مذكرة الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل كاملة

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية	
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-01-25 14:02:28	
المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس
	إعداد: عمرو البيومي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم					
صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	مراجعة الدرس الثالث القيم العظمى والصغرى من الوحدة الرابعة منهج بريدج وريفيل (اختبر نفسك 3)
2	مراجعة الدرس الثاني الصيغ غير المحددة وقاعدة لوبيتال من الوحدة الرابعة منهج بريدج وريفيل (اختبر نفسك 2)
3	مراجعة الدرس الأول التقريبات الخطية وطريقة نيوتن من الوحدة الرابعة منهج بريدج وريفيل (اختبر نفسك 1)
4	ملزمة دروس الوحدة الرابعة تطبيقات الاشتقاق باللغة الانجليزية
5	ملزمة دروس الوحدة الرابعة تطبيقات الاشتقاق باللغة العربية

الصف الثاني عشر المتقدم

الرياضيات

الدمج الكبير

تطبيقات الاشتقاق

الوحدة الرابعه

تطبيقات التفاضل

الدحيح اكاديمي

4–1 التقريبات الخطية وطريقة نيوتن — صفحة 5

4–2 الصيغ غير المعروفة وقاعدة لوبيتال — صفحة 21

4–3 القيم العظمى والصغرى — صفحة 37

4–4 الدوال المتزايدة والمتناقصة — صفحة 53

4–5 التقعر واختبار المشتقة الثانية — صفحة 69

4–6 نظرة عامة على رسم المنحنيات — صفحة 85

4–7 القيم المثلى — صفحة 100

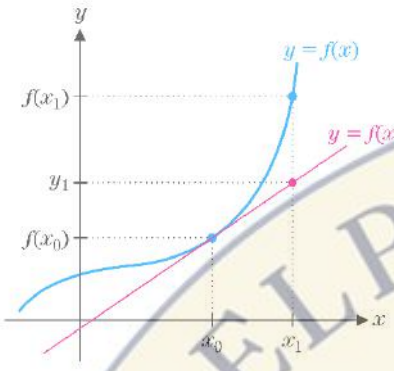
4–8 المعدلات المرتبطة — صفحة 116

4–9 معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم — صفحة 132

AMR EL BAYOUMY MATH
2026
2025
T-0544560575

الدرس الأول : التقريبات الخطية و طريقة نيوتن

التقريب الخطي هو المماس للداله f(x) عند x_0



ميل المماس

$$m = f'(x0)$$

معادلة خط المماس:

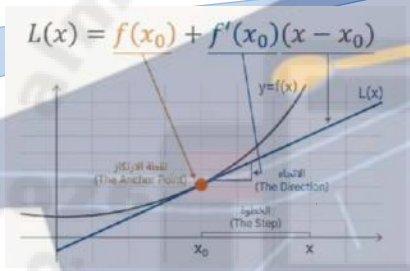
$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - f(x0) = f'(x0)(x - x0)$$

التقريب الخطي (أو المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو الدالة

$$L(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_0)$$

التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$ هو معادلة المماس عند x_0



x : هو العدد المطلوب عندة قيمة الدالة f تقريبا

x_0 : هو العدد المعلوم عندة قيمة الدالة f بدقة

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$$f(x) = cos\, x\,, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad cos\,(1)$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = \sqrt{x}\ ,\quad x_0 = 1\ ,\ \sqrt{1.2}$

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = (x+1)^{1/3},\quad x_0 = 0\ ,\ \sqrt[3]{1.2}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = \sin 3x\,, \quad x_0 = 0\,, \quad \sin(0.3)$

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = \sqrt{2x+9}\,, x_0 = 0\,, \sqrt{8.8}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = \frac{2}{x}, x_0 = 1$, $\frac{2}{0.99}$

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = \tan^{-1}(x)$ $x_0 = 0$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

$f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 1$, $\frac{2}{0.99}$

جد التقريب الخطي للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$.
استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطي .

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

على فرض أننا نريد إيجاد تقريب للدالة $f(x)$ عند $x = x_1$ مع العلم أننا نعرف قيمة الدالة عند $x = x_0$، فإننا نستخدم التقريب الخطي.

$$f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

x_0 هو عدد نستطيع إيجاد صورته في الدالة وتقترب من x_1.

استخدم التقريبات الخطية لتقدير الكمية .

استخدم تقريبًا خطيًا لتقريب القيم التالية:

$\sqrt[3]{8.02}$

$\sqrt[3]{8.07}$

$\sqrt[3]{8.15},$

$\sqrt[3]{25.2}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدرجة اكاديمي
2026
T-0544560575

استخدم تقريبًا خطيًا لتقريب القيم التالية:

$\sqrt[4]{16.04}$

$\sqrt[4]{16.16}$

$\sin(0.1)$

$\sin\left(\frac{9}{4}\right)$

$\sin(28)$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

اوجد التقريب الخطي لطول ضلع مكعب حجمه 69 متر مكعب.

