الرياضيات

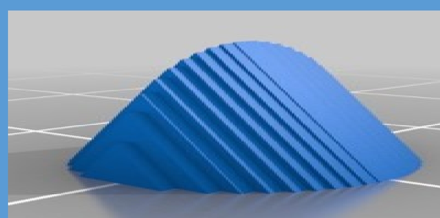
فن وعلم

الثاني عشر متقدم

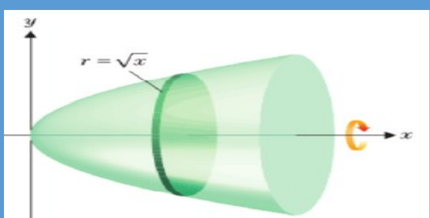
الفصل الدراسي الثالث

2021\2020

الوحدة السادسة



الحجوم



إعداد الاستاذ

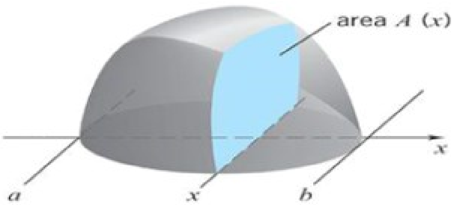
خالد ابوكف

أولا الحجم من خلال المقاطع العرضية (الاحجام بالتقطيع – الشرائح)

إذا كان $A(x)$ دالة المساحة للمقطع العرضي للمجسم في الفترة $[a, b]$

فان حجم المجسم

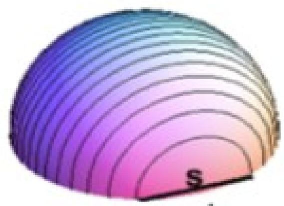
$$V = \int_a^b A(x)dx$$



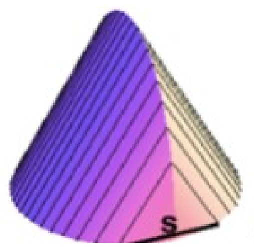
❖ أوجد حجم المجسم من خلال مقطعه العرضي $A(x)$ فيما يلي

1) $A(x) = x + 2 \quad , \quad -1 \leq x \leq 3$

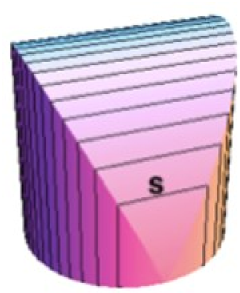
2) $A(x) = \pi(4 - x^2) \quad , \quad 0 \leq x \leq 2$



المقطع العرضي نصف دائرة $A = \frac{1}{2}\pi r^2$

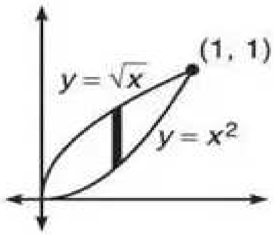


المقطع العرضي مثلث متساوي الاضلاع $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

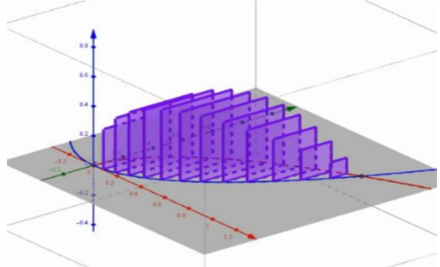


المقطع العرضي مربع $A = l^2$

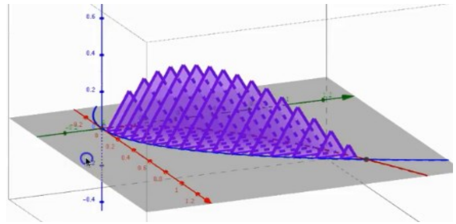
1) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$
والمقاطع العرضية



