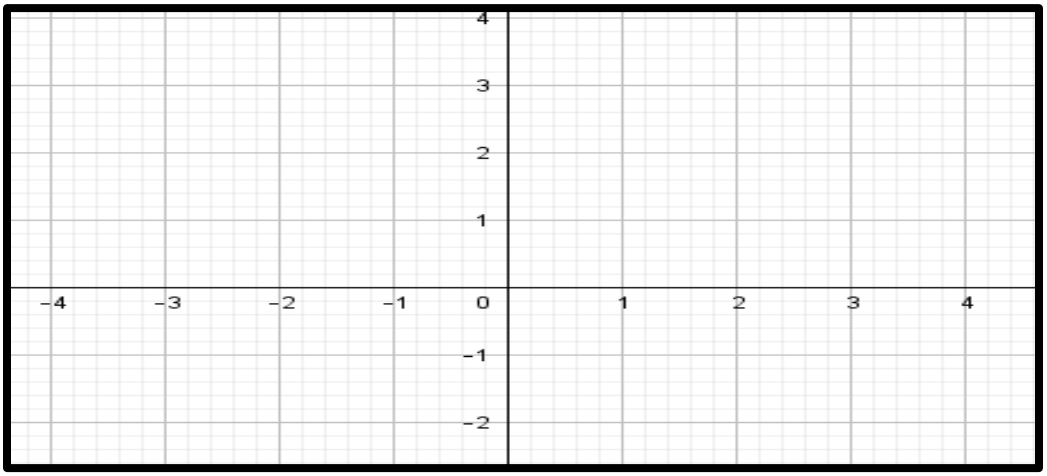
……

$$(3)\ y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

……

……

……



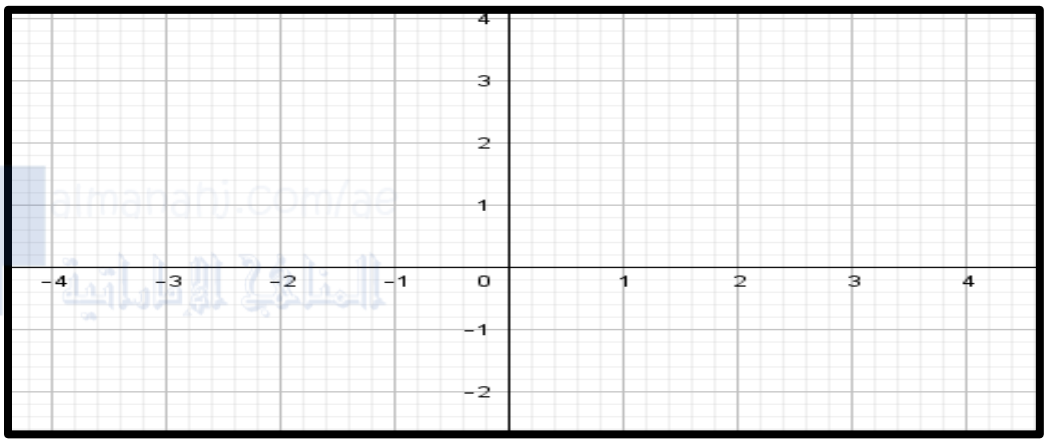
HILAL HUSSEIN

$(4)\ y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

……

……

……



السؤال الثالث عشر :- Question 13: -

(1)اذكر مجال الدالة $sin^{-1}x$ وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

(1) Mention the domain of the function $sin^{-1}x$ and determine where it is increasing or decreasing.

……

……

……

(2)اذكر مجال الدالة $sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}tan^{-1}x\right)$ وحدد أين تكون متزايدة أم متناقصة.

(1) Mention the domain of the function $sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}tan^{-1}x\right)$ and determine where it is increasing or decreasing.

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(3) أثبت أن $f(x)$ متزايدة على مجالها :

(3)Prove that the function is increasing over its domain

$$f(x) = 2x - \sin x \quad (i)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \cos x \quad (ii)$$. حيث $x \in [0, \pi]$

(4) أثبت أن $f(x)$ متناقصة على مجالها : $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

(4)Prove that the function is Decreasing over its domain

HILAL HUSSEIN

الدرس الخامس والسادس :- التقعر واختبار المشتقة الثانية

Lesson five and six: Concavity and the second derivative test

الرسم البياني لدالة قابلة للاشتقاق $y = f(x)$ يكون :

(1) مقعر لأعلى في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متزايدة في الفترة I .

(2) مقعر لأسفل في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متناقصة في الفترة I .

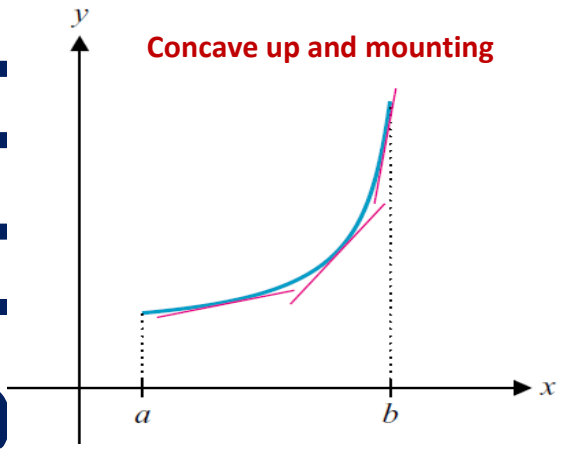
الرسم البياني لدالة قابلة للاشتقاق مرتين $y = f(x)$ يكون :

(1) مقعر لأعلى في أي فترة حيث $y'' > 0$.

(2) مقعر لأسفل في أي فترة حيث $y'' < 0$.

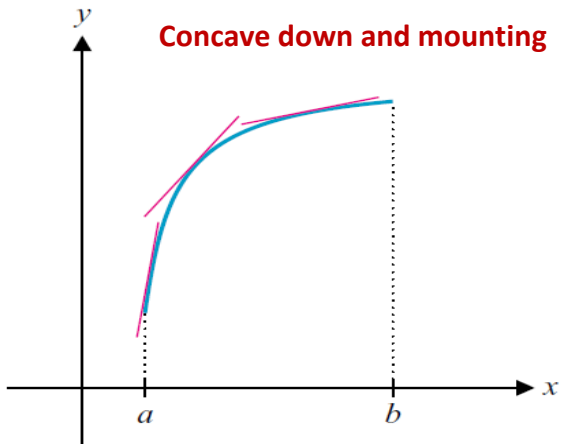
تقعر لأعلي ومتزايدة

Concave up and mounting

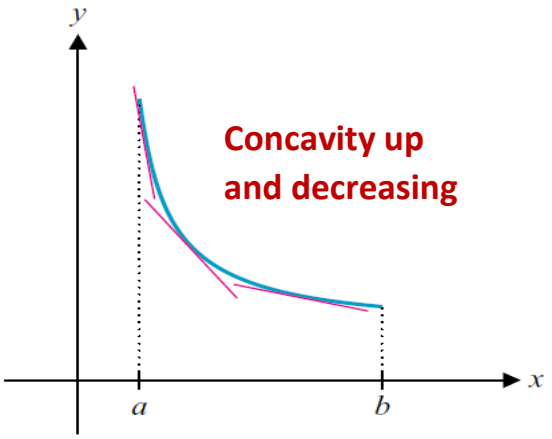


تقعر لأسفل ومتزايدة

Concave down and mounting

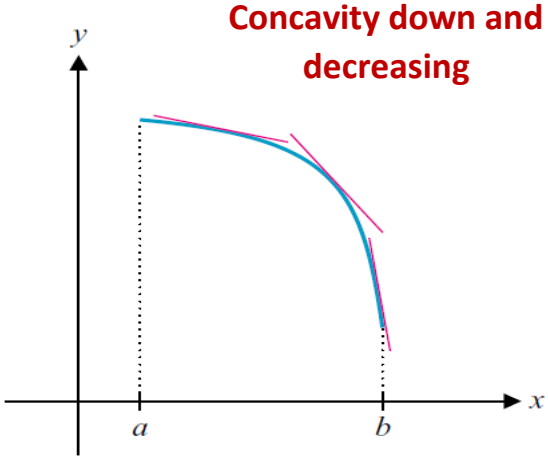


Concavity up and decreasing



تقعر لأعلي ومتناقصة

Concavity down and decreasing



تقعر لأسفل ومتناقصة

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية
HILAL HUSSEIN

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المفتوحة تحتوي العدد a و كان منحني الدالة يغير تقعره عند a فأن النقطة $(a , f(a))$ تسمي نقطة انقلاب (انعطاف) للمنحني .

اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوي المحلية

The second derivative test to determine local maximum values

(1) إذا كانت $f'(c)=0$, $f''(c)<0$ فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x=c$

(2) إذا كانت $f'(c)=0$, $f''(c)>0$ فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x=c$

السؤال الرابع عشر :- Question Fourteenth

(i) حدد فترات التقعر لأعلي ولأسفل ونقاط الانعطاف :-

(i) Determine the periods of concavity up and down and the points of inflection.