قَدَّرت شركةٌ ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بالسعر x AED، كما هو مُعطى في الجدول.

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

قَدِّر عدد اللُّعَبات التي يمكن بيعها بسعر AED 24

قَدِّر عدد اللُّعَبات التي يمكن بيعها بسعر AED 36

قَدَّرت شركةٌ بيعٌ أنه يمكن بيع $f(x)$ علبة مشروبات غازية كل يوم إذا كانت درجة الحرارة F كما هو مُعطى في الجدول.

x	60	80	100
$f(x)$	84	120	168

قَدِّر عدد العُلَب التي يمكن بيعها عند $72°$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

مخرج رسوم متحركة يدخل الموقع $f(t)$لرأس شخصية ما بعد tإطار من الفيلم كما هو موضّح في الجدول.

t	200	220	240
$f(t)$	128	142	136

إذا كان برنامج الحاسوب يستخدم الاستكمال الداخلي لتحديد المواقع المتوسطة، فحدِّد موقع الرأس عند عدد الإطارات

a) 208

يقيس مستشعر الموقع $f(t)$لجسم بعد tميكروثانية من تصادم كما هو مُعطى في الجدول.

t	5	10	15
$f(t)$	8	14	18

قدِّر موقع الجسم عند الأزمنة:

a) $t = 8$
b) $t = 12$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

استخدم التقـــريب الخطـــي لـ $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x_0=1$ لتقـــريب $\sqrt{1.2}$ هـو

(A) 1.2

(B) 1.1

(C) 0.2

(D) 0.1

التقـــريب الخطـــي لـ $f(x)=\sin 3x$ عند $x_0=0$ لتقـــريب $\sin(0.3)$ هـو

(A) 0.3

(B) 0.1

(C) 3

(D) 1

التقـــريب الخطـــي لـ $\sqrt[4]{16.04}$ هـو

(A) 2.125

(B) 2.0125

(C) 2.00125

(D) 2.000125

التقـــريب الخطـــي لـ $\sqrt[4]{16.16}$ هـو

(A) 2.5

(B) 2.05

(C) 2.005

(D) 2.0005

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أوجد التقريب الخطي لدالة $f(x) = \sin(4x)$ عند x=0

a) $L(x) = 4x + 4$

b) $L(x) = x$

c) $L(x) = 4x - \cos(4x)$

d) $L(x) = 4x$

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع ألف لعبة برمجية بالسعر x AED
كما هو معطى في الجدول
عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر 24 AED يساوي

(A) 16.1

(B) 16.2

(C) 16.3

(D) 16.4

t	5	10	15
$f(t)$	8	14	18

يقيس مستشعر الموقع $f(t)$ لجسيم بعدد ميكروثانية من تصادم
كما هو معطى في الجدول
موقع الجسيم عند الزمن $t = 8$ يســـــاوي

(A) 11.6

(B) 11.2

(C) 11.3

(D) 11.4

AMR ELBAYOUMY MATH
2026
T-0544560575

إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+3}$ فإن التقريب الخطي عند $x_0 = 1$ هو

A. $l(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

B. $l(x) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$

C. $l(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

D. $l(x) = 2 + \frac{1}{2}(x+1)$

إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ فإن التقريب الخطي عند $x_0 = 0$ لـ $\sqrt[3]{1.2}$ هو

A. $1\frac{1}{15}$

B. $2\frac{1}{15}$

C. $1\frac{2}{15}$

D. $1 - \frac{1}{15}$

إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن التقريب الخطي عند $x_0 = \pi$ هو

A. $\pi - x$

B. $\pi + x$

C. $-\pi - x$

D. $-\pi + x$

إذا كانت $e^x = -x$ فإن تقريب نيوتن لجذر هذه المعادلة مقربا لثلاثة أرقام عشرية هو

A. -0.567

B. -0.657

C. 0.567

D. 0.657

إذا استخدمنا طريقة تقريب نيوتن لتقدير العدد التالي $\sqrt[3]{23}$ تعطي العدد

A. 1.843867

B. 3.843867

C. 2.843867

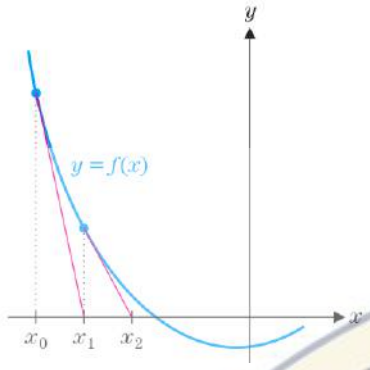
D. 0.843867

AMR ELBAYOUMY MATH
الدليح اكاديمي
2026
T-0544560575

تُستخدم طريقة نيوتن لتقريب أصفار الدالة

يمكن استخدام القانون:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2, \dots$$



حيث:

x_0 هو التخمين الأوّل لصفر الدالة f وصورته قريبة من الصفر.

x_1 هو التقريب الأوّل لصفر الدالة، و x_2 هو التقريب الثاني لصفر الدالة، وهكذا...