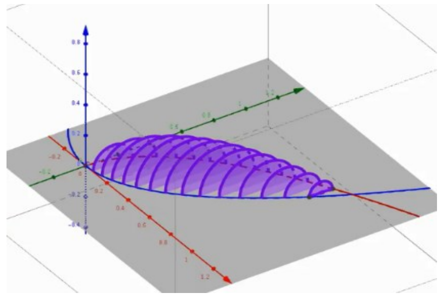
a)مربعات متعامدة على محور x



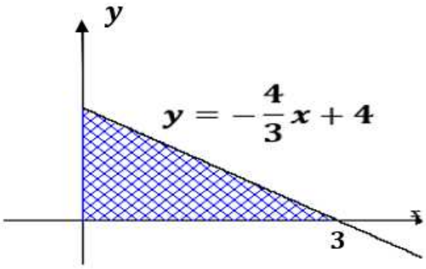
b) مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة على محور x

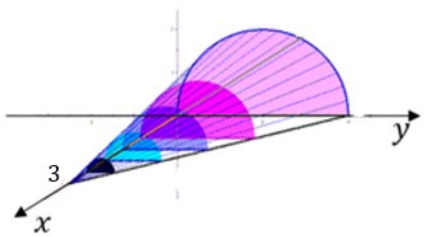


c)نصف دائرة متعامدة على محور x

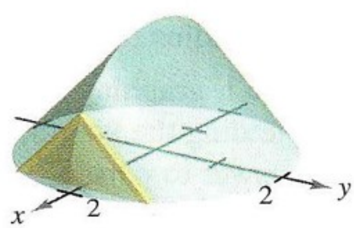


2) أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحورx في $[0,3]$ هي انصاف دوائر واقعة بين منحنى $y=-\frac{4}{3}x+4$ و محور x.

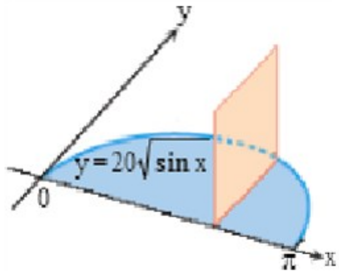




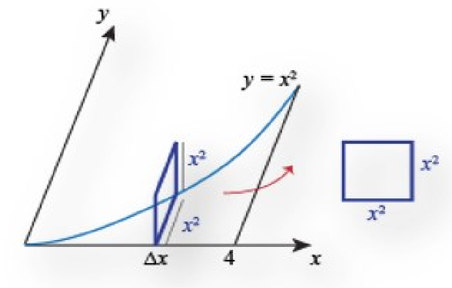
3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y=\sqrt{4-x^2}$ و$y=-\sqrt{4-x^2}$ والمقاطع العرضية مثلثات متطابقة الاضلاع متعامدة على محور x في الفترة $-2\le x\le 2$



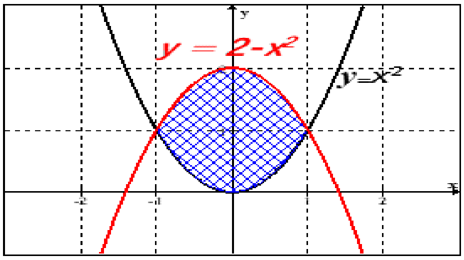
4) أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحور x في $[0,\pi]$ هي مثلثات متطابقة الاضلاع واقعة بين منحنى $y = 20\sqrt{\sin x}$ و محور x .



5) أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحور x في $[0,4]$ هي مربعات واقعة بين منحنى $y = x^2$ و محور x .



6) قاعدة المجسم V هي المنطقة المحددة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$
أوجد حجم المجسم V في الحالات التالية

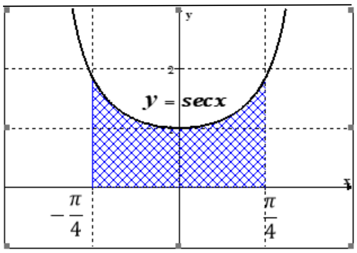


a) حيث مقاطعه العرضية هي مربعات
b) حيث مقاطعه العرضية هي انصاف دوائر
c) حيث مقاطعه العرضية هي مثلثات متساوية الاضلاع
(المقاطع متعامدة على محورx)

7) قاعدة المجسم V هي المنطقة المحددة بواسطة $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$
أوجد حجم المجسم V في الحالات التالية

a) حيث مقاطعه العرضية هي مربعات
b) حيث مقاطعه العرضية هي انصاف دوائر
c) حيث مقاطعه العرضية هي مثلثات متساوية الاضلاع
(المقاطع متعامدة على محورy)

8) أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحورx في $\frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ هي مثلثات قائمة , ضلعي القائمة متطابقين ويقع احد ضلعي القائمة بين منحنى الدالة $y = secx$ و محور x .