$(1)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

……

……

……

$(2)\ f(x) = x + \frac{1}{x}$

……

……

……

$(3)\ f(x) = tan^{-1}(x^2)$

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(ii) استخدم طرق تحليلية (جبرية) لإيجاد

النقاط الحرجة , فترات التزايد والتناقص , القيم القصوي المحلية ,

فترات التقعر , نقاط الانعطاف .

(ii) Use analytical (algebraic) methods to find

Periods of concavity, inflection points, critical points, periods of increase and decrease, and local maximums

$$(1)\ y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x - 2}$$

……

……

……

……

$$(2)\ y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

……

……

……

……

$$(3)\ y = 5 - x^{\frac{1}{3}}$$

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

$(4)\ y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

……

……

……

(iii)إستخدم إختبار المشتقة الثانية فى إيجادالقيم القصوي المحلية للدوال التالية:-

Use the second derivative test to find the local maximum values for the following functions:-

$(1)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

……

……

……

……

$(2)\ f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$

……

……

……

……

……

……

$(3)\ f(x) = xe^{-x}$

……

……

……

……

HALAL HUSSEIN

$(4)\ \ f(x) = e^{-x^2}$

……

……

……

……

$(5)\ \ f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

……

……

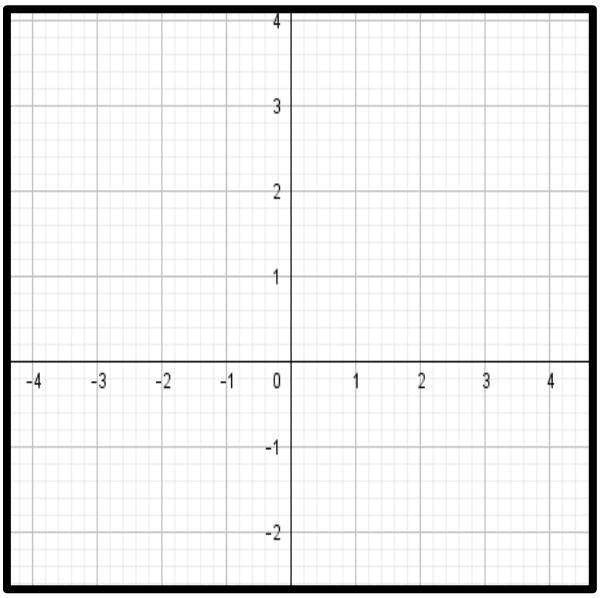
……

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

(iv)حدد جميع المميزات المهمة للدوال وارسم تمثيلاً بيانياً لكل دالة .

Identify all the important features of the functions and plot a representation of each function