ملاحظة:

تفشل طريقة نيوتن في تقريب صفر الدالة عندما يكون:

$$f'(x_0) = 0 \text{ أو } f'(x_1) = 0$$

استخدم طريقة نيوتن مع قيم x_0 لإيجاد الجذر لخمس منازل عشرية دقيقة

$x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \ , \quad x_0 = 1$

$x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0, \quad x_0 = -1$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$x^4 - 3x^2 + 1 = 0, \qquad x_0 = 1$

$x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad x_0 = 0$

$x^5 + 3x^3 + x - 1 = 0 \qquad x_0 = 0$

$\cos x - x = 0 \qquad x_0 = 0$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$\sin x = x^2 - 1 \qquad x_0 = 0$

$e^x = -x \qquad x_0 = 0$

$e^{-x} = \sqrt{x} \qquad x_0 = 0$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

استخدم طريقة نيوتن لتقدير العدد المُعطى

$\sqrt{11}$

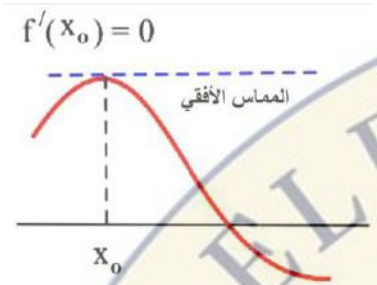
$\sqrt{23}$

$\sqrt[4]{24}$

الحالات التي تفشل فيها طريقة نيوتن

1) المماس الأفقي للدالّة عند x_0:

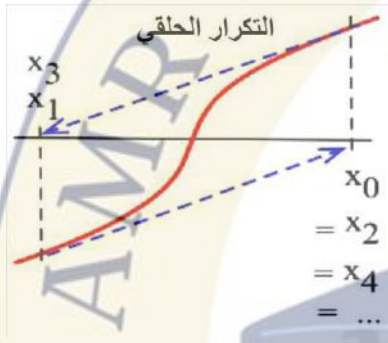
هذا يعني أن المماس عند x_0 سيكون **موازيًا لمحور** x ولن يقطعه، وبالتالي **لا توجد ملامسات تقترب من صفر الدالّة**.



$$f'(x_0) = 0$$

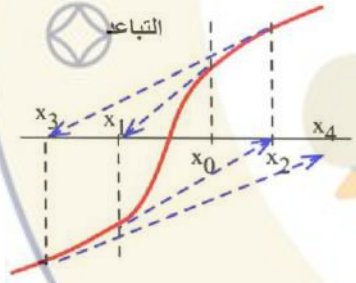
2) التكرار الحلقي للأصفار:

هذا يعني أن المماسات ستكون **متوازية ومنطبقة** بشكل متكرر ولن تقترب من **صفر الدالة**



3) تباعد المماسات:

هذا يعني أن **المماسات المتتالية** تأخذنا بعيدًا عن **صفر الدالة** ولن نقترب منه.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أيّ ممّا يلي يستخدم لتقريب أصفار الدالة في طريقة نيوتن؟

a)
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

b)
$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

c)
$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

d)
$x_{n+1} = x_n + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$

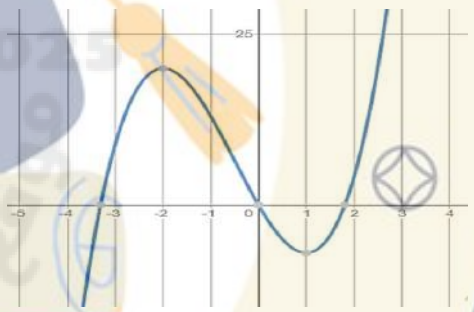
استخدم طريقة نيوتن مع $x_0 = 1.2$ لإيجاد التقريب x_2 لصفر الدالة

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

a) 0.8000
b) 0.9956
c) 0.9500
d) 0.9999

في التمثيل البياني في الشكل المجاور، أيّ تخمينٍ أوّليّ تفشل فيه طريقة نيوتن في إيجاد صفرٍ تقريبي؟

a) $x_0 = 1$
b) $x_0 = -3$
c) $x_0 = 2$
d) $x_0 = 3$



$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

باستخدام طريقة نيوتن تقريب $\sqrt{11}$ يساوي

(A) 3.316625
(B) 3.216625
(C) 3.116625
(D) 3.31625

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
T-0544560575
2026

الدرس الثاني: الصيغ غير المعرفة و قاعدة لوبيتال

عندما تؤدي النهاية إلى الصيغة $0/0$ لا يمكننا تحديد قيمتها أو حتى ما إذا كانت موجودة، دون عمل إضافي. لنلاحظ أن جميع النهايات الثلاثة التالية لها في البداية الصيغة $0/0$، ولكن لكل منها نتيجة مختلفة.

أمثلة النهايات

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

الصيغة: 0/0

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

الصيغة: 0/0

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)^2}$$ غير موجودة

الصيغة: 0/0

الخلاصة

الصيغة 0/0 ليست قيمة، بل هي إشارة إلى أننا بحاجة إلى أداة أقوى!