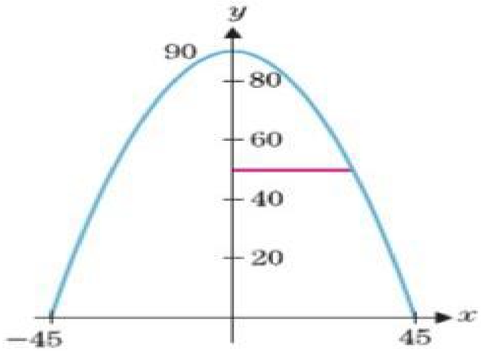


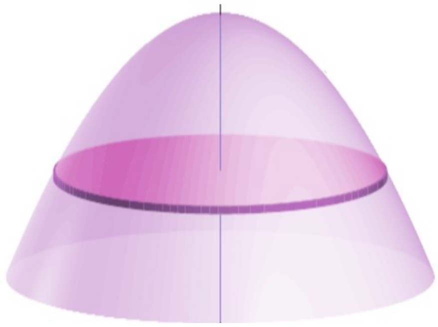
9) على فرض ان فحص تصوير MRI يبين ان مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سيمبسون لتقدير حجم الورم .

$x(cm)$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)\ \ (cm^2)$	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

حجم القبة يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة بالدالة $y = 90 - \frac{2x^2}{45}$ لكل $-45 \le x \le 45$

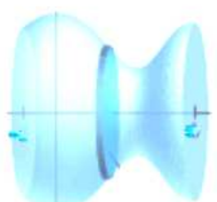
بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y , اوجد حجم القبة



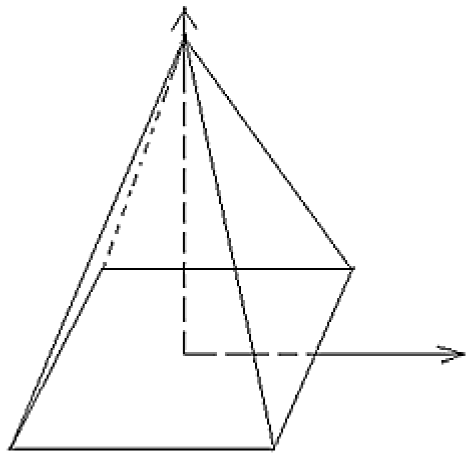


❖ لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - sin\left(\frac{x}{2}\right)$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$

احسب حجم الإناء.



حجم الهرم هرم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 8 متر وارتفاعه 10 متر اوجد حجمه بالتكامل



ثانيا الحجوم الدورانية

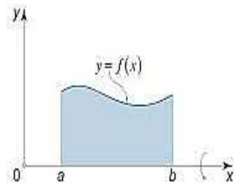
1) الأقراص

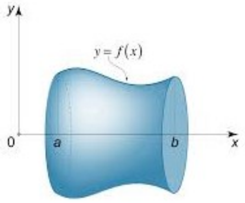
تكون المنطقة المراد تدويرها ملاصقة تماما لمحور الدوران