$(1)\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$



……

……

……

……

……

……

……

……

……

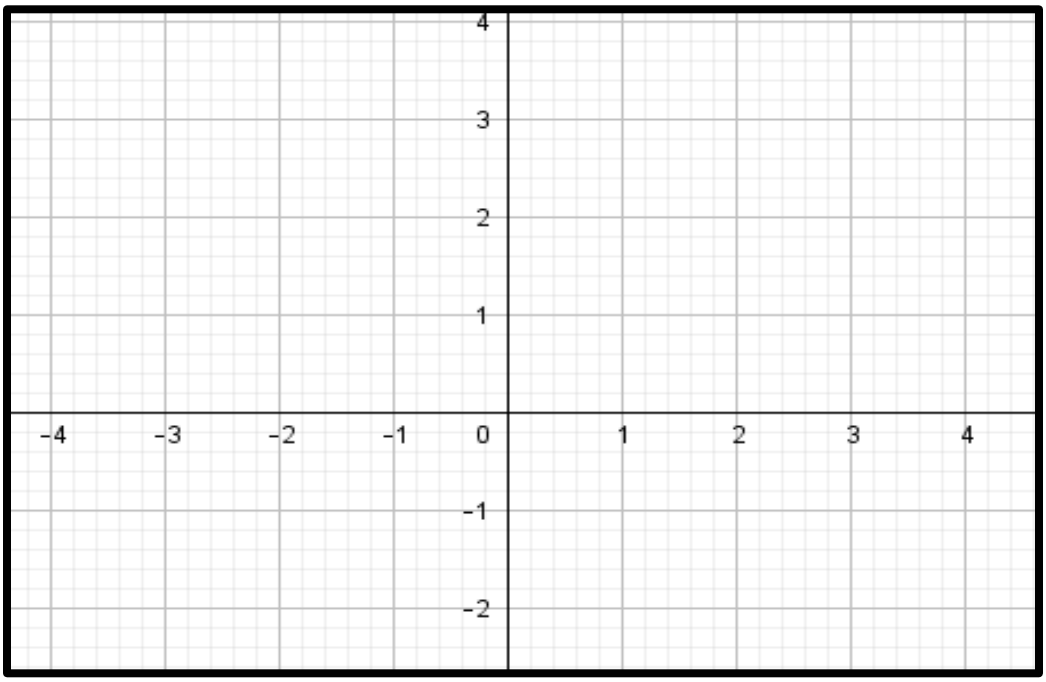
……

……

……

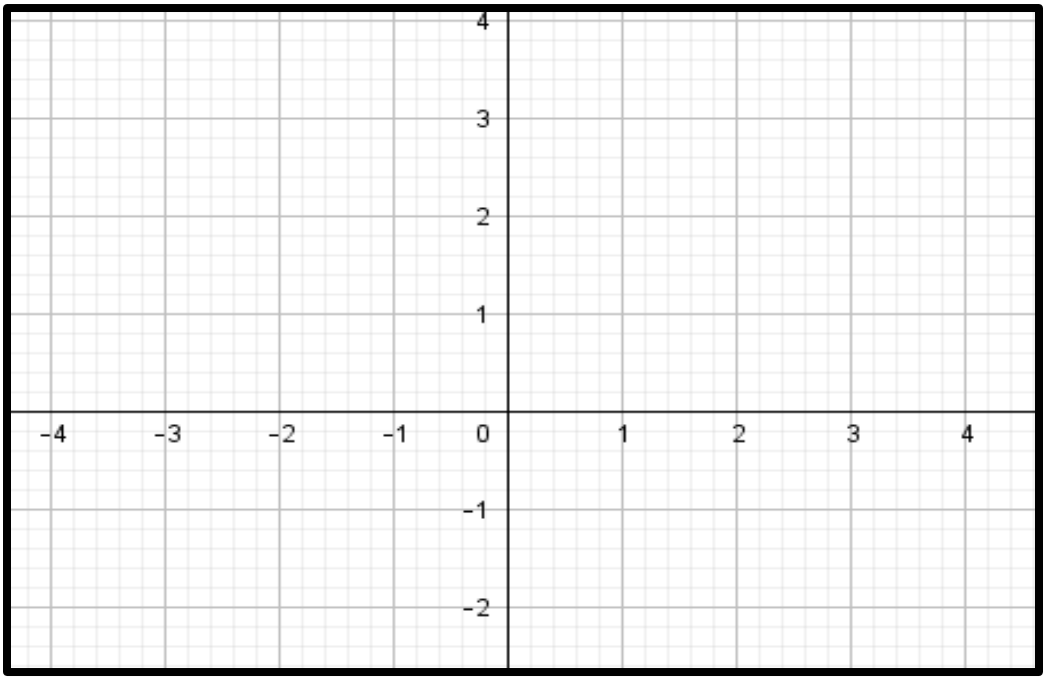
HILAL HUSSEIN

$$(2)\ f(x) = \frac{x}{x+2}$$



HILAL HUSSEIN

$(3)\ f(x) = x\,ln\,x$

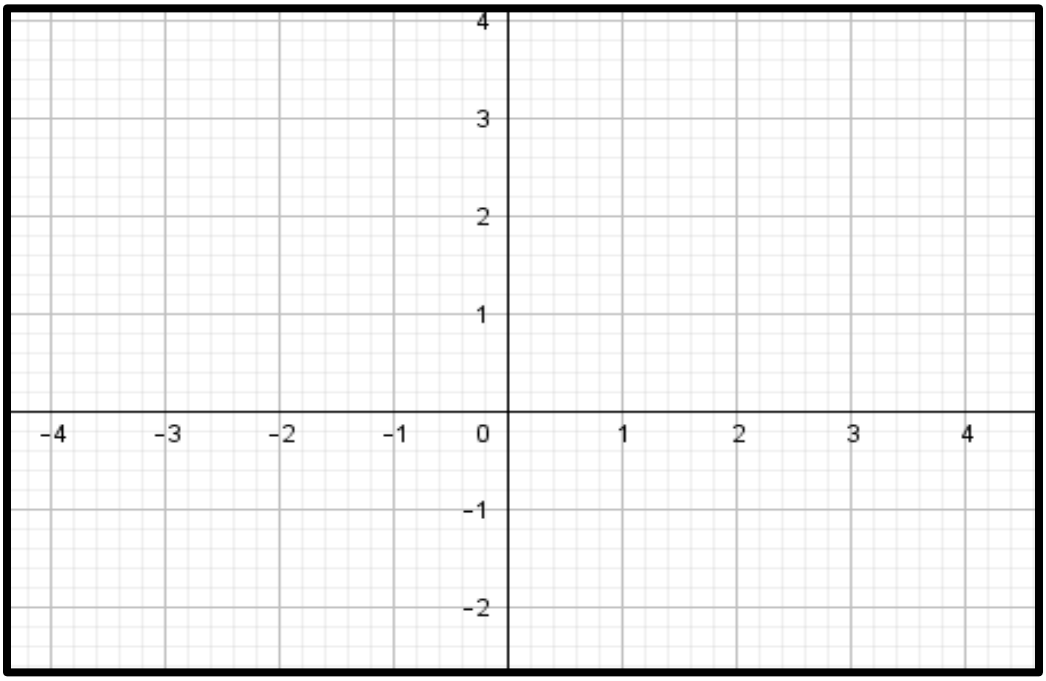


HILAL HUSSEIN

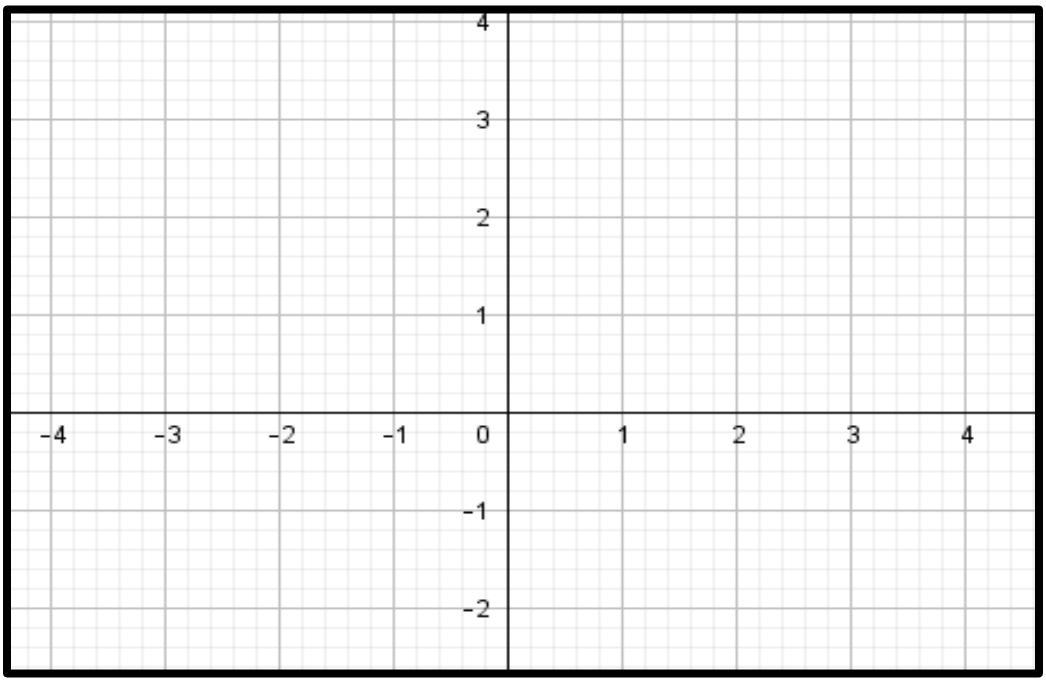
$(4)\ f(x) = x^2|x|$

HILAL HUSSEIN

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

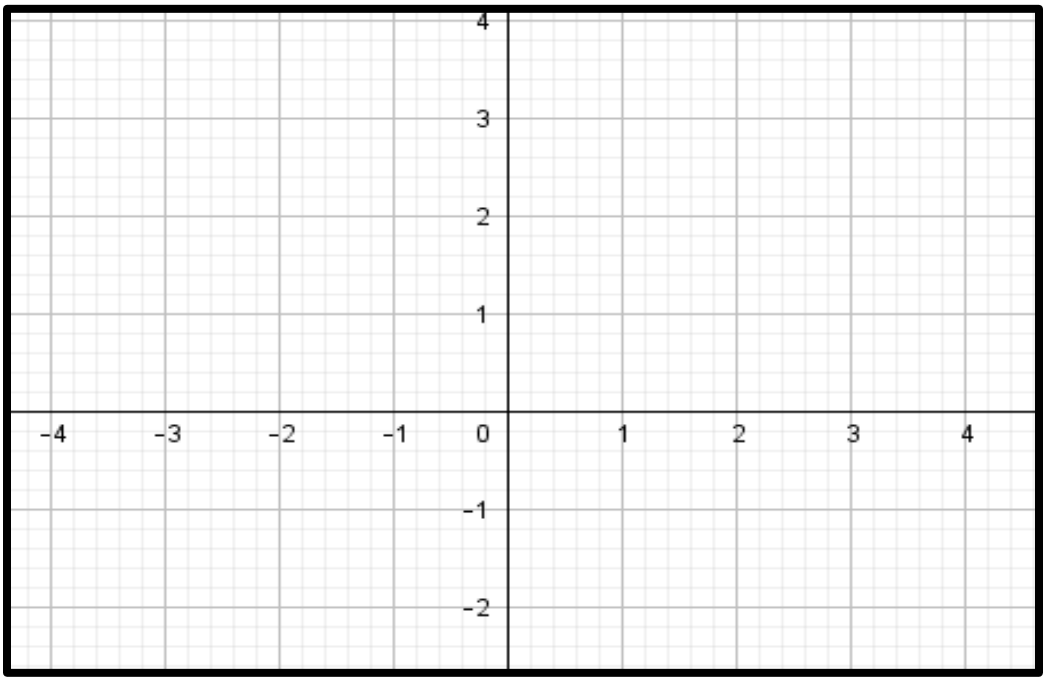


$(5)\ f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+1)$



HILAL HUSSEIN

$(6)\ f(x) = x^4 - 26x^3 + x$



HILAL HUSSEIN

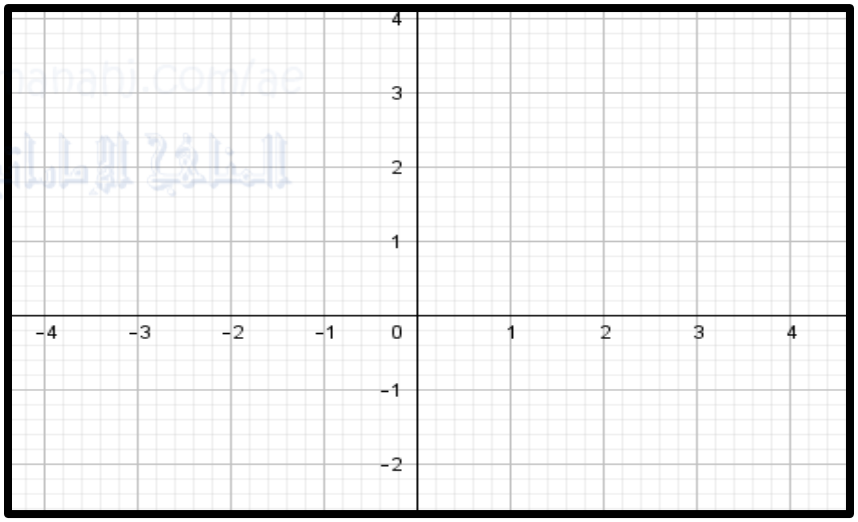
(v) ارسم تمثيلاً بيانياً بالخصائص التالية .

Draw a graphical representation of the contours.

(1) $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ لكل $x < -1$, $-1 < x < 1$

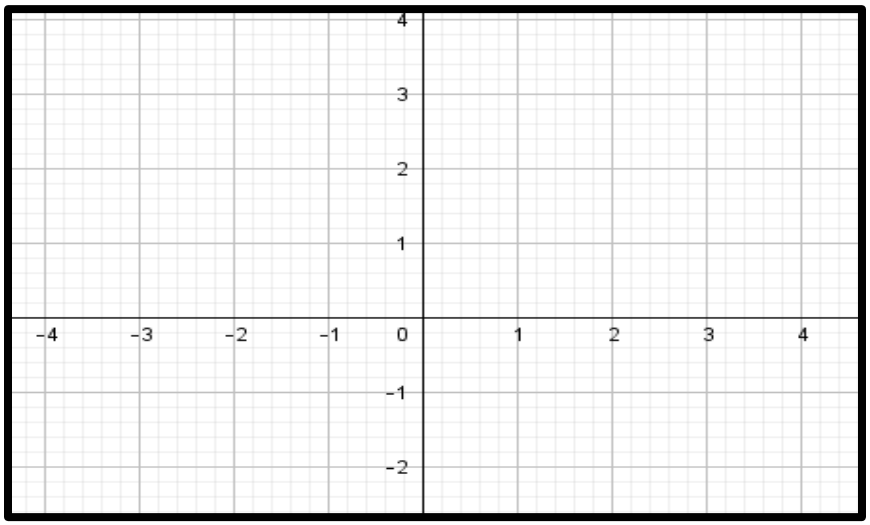
$f'(x) < 0$ لكل $x > 1$, $f''(x) > 0$ لكل $x < -1$,

$f''(x) < 0$ لكل $-1 < x < 0$, $x > 1$, $0 < x < 1$.