النوع الأول: 0/0

عندما يؤول كل من البسط والمقام إلى الصفر

هذا النوع يعني أننا أمام صيغة غير محددة تحتاج إلى معالجة لإيجاد القيمة الحقيقية للنهاية.

النوع الثاني: ∞/∞

عندما يؤول كل من البسط والمقام إلى نهاية، موجبة أو سالبة

وهذه أيضًا صيغة غير محددة، لأنها لا تخبرنا مباشرة بالقيمة النهائية.

قاعدة لوبيتال – L'Hôpital's Rule

على فرض ان الدالتين f و g قابلتين للاشتقاق في الفترة (a,b) باستثناء ربما عند النقطة $c\in(a,b)$

وان

$g'(x)\neq 0$ في الفترة (a,b) وكانت $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ لها احدى الصيغ التالية :

$$\left(\frac{0}{0}\ .\ \frac{\infty}{\infty}\ .\ 0\cdot\infty\ .\ 1^{\infty}\ .\ \infty^{0}\ .\ 0^{0}\ .\ \infty-\infty\right)$$

فاننا نستخدم قاعدة لوبيتال لايجاد قيمة النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ \text{عدد حقيقي } L \text{ أو } \infty \text{ أو } -\infty$$

قاعدة لوبيتال – L'Hôpital's Rule

تنصّ القاعدة على أنه:

إذا كان لدينا حدّ من الشكل

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

وكان هذا الحد يعطي كمية غير معيّنة من الشكل:

- $\frac{0}{0}$
- أو $\frac{\infty}{\infty}$

وكانت الدالتان f و g **قابلتين للاشتقاق** قرب النقطة c

فإنه يمكننا تطبيق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الكميات غير المعرّفة (Indeterminate Forms)

الصورة توضّح أنّه يوجد 5 كميات غير معرّفة أخرى **يمكن تحويلها** إلى الصيغ المسموح باستخدام قاعدة لوبيتال عليها، وهي:

الكميات غير المعرّفة:

1. $0\cdot\infty$
2. $\infty-\infty$
3. 0^0
4. ∞^0
5. 1^∞

هذه الصور **ليست** قابلة مباشرة لاستخدام قاعدة لوبيتال، لذلك **يجب تحويلها** إلى إحدى الصيغتين:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

بعد التحويل يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال.

كيف نحول الكميات غير المعرّفة؟ (أمثلة سريعة)

1 صيغة $0\cdot\infty$

نحوّلها إلى قسمة هكذا:

$$0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\ \text{أو}\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$$

2 صيغة $\infty-\infty$

نحوّلها إلى:

$$\infty-\infty=\frac{\infty}{\infty}\quad \text{بعد التوحيد أو الترتيب}$$

3 الصيغ الأسّية

مثل:

- 0^0
- ∞^0
- 1^∞

نستخدم دائماً:

$$y=f(x)^{g(x)}\ \Rightarrow\ \ln y=g(x)\ln f(x)$$

فتصبح على شكل ضرب ثم إلى قسمة ثم نطبق لوبيتال.

AMR ELBAYOUMY MATH
T-0544560575
2026

جد النهاية

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

الصيغه $\frac{0}{0}$

1) $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

3) $\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}$

4) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{e^{3t}-1}$

5) $\lim_{t\to 0}\frac{\tan^{-1}t}{\sin t}$

6) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\sin^{-1}t}$

AMR ELBAYOUMY MAT
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد النهاية

الصيغه $\frac{0}{0}$

1) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(2x)}{\sin x}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

4) $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$

5) $\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1}$

6) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جد النهاية

الصيغه $\frac{\infty}{\infty}$

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\ln x}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-3}{t+2}\right)^{t}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{10-x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{160x^{-0.4}+90}{20x^{-0.4}+10}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}}$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T- 0544560575

$0 \cdot \infty$ و $\infty - \infty$

1) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x$

2) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \cot x$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$

4) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5) $\lim_{t \to 0} te^{-1/t}$

6) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \csc x$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$0 \cdot \infty$ و $\infty - \infty$

1) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

2) $\lim_{x\to\infty} \left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

3) $\lim_{x\to\infty} \left(\tan x - \frac{1}{x-\pi/2}\right)$

4) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الصيغ 1^{∞} و 0^0 و ∞^0

صيغ من النوع 1^{∞}

تحتاج لوغاريتم

1) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

2) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$

3) $\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^t$

4) $\left(\frac{t-3}{2t+1}\right)^t$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

صيغ من النوع 0^0

1) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

2) $\frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$

3) $\frac{\ln x}{\cot x}$

4) $\frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

صيغ من النوع ∞^0

1) $\left(\frac{t-3}{t+2}\right)^t$

2) $\left(\frac{t-3}{2t+1}\right)^t$

التمارين 41_44: جد كل الأخطاء.