نصف قطر الدوران عمودي على محور الدوران

1) الدوران حول محور افقي

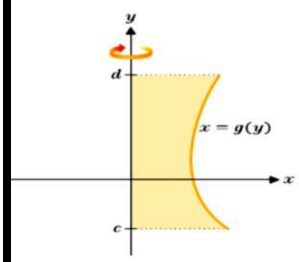
$$v = \int_a^b \pi(R)^2 dx$$

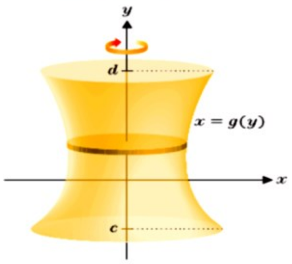




2) الدوران حول محور رأسي

$$v = \int_a^b \pi(R)^2 dy$$

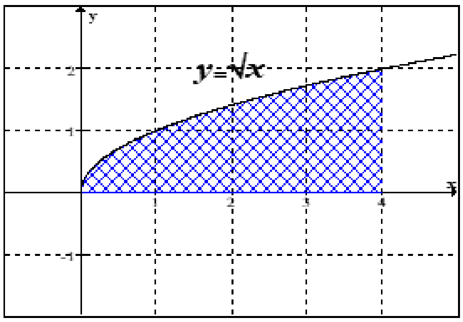


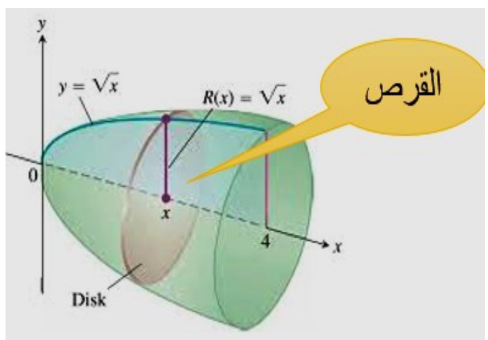


1) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ ومحور x والمستقيم $x = 4$ في الحالات التالية

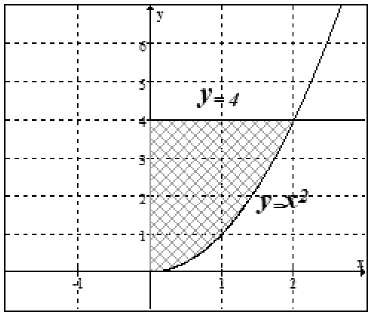
a) حول محور x .

b) حول المستقيم $x = 4$

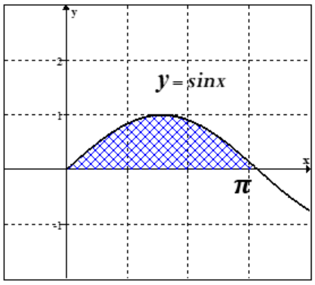




2)أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$ و المستقيم $y = 4$ و محور y 1) حول المحور y 2) حول المستقيم $y = 4$.



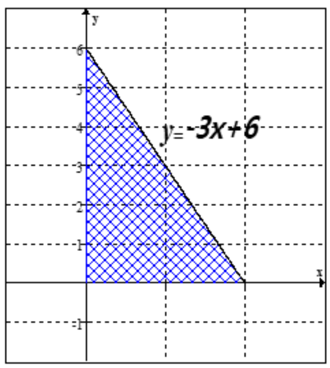
3) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \sin x$ و محور x حيث $0 \le x \le \pi$ حول محور x



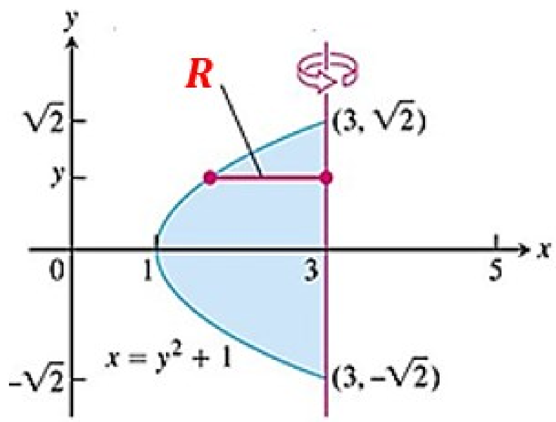
4)أوجد حجم المجسم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين المستقيم $y = -3x + 6$ و محور x و محور y في الحالات التالية

1) حول المحور y

2) حول المحور x



5)أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة االمظللة حول المستقيم $x = 3$.