(2) $f(0) = 2$, $f'(x) > 0$ لكل x , $f'(0) = 1$,

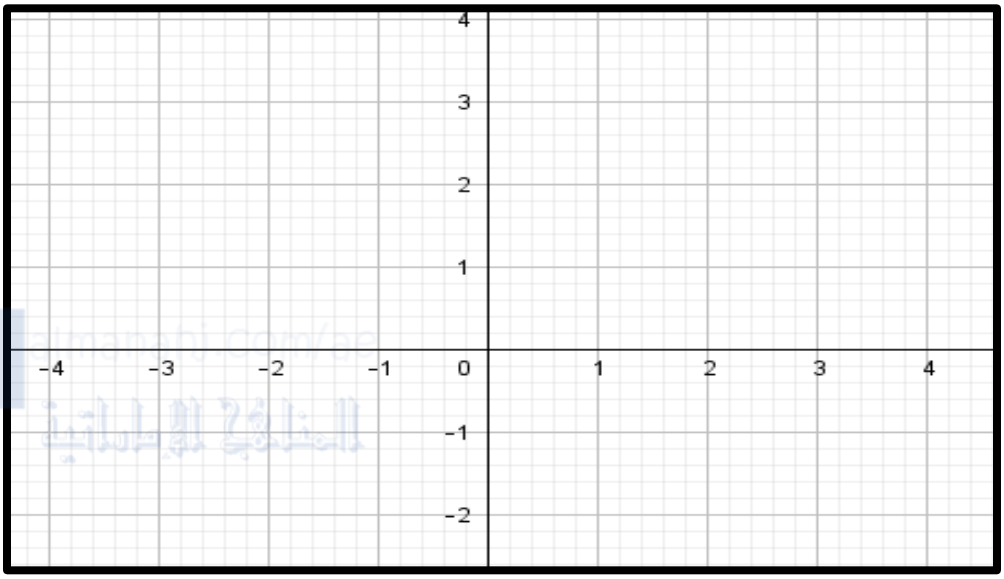
$f''(x) > 0$ لكل $x < 0$, $f''(x) < 0$ لكل $x > 0$.



HILAL HUSSEIN

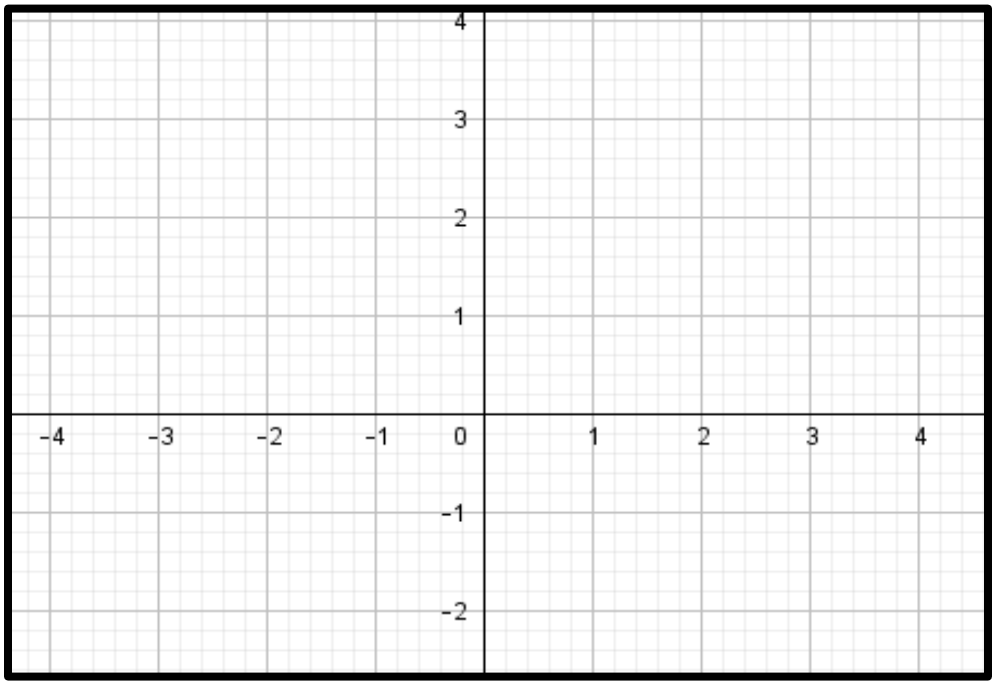
(3) $f(1)=0$, $f'(x)<0$ لكل $x<1$, $f'(x)>0$,

لكل $x>1$, $f''(x)<0$ لكل $x<1$, $x>1$.



(4) $f'(x)>0$ لـ $x\neq 0$, $f'(0)$ غير معرفة ,

$f''(x)>0$ لـ $x<0$, $f''(x)<0$ لـ $x>0$.

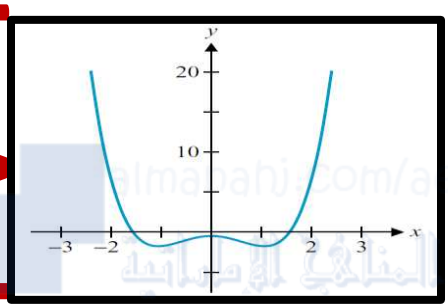


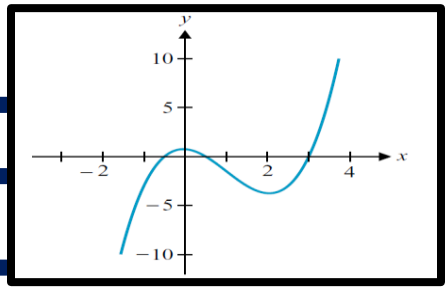
HILAL HUSSEIN

(v)قدر الفترات المتزايدة والمتناقصة , ومواقع القيم القصوي المحلية ,

وفترات التقعر , ومواقع نقاط الانعطاف .

(v) Estimate the increasing and decreasing periods, the locations of local maximum values, the periods of concavity and the locations of the inflection points

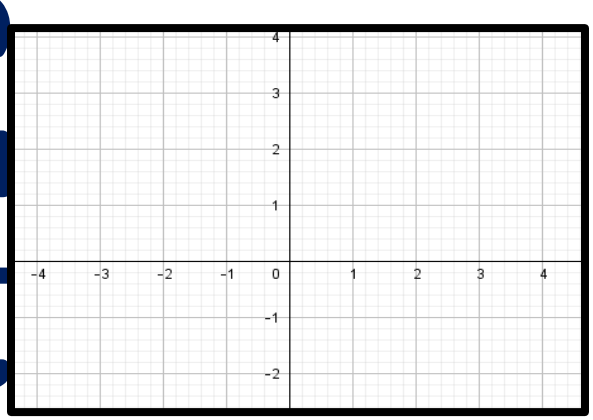




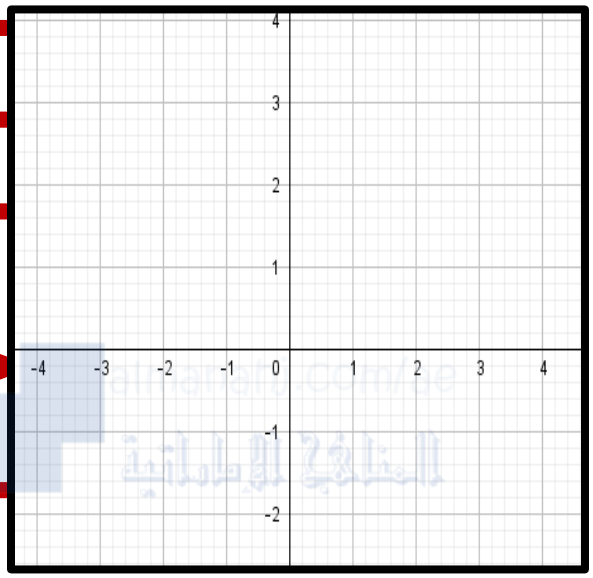
(vi) ارسم بيانياً الدالة وحدد نقاط التقاطع وخطوط التقارب .

(vi)Graph the function and identify points of intersection and asymptotes.

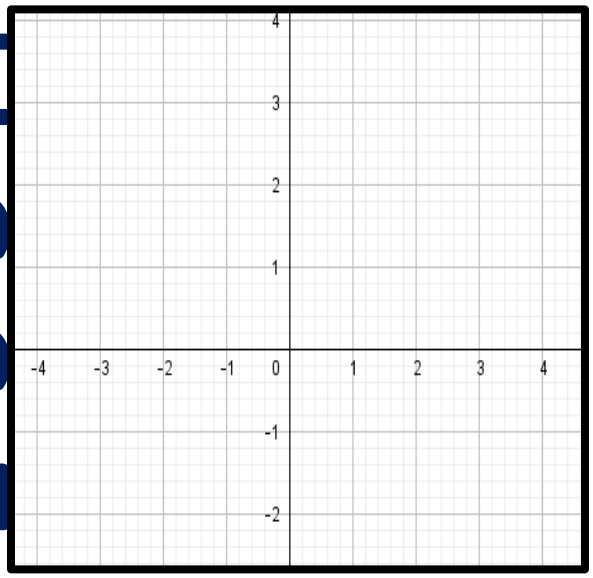
$$(1) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$



$$(2) f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$



$$(3) f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x - 1}$$



HILAL HUSSEIN

الدرس السابع :- القيم المثلى Lesson seven: Optimal values

Optimization

لحل مسائل تطبيقات القيم القصوى

1. تقرأ المسائلة جيدا وتفهم ونحدد المعطيات المعطاة بالمسائلة
2. نحدد المتغير المطلوب وتكتب المعلومات المعطاة بواسطة المتغير ونوجد العلاقة أو الدالة التي بها المتغير
3. نشتق العلاقة أو الدالة التي بها المتغير ونحدد النقاط الحرجة و نوجد القيم القصوى المطلقة
4. نوجد المطلوب ونفسّره .