.41

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

.42

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

.43

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2/x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} (-x^2) = 0.$$

.44

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0.$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

التمارين 45–48، عَيِّنْ الطريقة بتحديد ما إذا كان ينبغي استخدام طريقة لوبيتال أم لا.

.45

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\csc x}{\sqrt{x}}$$

.46

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-3/2}}{\ln x}$$

.47

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-3x+1}{\tan^{-1} x}$$

.48

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x^2)}{e^{x/3}}$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

إذا كانت $g(x)$ و $f(x)$ تحققان شروط قاعدة لوبيتال فإن العبارة الصحيحة للقاعدة هي

A. $\lim_{x\to C}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to C}\frac{f`(x)}{g`(x)}$

C. $\lim_{x\to C}\frac{f`(x)}{g(x)}=\lim_{x\to C}\frac{f`(x)}{g(x)}$

B. $\lim_{x\to C}\frac{f(x)}{g`(x)}=\lim_{x\to C}\frac{f(x)}{g`(x)}$

D. $\lim_{x\to C}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to C}\frac{g`(x)}{f`(x)}$

إن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=$

A. $-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

إن النهاية $\lim_{x\to \infty}\frac{e^{2x}+x^2}{x^3}=$

A. $-\infty$

C. ∞

B. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

إن النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\ln x}{2+\csc x}=$

A. 0

C. ∞

B. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

إن النهاية $\lim_{x\to 0}(\cot x-\frac{1}{x})=$

A. 0

C. ∞

B. 1

D. -1

إن النهاية $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x})=$

A. 0

C. ∞

B. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

إن النهاية $\lim_{x\to -1}(\ln -x)(\frac{1}{x+1}) =$

A. 0
C. -1
B. $\frac{1}{2}$
D. $-\frac{1}{2}$

إن النهاية $\lim_{x\to \infty}(\frac{x-3}{x+2})^x =$

A. e^{-2}
C. e^{-5}
B. e^{-3}
D. e^{-1}

إن النهاية $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x =$

A. 1
C. -1
B. 0
D. 2

إن النهاية $\lim_{x\to \infty}(x+1)^{\frac{2}{x}} =$

A. e
C. e^2
B. 1
D. 2

إن النهاية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin^{-1} x} =$

A. 0
C. -1
B. 1
D. 2

إن النهاية $\lim_{x\to 0}(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}) =$

A. 0
C. -1
B. $\frac{1}{3}$
D. $-\frac{1}{3}$

إن النهاية $\lim_{x\to \infty}(\frac{\sqrt{x}-2}{1+\ln x}) =$

A. 0
C. ∞
B. 1
D. -1

إن النهاية $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)}) =$

A. 0
C. ∞
B. 1
D. -1

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

إن النهاية $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=$

A. 0
C. ∞
B. 1
D. -1

إن النهاية $\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3})=$

A. $-\frac{2}{3}$
C. $-\frac{3}{2}$
B. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{3}{2}$

واحدة مما يلي يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال مباشرة عليها عينها

A. $\lim_{x\to 0^+}(\frac{\csc x}{\sqrt{x}})$
C. $\lim_{x\to 0^+}(\frac{x^{\frac{-3}{2}}}{\ln x})$
B. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-3x+2}{\tan^{-1}x})$
D. $\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}})$

إذا كانت $x\to\infty$ و $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=$ وكانت f تهيمن على g

A. $\lim_{x\to\infty}(\frac{g(x)}{f(x)})=\infty$
C. $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{g(x})=\infty$
B. $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{g(x})=0$
D. $\lim_{x\to\infty}(\frac{g(x)}{f(x})=\infty$

إن النهاية $\lim_{x\to\infty}(\frac{\ln x^n}{\ln x^p})=$ حيث $x>0$

A. $-\frac{n}{p}$
C. 1
B. $\frac{n}{p}$
D. ∞

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

قواعد الاشتقاق

ثابت k $f(x)=k$ $f'(x)=0$	ثابت k $f(x)=kx^n$ $f'(x)=nkx^{n-1}$
ثابت k $f(x)=kx+b$ $f'(x)=k$	ثابت k $f(x)=kx^2$ $f'(x)=k(2x)$
$f(x)=\sqrt{x}$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\frac{1}{x}$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=g(x)\pm k(x)\pm l(x)$ $f'(x)=g'(x)\pm k'(x)\pm l'(x)$	$f(x)=g(x).\ k(x)$ $f'(x)=g'(x).\ k(x)+k'(x).g(x)$
$f(x)=\frac{g(x)}{l(x)}$ $f'(x)=\frac{g'(x).l(x)-l'(x).g(x)}{(l(x))^2}$	$f(x)=k.g(x)$ $f'(x)=k.g'(x)$
ثابت k $f(x)=\frac{k}{g(x)}$ $f'(x)=\frac{-k(g'(x))}{(g(x))^2}$	ثابت k $f(x)=\frac{g(x)}{k}$ $f(x)=\frac{g'(x)}{k}$