6)أوجد حجم المجسم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين $y = \frac{4}{x}$ و $y = x$ و $x = 4$ و محور x حول محور x .

2) الحلقات

توجد منطقة فراغ جزئية أو كلية بين المنطقة المراد تدويرها ومحور الدوران

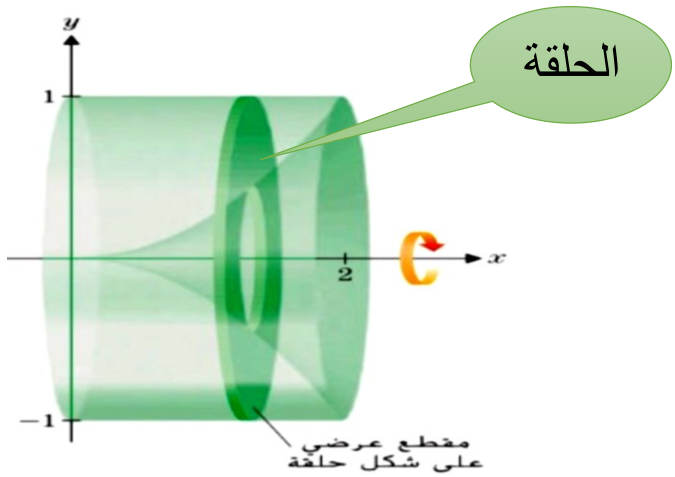
أنصاف أقطار الدوران عمودية على محور الدوران

1) الدوران حول محور أفقي

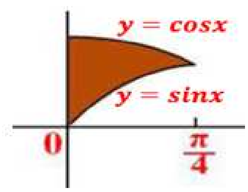
$$v = \int_a^b \pi\left(\left(R(x)\right)^2 - \left(r(x)\right)^2\right)dx$$

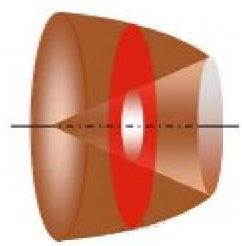
2) الدوران حول محور رأسي

$$v = \int_a^b \pi\left(\left(R(y)\right)^2 - \left(r(y)\right)^2\right)dy$$



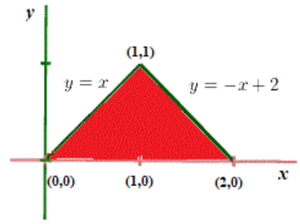
<u>السؤال الاول</u>:- أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الدالتين $y = sinx$ و $y = cosx$ حيث $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ حول محور x.

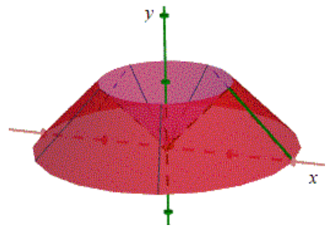




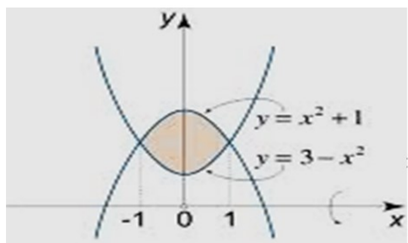
<u>السؤال الثاني</u>:- أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الدالتين $y = -x + 2$

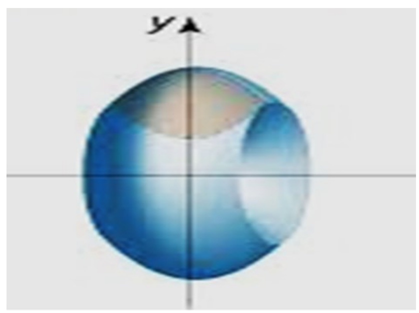
و $y = x$ و محورx , حول محور y





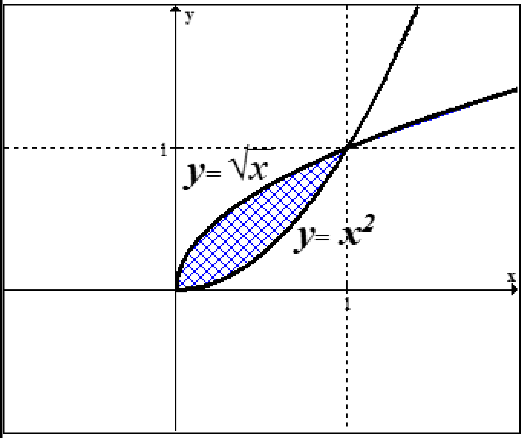
<u>السؤال الثالث</u>:- أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول محور x