ملاحظات

1. إذا وجد نقطة واحدة حرجة فندرس إشارة المشتقة الأولى لتحديد ما إذا كانت عظمى محلية أو صغرى محلية فتكون عظمى أو صغرى مطلقة
2. يمكن تحديد القيم القصوى المحلية بدراسة إشارة المشتقة الأولى أو باختبار المشتقة الثانية
3. يجب تحديد مجال المتغير المطلوب (إن وجد)

السؤال الخامس عشر :- Question fifteen

يجب بناء صندوق بدون قمة بأخذ ورقة بحجم 16×12 من الكرتون وقطع $x - \text{in.}$ المربعات من كل زاوية و طي الجانبين .أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق.

A box with no top is to be built by taking a 12in-by-16in sheet Of cardboard and cutting x-in. squares out of each corner and Folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

……

……

……

……

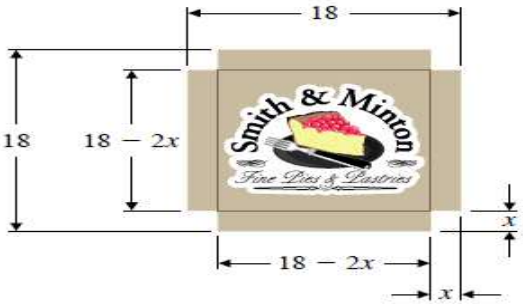
……

……

HILAL HUSSEIN

(2) صُنعت ورقة مربعة من الورق المقوى "18 على جانبها في صندوق مفتوح عن طريق قص المربعات ذات الحجم المتساوي من كل زاوية وطي على طول الخطوط المنقطة .ابحث عن أبعاد الصندوق باستخدام الحجم الأقصى.

A square sheet of cardboard 18in on a side is made into an open box By cutting squares of equal size out of each corner and folding up the Sides along the dotted lines. Find the dimensions of the box with the Maximum volume.



… … … …

(4) بين أن المستطيل ذي المساحة العظمي محيطه قيمة ثابتة P مربع دائماً.

Show that the rectangle of maximum area for a given perimeter P is always a square.

……

……

……

……

……

(5) أن تكون صالة العرض لمتجر متعدد الأقسام مستطيلة الشكل جدران من ثلاث جهات ، فتحات باب بارتفاع 6 أقدام على الجانبين المواجهين وباب بطول 10 أقدام يفتح على الجدار المتبقي .صالة العرض أن تبلغ مساحة الأرضية 800 قدم مربع .ما هي الأبعاد التي ستقلل من طول الجدار المستخدم؟

A showroom for a department store is to be rectangular with Walls on three sides, 6-ft door openings on the two facing sides And a 10-ft door opening on the remaining wall. The showroom is to have 800 ft2 of floor space. What dimensions will minimize the length of wall used?

……

……

……

……

(6) أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(0, 1)$

Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point (0, 1).

……

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(7) أوجد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقطة $(0, 0)$

Find the point on the curve $y = \cos x$ closest to the point (0, 0).

……

……

……

(8) أوجد عددين غير سالبين مجموعهما 20 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

(8) Find two non-negative numbers whose sum is 20 and whose product is as large as possible.

……

……

……

……

(9) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية ووتره يساوي $5\ cm$ ؟ . ما أبعادة ؟

(9) What is the largest possible area of a right-angled triangle whose hypotenuse is 5 cm? What are its dimensions?

……

……

……

(10) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ m$, واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً .

(10) Prove that among the rectangles whose circumference is 8m, one of them gives the largest area and is a square.

……

……

……

……

HALAL HUSSEIN

(11) طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترا واحدا تكون على شكل إسطوانة دائرية قائمة .

ما الأبعاد التي تستخدم أقل مادة ممكنة ؟

(11) You were asked to design a one-liter oil container in the form of a circular cylinder. What are the dimensions that use the least possible material?

……

……

……

……

……

……

……

……

(12) علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى وحجمها $1000\ cm^3$.

ما الأبعاد التي تستخدم أقل مادة ممكنة ؟

(12) A box in the form of a cylinder open from the top and its size $1000\ cm^3$. What are the dimensions that use the least possible material?

……

……

……

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(13) يراد رسم مستطيل أحد بعدية منطبق على محور السينات ورأساه الآخران على منحني الدالة $y = -x^2 + 4$ ما أكبر مساحة ممكنة لهذا المستطيل ؟

(13) We want to draw a rectangle of one dimension applied to the x-axis and its two vertices on the function curve. What is the largest possible area for this rectangle?

……

……

……

……

……

(14) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاث الأخرى ,

ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طولة $800\ m$ ؟ وما أبعادها ؟

(14) A farm in the form of a rectangular piece of land located on the edge of a straight river. A fence is to be placed on the other three sides. What is the largest area that can be surrounded by a fence of 800m long? What are its dimensions?

……

……

……

……

……

……

……

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية
HILAL HUSSEIN

(15) يريد رجل أقامة سياج حول قطعة أرض مستطيلة الشكل تقع على حافة نهر مستقيم .

ويراد وضع سياج حول الجوانب الثلاثة الأخري

أوجد أبعاد القطعة ليكون طول السياج أقل ما يمكن علماً بأن مساحة قطعة الأرض 800 متر مربع .

(15) A man wants to set up a fence around a rectangular land located on the edge of a straight river, and he wants to put a fence around the other three sides. Find the dimensions of the plot so that the length of the fence is the least possible, knowing that the plot area is 800m^2

……

……

……

……

……

(16) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ عن المنحني $y = \sqrt{x}$ ؟

(16) What is the dimension of the point shorter $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ than the curve $y = \sqrt{x}$?

……

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

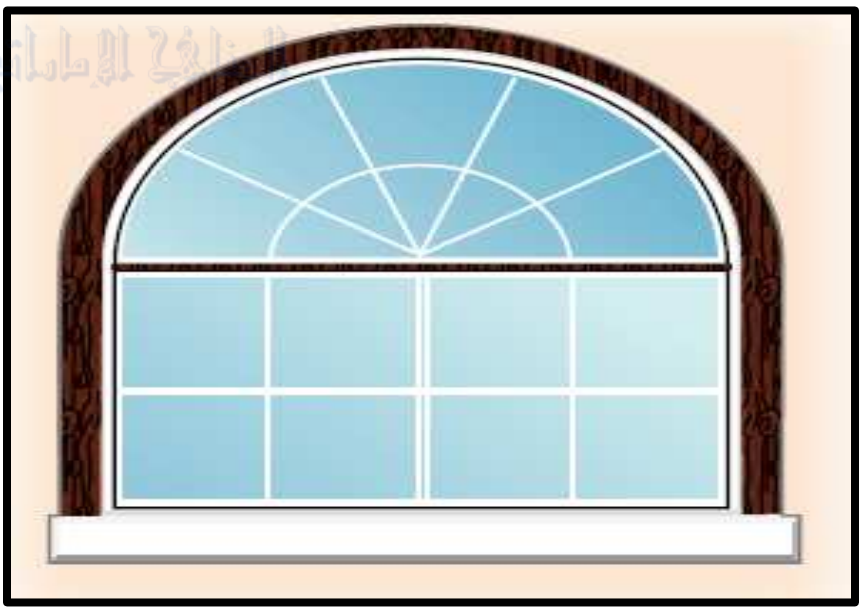
(17) ضلعان في مثلث طولهما a , b والزاوية بينهما θ ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن ؟

(17) Two sides of a triangle of length a, b and the angle between them θ What is the value of θ that makes the area of the triangle the largest possible?

… … … …

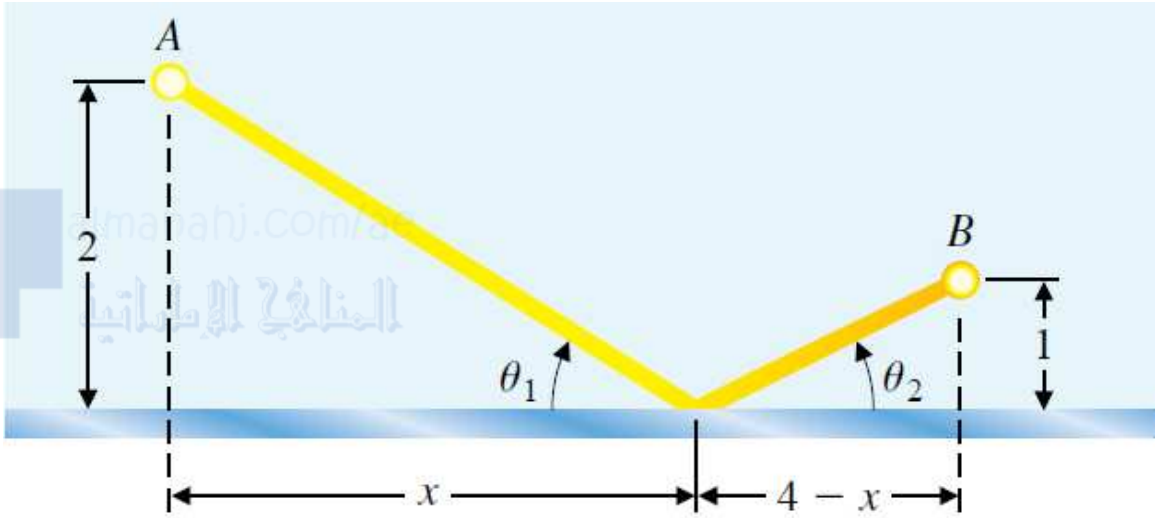
(19) نافذة شكل نصف دائرة فوق مستطيل . على فرض أنه يتوفر $8 + \pi$ قدماً من الزخارف الخشبية . ناقش السبب في أن مصمم النافذة قد يرغب في زيادة مساحة النافذة . أوجد أبعاد المستطيل(وبالتالي , نصف الدائرة) التي ستحقق القيمة العظمي لمساحة النافذة .