AMR ELBAYOUMY MATH
2026
1-0544560575

$y = a^x$ ثابت a موجب

$y' = a^x . lna$

$y = e^x$

$y' = e^x$

$y = lnx$

$y' = \frac{1}{x}$

$y = e^{kx}$ ثابت k

$y' = e^{kx} . k$

$y = ln . g(x)$

$y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$y = a^{g(x)}$ ثابت a موجب

$y' = g'(x) . a^{g(x)} . lna$

الاشتقاق الضمني

$y^3 \rightarrow 3y^2 y'$

$\sqrt{y} \rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}}$

$\frac{1}{y} \rightarrow \frac{-1 . y'}{y^2}$

$siny \rightarrow y'cosy$

التفاضل الوغاريتمي

$y = x^x$

قاعدة الضرب نشتق $\ln y = x . lnx$

$\frac{y'}{y} = lnx + \frac{1}{x} . x$

نعوض بمعادلة y $y' = (lnx + 1)y$

$y' = (lnx + 1)x^x$

$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$

$(\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$

$(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

$(\csc^{-1} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
0544560575

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f(x)=(g(x))^n$$

$$f'(x)=n(g(x))^{n-1}.g'(x)$$

$$(\sin x)'=\cos x$$
$$(\cos x)'=-\sin x$$
$$(\tan x)'=\sec^2 x$$
$$(\cot x)'=-\csc^2 x$$
$$(\sec x)'=\sec x\ tanx$$
$$(\csc x)'=-csc\,x cotx$$

$$f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{3\sqrt{g(x)^2}}$$

$$f(x)=\sin(g(x))$$

$$f'(x)=g'(x).(sin'(g(x))$$

بعض قواعد المتطابقات

$$sin2x=2\sin x\ cosx$$

$$cos2x=cos^2x-sin^2x$$

$$cos^2x-sin^2x=1$$

معادلة المماس

مهم

$$y=m(x-x_1)+y_1$$

x_1 = a

m = مشتقة الدالة بعد التعويض ب a

y_1 = الدالة الاصلية بعد التعويض ب a

عندما يطلب مشتقة المعكوس

$f(x)=g(x)$

$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}$

$f'(x)=g'(x)$

$f(x)=a$ ← نوجد قيمة x

التعويض = f' (القيمة)

$g'(a)=\frac{1}{\text{الناتج من التعويض}}$

ARFELBAYOUMY MATH
مدرسة اكاديمي الدحيح
2020
0544560575

@AMRMATH7

العدد الحرج هو العدد في مجال الدالة الذي تكون عندة المشتقة تساوي صفر او غير معرفة

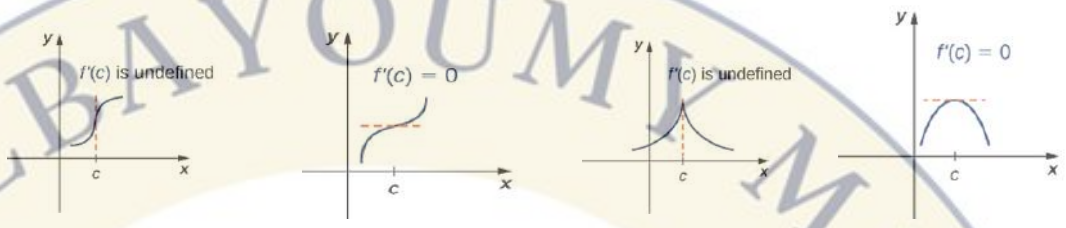
a. نقاط عدم الاتصال

b. المماسات الرأسية

c. المماسات الافقية

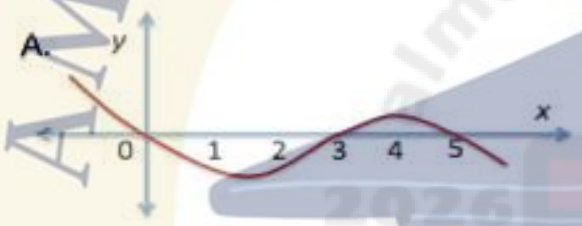
d. الرؤس المدببة

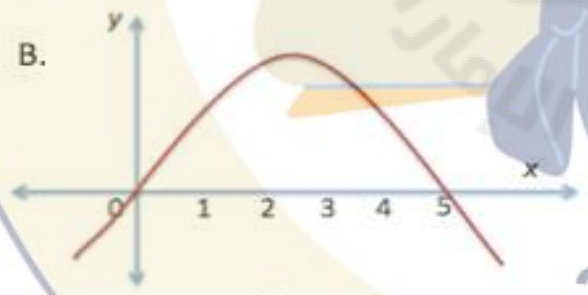
أي ان الاعداد الحرجه تكون عند



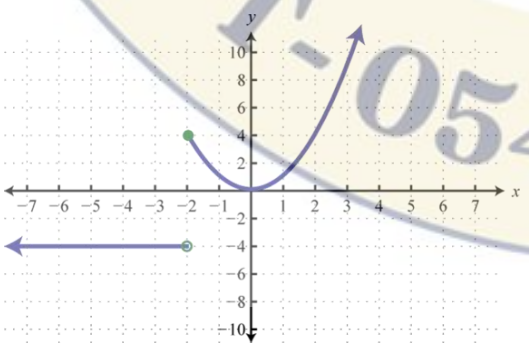
إذا كان الرسم المعطي هو رسم لمشتقة يكون العدد الحرج هو نقطه التقاطع مع محور x