<u>السؤال الرابع</u> :- أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين

$y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ في الحالات التالية



1. **حول محور x**

2. **حول محور y**

3. **حول المستقيم $y = 1$**

4. **حول المستقيم $x = 1$**

السؤال الخامس :-

1) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ حول محور x .

2) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ و المستقيم $y = 1$ و المستقيم $x = 0$ حول :

a) محور x

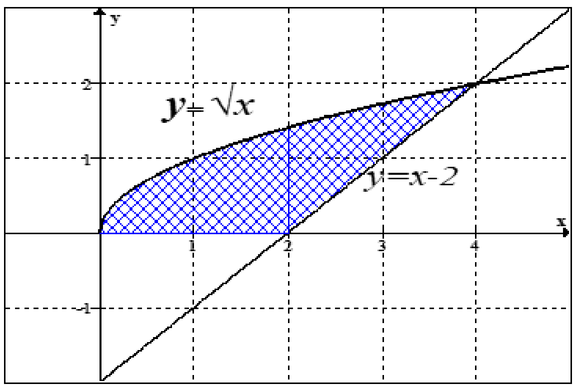
b) محور y

c) المستقيم $y = 1$

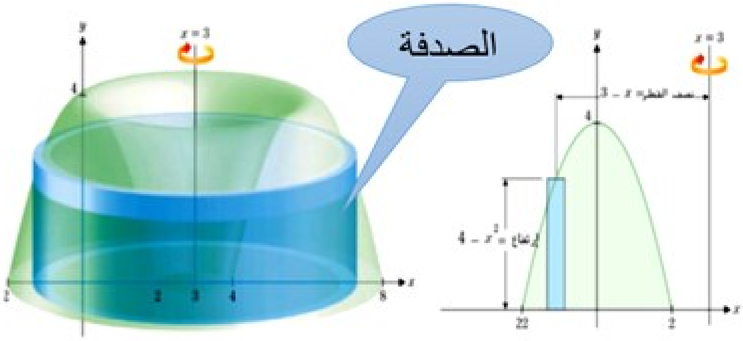
d) المستقيم $x = 1$

3) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2$
و $y = 4$ حول المستقيم $x = 5$

4) أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$
و منحنى الدالة $y = x - 2$ ومحور x حول محور x .



3) الاصداف الاسطوانية



1) $v = \int_a^b 2\pi\, r(x) h(x)\, dx$

اذا كان الدوران حول محور رأسي

2) $v = \int_a^b 2\pi\, r(y) h(y)\, dy$

اذا كان الدوران حول محور أفقي

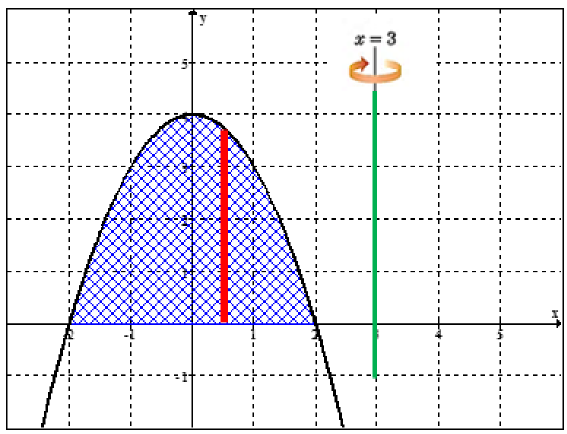
3) حيث r نصف قطر الصدفة ويكون عمودي على محور الدوران

(المسافة بين إرتفاع الصدفة ومحور الدوران)