A Norman window has the outline of a semicircle on top of a rectangle. Suppose there is $8 + \pi$ feet of wood trim available. Discuss why a window designer might want to maximize the area of the window. Find the dimensions of the rectangle (and, hence, the semicircle) that will maximize the area of the window



HILAL HUSSEIN

(20) على فرض أن الضوء ينكسر عن مرآة للوصول من النقطة A إلى النقطة B كما هو مشار إليه في الشكل. بفرض ثبات سرعة الضوء ، يمكننا إيجاد القيمة الصغرى للزمن من خلال إيجاد القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. أوجد النقطة على المرآة التي تحقق القيمة الصغرى للمسافة التي ينتقلها الضوء. بيّن أن الزوايا في الشكل متساوية (زاوية الانحناء تساوي زاوية الانعكاس).



Suppose that light reflects off a mirror to get from point A to point B as indicated in the figure. Assuming a constant velocity of light, we can minimize time by minimizing the distance traveled. Find the point on the mirror that minimizes the distance traveled. Show that the angles in the figure are equal (the angle of incidence equals the angle of reflection).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

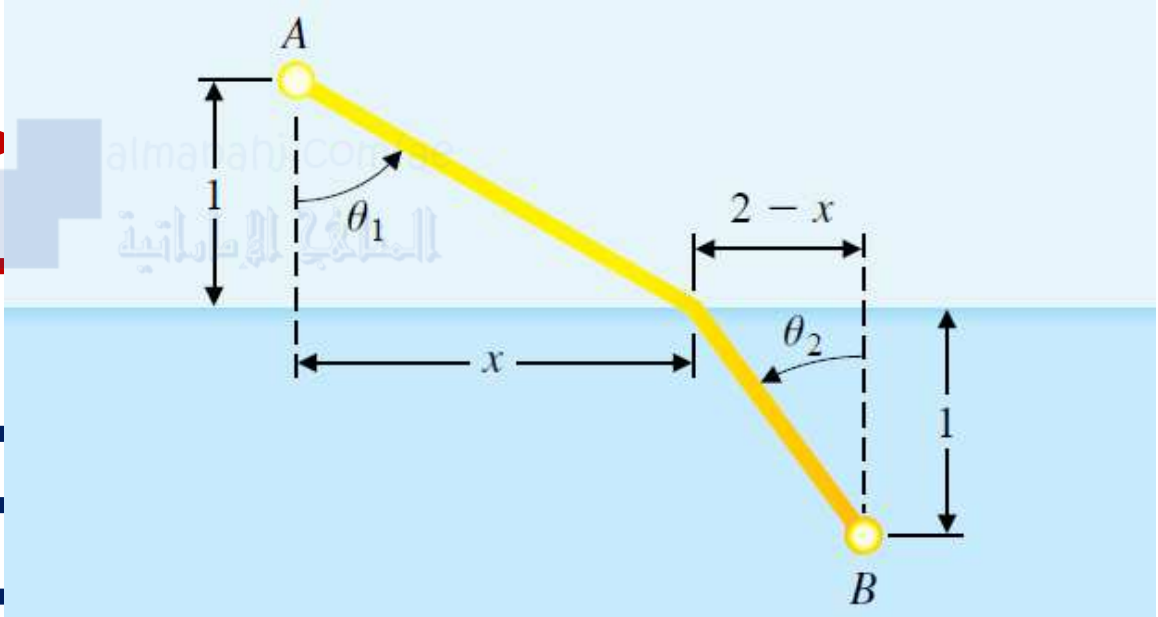
……

……

HILAL HUSSEIN

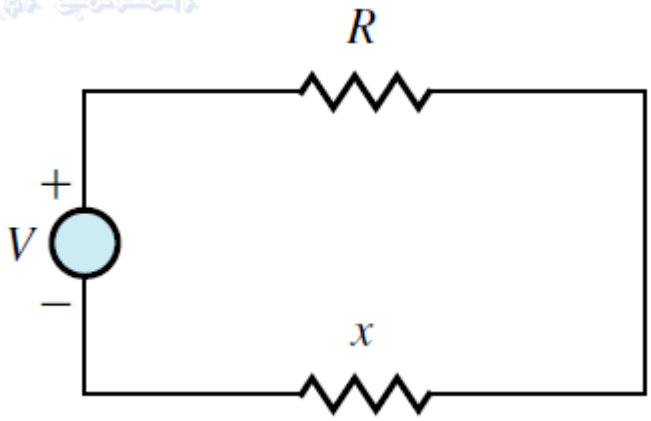
(21) على فرض أن الضوء ينتقل من النقطة A إلى النقطة B كما هو موضح في الشكل. على فرض أن السرعة المتجهة للضوء فوق خط الحد هي v_1 و السرعة المتجهة للضوء أسفل خط الحد هي v_2. أوجد إجمالي الوقت $T(x)$ للوصول من النقطة A إلى النقطة B. اكتب المعادلة $T`(x) = 0$ و استبدل الجذور التربيعية

باستخدام جيوب الزوايا في الشكل و أوجد مشتقة قانون سنيل $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$



(22) في جهاز إلكتروني ، قد تخدم الدوائر الافرادية عدة أغراض. في بعض الحالات ، يجب التحكم في تدفق الكهرباء عن طريق القيمة الصغرى للطاقة بدلاً من تضخيمها. فتكون الطاقة الممتصة من الدائرة $p(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}$ بالنسبة لجهد V و مقاومة R. أوجد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للطاقة الممتصة.

In an electronic device, individual circuits may serve many Purposes. In some cases, the flow of electricity must be controlled By reducing the power instead of amplifying it. The power absorbed by the circuit is $p(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}$ for a voltage V and resistance R. Find the value of x that maximizes the power absorbed.



(23) مدخل بعرض $a = 5$ يلتقي مدخل بعرض $b = 4ft$ عند الزاوية اليمنى.

(a) أوجد طول أطول سلم يمكن حمله عند الزاوية. (إرشاد: عبّر عن طول السلم كدالة للزاوية θ في الشكل).

A hallway of width $a = 5\ ft$ meets a hallway of width $b = 4\ ft$ At a right angle.
(a) Find the length of the longest ladder that Could be carried around the corner. (Hint: Express the length of the ladder as a function of the angle θ in the figure.)

(b) بيّن أن القيمة العظمى لطول السلم بدلالة لـ a و b بشكل عام يساوي $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

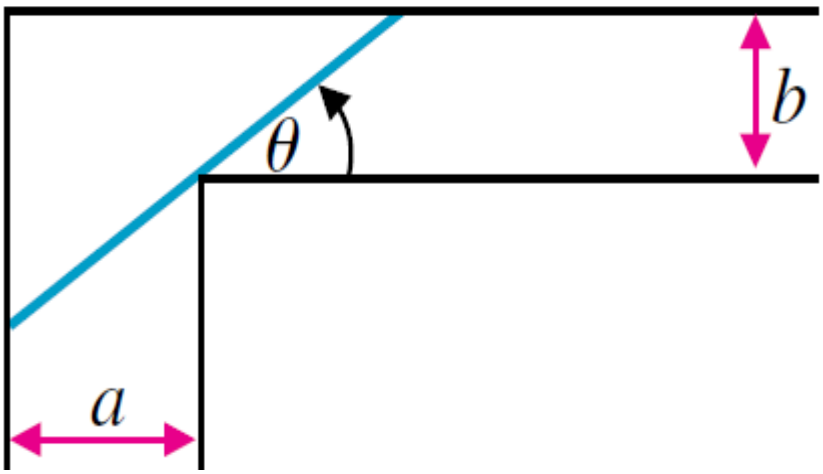
(b) Show that the maximum ladder length for general a and b equals $\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

(c) على فرض أن طول $a = 5$ و السلم هو $8ft$ ، أوجد القيمة الصغرى لـ b بحيث يمكن دوران السلم عند الزاوية.

(c) Suppose that $a = 5$ and the ladder is 8 ft long. Find the minimum value of b such that the ladder can turn the corner.

(d) قم بحل الجزء (c) للحصول على a بشكل عام و طول السلم L.

(d) Solve part (c) for a general a and ladder length L.