أوجد الاعداد الحرجه للدالة f المعرفة علي R إذا اكان الرسم هو رسم المشتقة F'



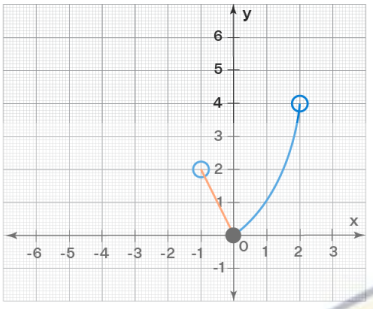


أوجد الاعداد الحرجه للدالة f المعرفة علي R



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أوجد الاعداد الحرجه للدالة f المعرفة علي الفترة $(2\ و\ -1)$



أوجد الاعداد الحرجه للدالة

$f(x) = x^2 + 5x - 1$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$f(x) = x^{3/4} - 4x^{1/4}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T 0544560575

$f(x) = \sin x \cos x, [0, 2\pi]$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

$f(x) = |x^2 - 1|$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{if } x<0 \\ x^2-4x+3 & \text{if } x\geq 0 \end{cases}$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$f(x)=\frac{3x}{x-3}\ ;\ [2,8]$$

اذا كانت الدالة $f(x)=x^4-2ax^2+8x$ لها عدد حرج عند $x=2$ فأوجد a

اذا كانت الدالة $f(x)=2x^2e^{ax}$ لها عدد حرج عند $x=-\frac{2}{3}$ فأوجد a

اذا كانت الدالة $f(x)=2x^3+ax^2+bx$

لها أعداد حرجه عند $x=-1\,,x=2$ فأوجد a

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

تعريف 3.1

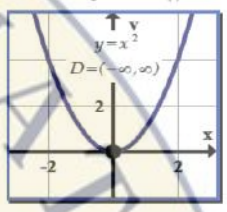
الدالة f المُعرَّفة في المجموعة S من الأعداد الحقيقية والعدد $c \in S$

(i) $f(c)$ هي **القيمة العظمى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in S$ و

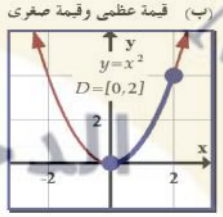
(ii) $f(c)$ هي **القيمة الصغرى المطلقة** للدالة f في S إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in S$.

القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة يُشار إليها بـ **القيمة القصوى** المطلقة. (وصيغة الجمع للقيمة القصوى هي **القيم القصوى**).

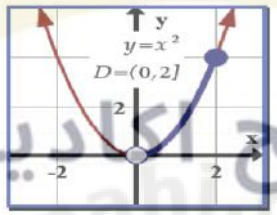
(أ) قيمة صغرى فقط



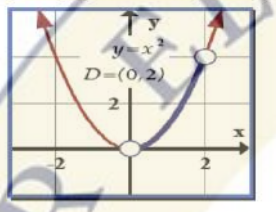
(ب) قيمة عظمى وقيمة صغرى



(ج) قيمة عظمى فقط



(د) لا توجد قيمة عظمى ولا صغرى



اربع حلات للقيم العظمي والصغرى علي حسب الحالة والمجال أو الفترة التي تتم عليها دراسة الدالة

مثال 1

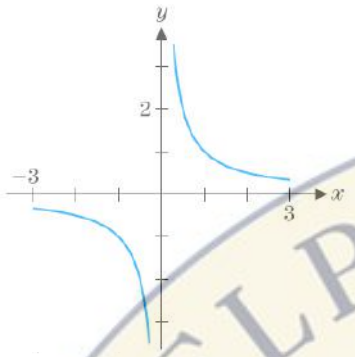
(a) حدد مكان أى قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-\infty, \infty)$

(b) حدد مكان أى قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ فى الفترة $(-3, 3)$.

(c) حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 9$ في الفترة $[-3, 3]$.

AMR ALBAYOUMY MATH
2026
T-0544560575

حدد مكان أي قيم قصوى مطلقة للدالة $f(x) = 1/x$ في $[-3, 0) \cup (0, 3]$.



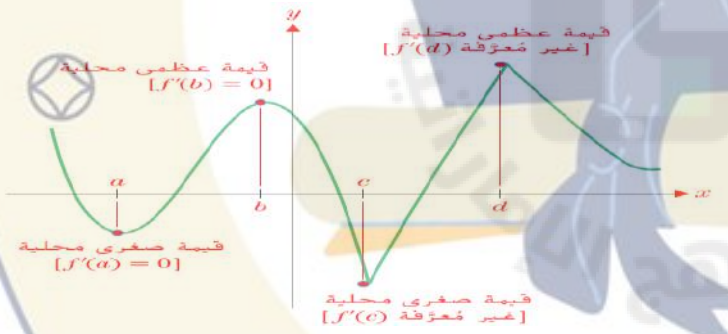
جـــد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = 1/x$ في الفترة $[1, 3]$.