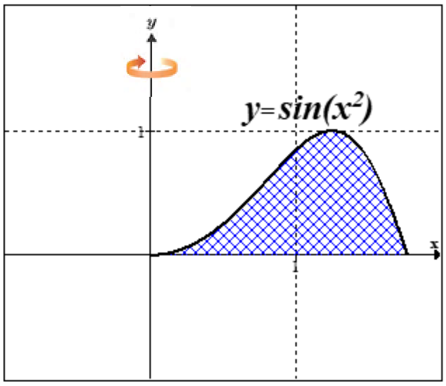
$r =$ فوق $-$ تحت $= y -$ محور الدوران $=$ محور الدوران $- y$	$r =$ يمين $-$ يسار $= x -$ محور الدوران $=$ محور الدوران $- x$

4) h ارتفاع الصدفة ويوازي محور الدوران

1) أوجد حجم المجسم الذي تكون بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = 4 - x^2$
والمحور x حول المستقيم $x = 3$ (باستخدام الصدفة)



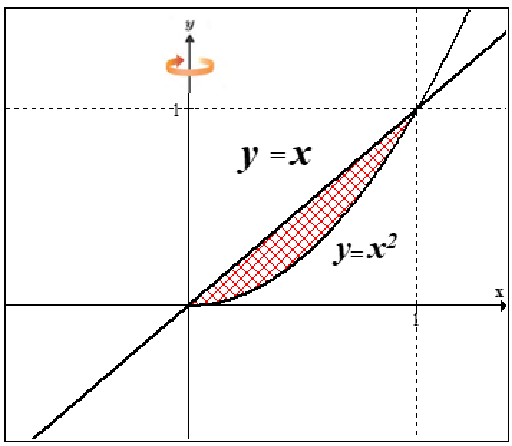
2) اذا دارت المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = sin(x^2)$ ومحور x حيث $0 \le x \le \sqrt{\pi}$ حول محور y فاوجد حجم المجسم الناتج من الدوران .



3) أوجد حجم المجسم الذي تكون بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x$ و $y = x^2$ حول المحور y

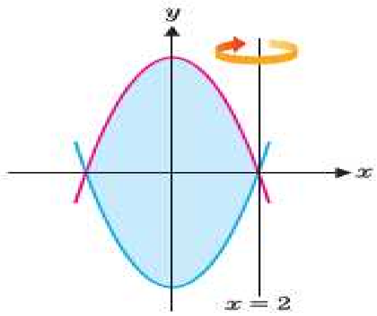
a) باستخدام الصدفة

b) باستخدام الحلقة



4) على فرض أن المنطقة المحددة بواسطة $y = x^2 - 4$ و $y = 4 - x^2$ يتم تدويرها حول المستقيم $x = 2$.

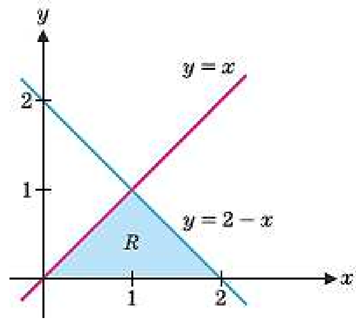
استخدم طريقة (الأقراص أو ألحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل لحساب الحجم



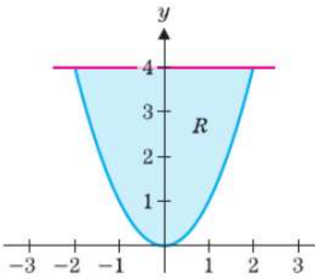
5) لتكن R هي المنطقة المحدودة بالدوال $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$

احسب حجم المجسم الذي تكون بتدوير R حول المستقيمات التالية

a) $y = 2$
b) $y = -1$
c) $x = 2$

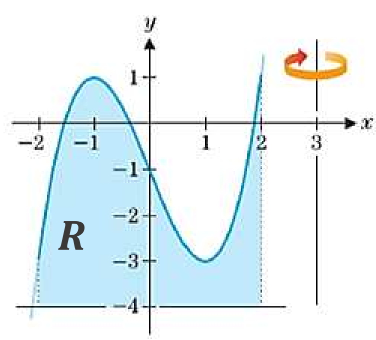


6) لتكن $\boldsymbol{R}$ هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$
أحسب حجم المجسم الذي تكون من دوران $\boldsymbol{R}$ حول المستقيمات التالية