HALAL HUSSEIN

HILAL HUSSEIN

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

(24) في النشاطات الرياضية حيث تُلقى الكرة أو تُضرب ، تنتهي الكرة في كثير من الأحيان على ارتفاع مغاير لبدايتها. تتضمن الأمثلة تسديدة جولف المنحدرات و تسديدة كرة السلة. في المخطط ، تنطلق الكرة بزاوية □ و تنتهي بزاوية β فوق الخط الأفقي (للمسافات المنحدرة ، ستكون β سالبة). بتجاهل مقاومة و دوران الهواء ، يُعطى المدى الأفقي بواسطة $R = \frac{2v^2 \cos^2\theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta)$ ، إذا كانت السرعة الابتدائية هي v و كان g ثابت الجاذبية. ففي الحالات التالية ، أوجد □ التي تحقق القيمة العظمى لـ R (عامل v و g على أنها ثوابت) :

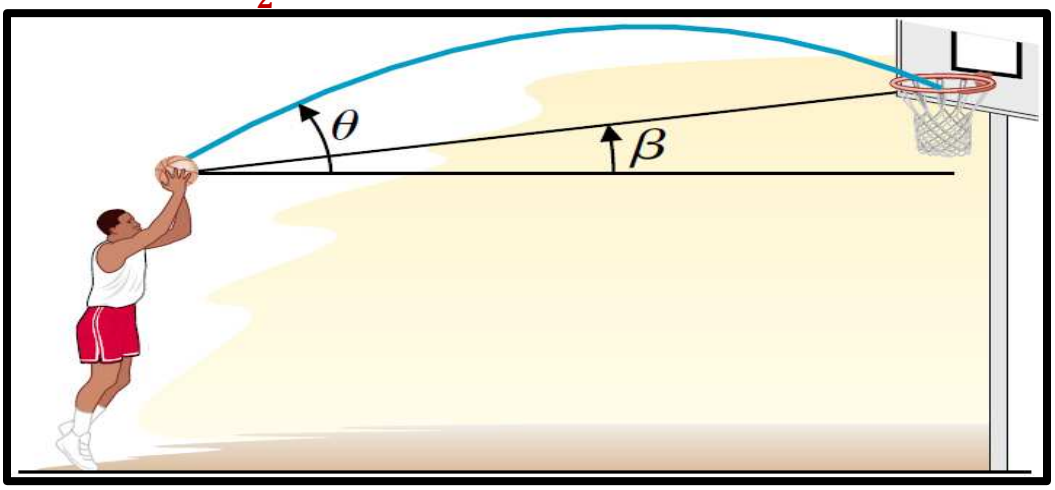
(a) $\beta = 10^\circ$ (b) $\beta = 0^\circ$ (c) $\beta = -10^\circ$

تأكد من أن $\theta = 45^\circ + \beta^\circ/2$ تزيد المدى.

In sports where balls are thrown or hit, the ball often finishes At a different height than it starts. Examples include a downhill Golf shot and a basketball shot. In the diagram, a ball is released at an angle θ and finishes at an angle β above the horizontal (For downhill trajectories, β would be negative). Neglecting air resistance and spin, the horizontal range is given by

$$R = \frac{2v^2 \cos^2\theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta)$$

if the initial velocity is v and g is the gravitational constant. In the following cases, find θ to maximize R (treat v and g as Constants): (a) $\beta = 10^\circ$, (b) $\beta = 0^\circ$ and (c) $\beta = -10^\circ$. Verify That $\theta = 45^\circ + \frac{B}{2}$ maximizes the range



HILAL HUSSEIN

HILAL HUSSEIN

almanahj.com/ae
المناهج الإماراتية

الدرس الثامن :- المعدلات الزمنية المرتبطة

RELATED RATES

استراتيجية حل مسائل المعدلات المرتبطة

طريقة الحل :-

1) تقرأ المسألة قراءة دقيقة ويرسم مخطط لها ويحدد المتغيرات و الثوابت فيها ويرمز للمتغيرات فقط برمز (الثوابت تبقى كما هي بدون رموز)

2) ونحدد المعلوم والمطلوب من المعدلات الزمنية أو المتغيرات .

3) نعين العلاقة الرياضية التي تربط بين المتغيرات .

4) إذا احتوت العلاقة على أكثر من متغيرين نجعل العلاقة السابقة في صورة علاقة بين متغيرات جميع معدلاتها و متغيراتها معلومة ماعدا المطلوب إيجاده عن طريقة التعويض عن المتغيرات بدلالة بعضها البعض.

5) نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن (اشتقاق ضمن) للحصول على علاقة تربط بين المعلوم من المعدلات و المتغيرات و المطلوب .

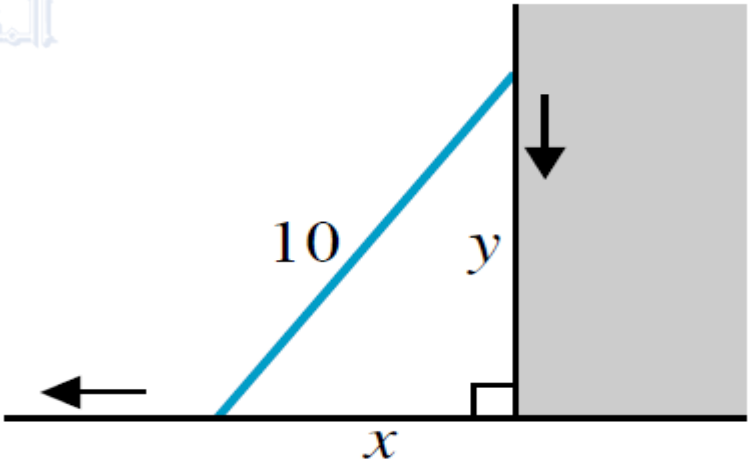
نعوض بالقيم المعلومة في الخطوة السابقة و نوجد المطلوب

HILAL HUSSEIN

السؤال السادس عشر :- Question sixteen:-

(1) سلم 10 أقدام يقع على جانب المبنى .إذا بدأ الجزء العلوي من السلم في الانزلاق على الحائط بمعدل $2\ ft/s$ ، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم بعيدًا عن الحائط عندما يكون قمة السلم 8 أقدام فوق الأرض؟

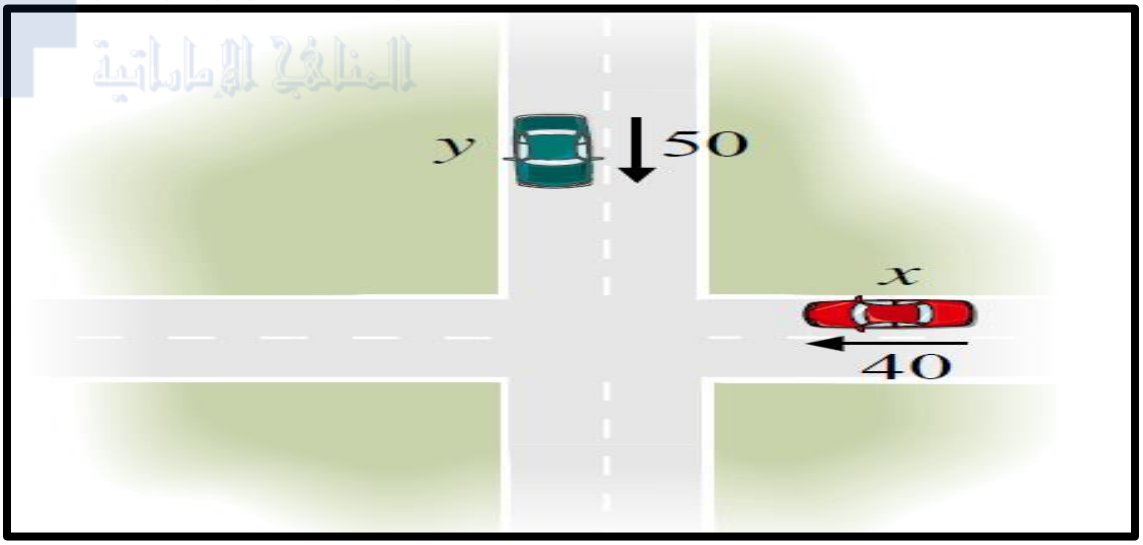
(1) A 10 ft ladder rests on the side of the building. If the top of the ladder begins to slide down the wall at a rate of $2\ ft/s$, how quickly does the lower part of the ladder slide away from the wall when the top of the ladder is $8ft$ above the ground?



HILAL HUSSEIN

(2) تسير سيارة بسرعة $50\ mph$ تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}mi$ شمال التقاطع. و تسير سيارة شرطة بسرعة $40\ mph$ (ساعة / كم) من نقطة تبعد $\frac{1}{4}mi$ شرق القاطع نفسه. في هذه اللحظة ، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار ؟

A car is traveling at 50 mph due south at a point 12 mile north of an intersection. A police car is traveling at 40 mph due west at a point $\frac{1}{4}$ Mile east of the same intersection. At that instant, the radar in the police car measures the rate at which the distance Between the two cars is changing. What does the radar gun register?



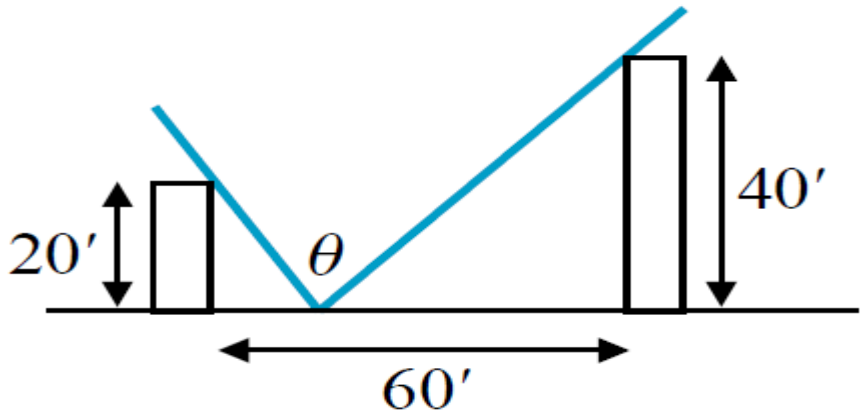
HALAL HUSSEIN

(3) مبنيان ارتفاعهما $20ft$ و $40ft$ على التوالي ، و المسافة بينهما $60ft$ على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طردياً مع الزاوية θ في الشكل.

(a) إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل $4ft$ ، فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط ؟

(b) أوجد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ أكبر ما يمكن.

Two buildings of height 20 feet and 40 feet, respectively, are 60 feet apart. Suppose that the intensity of light at a point Between the buildings is proportional to the angle θ in the Figure. (a) If a person is moving from right to left at 4 ft/s, at What rate is θ changing when the person is exactly halfway? Between the two buildings? (b) Find the location at which the angle θ is maximum.



(4) افترض أن شخصًا يبلغ طوله 6 أقدام يبعد 12 قدمًا عن ارتفاع 18 قدمًا عمود المصباح (انظر الشكل)

.(أ) إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل 2 قدم / ثانية ، فما هو معدل الطول من الظل المتغير؟(إرشاد: انظر إلى $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$).

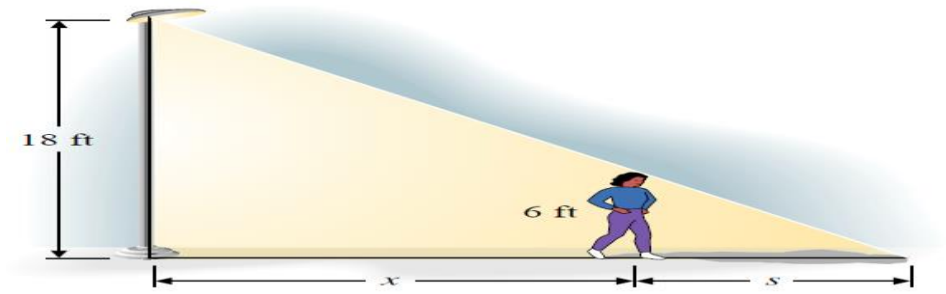
(ب) كرر مع الشخص على بعد 6 أقدام من عمود الإنارة و المشي نحو عمود المصباح بمعدل 3 قدم / ثانية.

Suppose a 6-ft-tall person is 12 ft away from an 18-ft-tall lamppost (see the figure).

(a) If the person is moving away from the lamppost at a rate of 2 ft/s, at what rate is the length of the shadow changing? (Instruct: see $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$).

(b) Repeat with the person 6 ft away from the lamppost and

Walking toward the lamppost at a rate of 3 ft/s.



(5) على فرض أن متوسط التكلفة السنوية لكل عنصر لإنتاج العناصر x من المنتجات التجارية هو $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. تتضح أعداد منتجاتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي :

(5) Assuming that the average annual cost per item of producing the x items from the commercial products is $\overline{C}(x) = 12 + \frac{94}{x}$. The number of its annual products for the last three years is shown in the following table:

Year	0	1	2
Prod. (x)	8.2	8.8	9.4

قدّر قيمة $x'(2)$ و معدل تغير متوسط التكلفة في العام الحالي (عامين).

Estimate the value of x '(2) and the rate of change of the average cost in the current year (two years).

HILAL HUSSEIN

الدرس التاسع:- معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

Lesson nine: - Rates of change in economics and science

Question seventeen: - السؤال السابع عشر :-

(1) إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية

لـ 50 منتجاً

If the cost of manufacturing x items is $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$, find the marginal cost function And compare the marginal cost at $x = 50$ with the actual cost of manufacturing the 50th item.

……

……

……

……

……

(2) إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$

أوجد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 100$ والتكلفة الفعلية

لـ 100 منتجاً

If the cost of manufacturing x items is $C(x) = x^3 + 21x^2 + 110x + 20$, find the marginal cost function And compare the marginal cost at $x = 100$ with the actual cost of manufacturing the 100 th item.

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(3) على فرض أن تكلفة تصنيع x منتج هي

$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$ بالدراهم

أوجد نقطة الانعطاف وناقش أهمية هذة القيمة بدلالة تكلفة تصنيع

(3) Assuming that the cost of manufacturing x a product is the $AED\ C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 100$ inflection point and discuss the importance of this value in terms of manufacturing cost.

……

……

……

(4) أوجد مستوي الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغري لمتوسط التكلفة :-

(4) Find the level of output which achieves the small value of average cost.

$(i)\ C(x) = 0.1x^2 + 3x + 2000$

……

……

……

……

……

$(ii)\ C(x) = 0.3x^3 + 4x + 4000$

……

……

……

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

$(iii)\ C(x) = 10e^{0.02x}$

……

……

……

……

……

$(iv)\ C(x) = \sqrt{x^3 + 800}$

……

……

……

……

……

(5) (a) لتكن $C(x)$ هي دالة التكلفة و $\bar{C}\ (x)$ هي دالة متوسط التكلفة . على فرض أن $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 3600$. اثبت ان $C'(100) < \bar{C}(100)$

اثبت أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتناقص متوسط التكلفة .

(5) (a) Letc(x) be the cost function, $\bar{C}\ (x)$ which is the average cost function, assuming you $C'(100) < \bar{C}(100)$prove that $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 3600$ increasing output x by 1 will decrease the average cost.

……

……

……

……

……

……

HILAL HUSSEIN

(b) بين ان $C'(1000) > \overline{C}(1000)$

وبين أن التزايد في الإنتاج (x) بنسبة 1 سيتزايد متوسط التكلفة .

(b) Prove that $C'(1000) > \overline{C}(1000)$

Then he established that increasing output (x) by 1 would increase the average cost.

……

……

……

……

……

(c) أثبت أن متوسط التكلفة يحقق قيمة صغري عند القيمة x حيث

إن $C'(x) = \overline{C}(x)$

(c) Prove that average cost achieves a small value at value x where $C'(x) = \overline{C}(x)$

……

……

……

……

(6) لتكن $R\ (x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج .

تعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$.

(a) بين انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمي للأرباح . فإن الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية .

Let $R(x)$ be the revenue and $C(x)$ be the cost from manufacturing

HILAL HUSSEIN

x items. Profit is defined as $P(x) = R(x) - C(x)$.

(a) Show that at the value of x that maximizes profit, marginal Revenue equals marginal cost.

……

……

……

……

(b) أوجد القيمة العظمي للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دراهم و $C(x) = 2x + 5000$ دراهم.

(b) Find the maximum profit if $R(x) = 10x - 0.001x2$ AED and $C(x) = 2x + 5000$AED

……

……

……

……

(7) أوجد(a) مرونة الطلب و (b) مدي الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرناً$(E < -1)$.

Find (a) the elasticity of demand and (b) the range of prices for which the demand is elastic ($E < -1$).

$(i) f(p) = 200(30 - p)$

……

……

……

……

$(ii) f(p) = 60p(10 - p)$

HILAL HUSSEIN

(8) إذا كانت دالة الطلب f دالة قابلة للاشتقاق . فاثبت أن $\left(pf(p)\right)' < 0$ إذا كانت $\frac{p}{f(p)}f'(p) < -1$ فقط . (إذن , فإن الإيرادات تتناقص إذا كان الطلب مرناً فقط)

If the demand function f is differentiable, prove that $\left(pf(p)\right)' < 0$ if and only if $\frac{p}{f(p)}f'(p) < -1$

. (That is, revenue decreases if and only if demand is elastic.)

(9) إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقاً $x'(t) = 0.5x(t)\left(5 - x(t)\right)$ للمعادلة

(a) اوجد التركيز $x(t)$ الذي تصل فية سرعة التفاعل إلي القيمة العظمي .

If the concentration of a chemical changes according to the Equation $x'(t) = 0.5x(t)\left(5 - x(t)\right)$,

(a) Find the concentration $x(t)$ for which the reaction rate is a maximum

(b) اوجد حدود التركيز .

(b) Find the limiting concentration.

……

……

……

(9) على فرض أن الشحنة في الدائرة الكهربائية $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ كولوم .

اوجد التيار.

(9) Assuming that the charge in the electric circuit $Q(t) = e^{-2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)$ Coulomb is to determine the current.

……

……

……

……

……

……

……

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

وبمشئية الله نلتقي بكم في مذكرة الوحدة الخامسة

التكامل

HILAL HUSSEIN