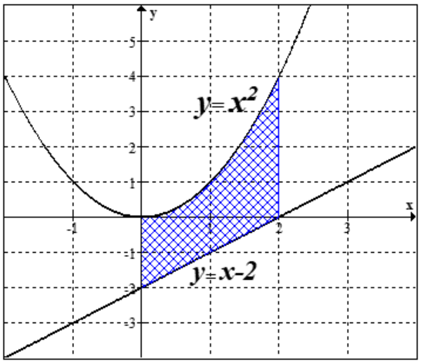


a) $y = 4$	b) $y = -2$
d) $y = 6$	e) المحور y

7) لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^3 - 3x - 1$ و $y = -4$.
$-2 \le x \le 2$ احسب حجم المجسم الذي تكون بدوران R حول المستقيم $x = 3$

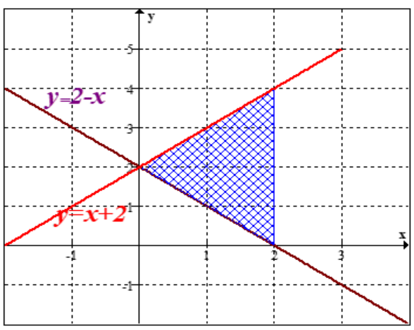


8) استخدم طريقة (الأقراص أو ألحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الحالات التالية



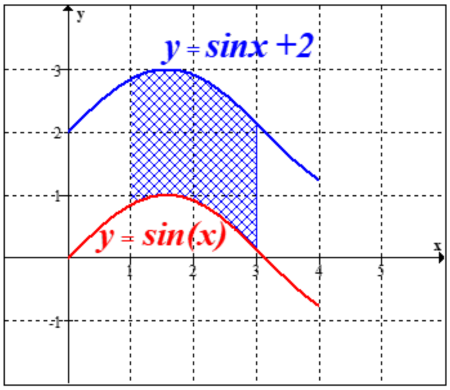
1) حول المستقيم $x = 3$
2) حول المستقيم $x = -1$
3) حول المستقيم $y = 4$
4) حول المستقيم $y = -3$

9) حدد طريقة (الأقراص أو ألحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الحالات التالية



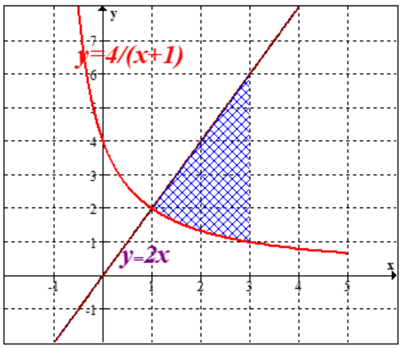
1) حول المستقيم $x = 3$
2) حول محور y
3) حول المستقيم $y = 4$
4) حول محور x

10) استخدم طريقة (الأقراص أو ألحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الحالات التالية



1) حول المستقيم $x = 3$
2) حول محور y
3) حول المستقيم $y = 3$
4) حول محور x

11) حدد طريقة (الأقراص أو ألحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة في الحالات التالية



1) حول المستقيم $x = 3$
2) حول محور y
3) حول المستقيم $y = 6$
4) حول محور x

❖ يمثل التكامل حجم مجسم . أرسم المنطقة وحدد محور الدوران ونصف قطر الدوران

1) $\int_{0}^{1} \pi\left[\left(\sqrt{y}\right)^{2} - y^{2}\right] dy$

2) $\int_{0}^{2} \pi(4 - y^{2})^{2} \, dy$

3) $\int_{0}^{1} 2\pi x(x - x^{2}) \, dx$

4) $\int_{0}^{2} 2\pi(4 - y)(y + y) \, dy$