الدحيح اكاديمي

$f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

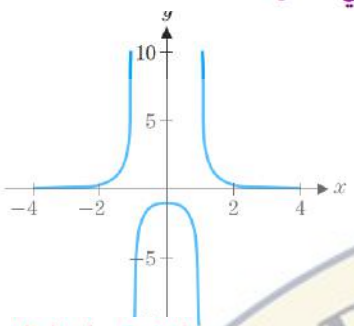
$f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c .

في كلتا الحالتين نطلق على $f(c)$ قيمة قصوى محلية للدالة f.



AMR ELBAYOUMY MATH
2026
T-0544560575

استخدم التمثيل البياني لتحديد مكان القيم القصوى المطلقة (إذا كانت موجودة) للدالة في الفترة المُعطاة



$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ في (a) $(0, 1) \cup (1, \infty)$

(b) $(-1, 1)$

(c) $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

جـــد القيم القصوى المطلقة لدالة

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ في $[-3, 2]$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ في $[-3, 1]$

$f(x) = x^{2/3}$ في $[-4, -2]$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$f(x) = x^2 e^{-4x}$ في $[-2, 0]$

$f(x) = \frac{3x^2}{x-3}$ في $[-2, 2]$

$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ في $[-3, 4]$

$f(x) = \frac{3x}{x^2+16}$ في $[0, 2]$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أسئلة امتحانات و هياكل الأعوام السابقة

Find the x –coordinate of the local maximum of $f(x) = x^2e^{-x}$.

أوجد إحداثي x للقيمة العظمى المحلية لـ $f(x) = x^2e^{-x}$.

a. $x = -\frac{1}{2}$

b. $x = 0$

c. $x = 2$

d. $x = -2$

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

جد كل الأعداد الحرجة يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

6. (a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$a)x = 1, x = -1, x = 0$

$b)x = 1$

$c)$no critical points لا توجد نقاط حرجة

$d)x = i, x = -i$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
0544560575

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

جد كل الأعداد الحرجةً يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

(b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 2$

$A) 0$

$B) 0, 4$

$C) \pm 1$

$D) -4$

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

جد كل الأعداد الحرجةً يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

5. (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

$a) x = 1, x = -1$

$b) x = 1$

$c) no\ critical\ points$ لا توجد نقاط حرجه

$d) x = i, x = -i$

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

جد كل الأعداد الحرجةً يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

(b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

$a) x = \frac{9}{4}$

$b) x = 0, x = \frac{9}{4}$

$c) x = 1$

$d) x = \frac{-9}{4}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

Find all the critical numbers of $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

أوجد كل الأعداد الحرجة لـ $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

Find the absolute extrema of the function $f(x) = x^3 - 12x + 10$ on the interval $[0, 3]$.

أوجد القيم القصوى المطلقة لدالة $f(x) = x^3 - 12x + 10$ في الفترة $[0, 3]$.

Find the x –coordinate of the local maximum of $f(x) = x^2e^{-x}$.

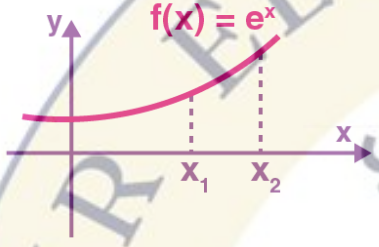
أوجد إحداثي x للقيمة العظمى المحلية لـ $f(x) = x^2e^{-x}$.

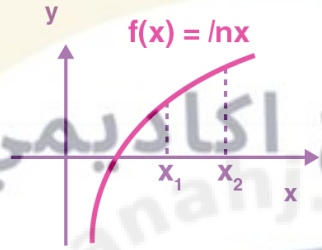
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

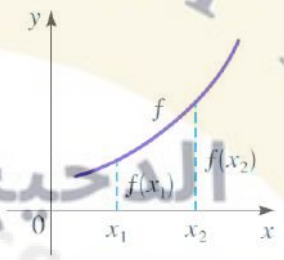
الدرس الرابع : الدوال المتزايدة والمتناقصة

تكون f دالة متزايدة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ عندما $x_1 < x_2$ ، فانّ $f(x_1) < f(x_2)$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أكبر].

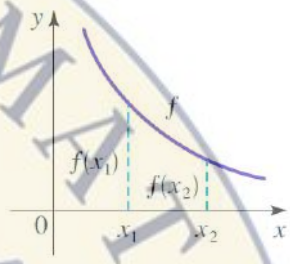
تكون f دالة متناقصة في الفترة I إذا كانت لكل $x_1, x_2 \in I$ ، فانّ $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$ [بمعنى، تصبح $f(x)$ أكبر كلما أصبحت x أصغر].







f is increasing

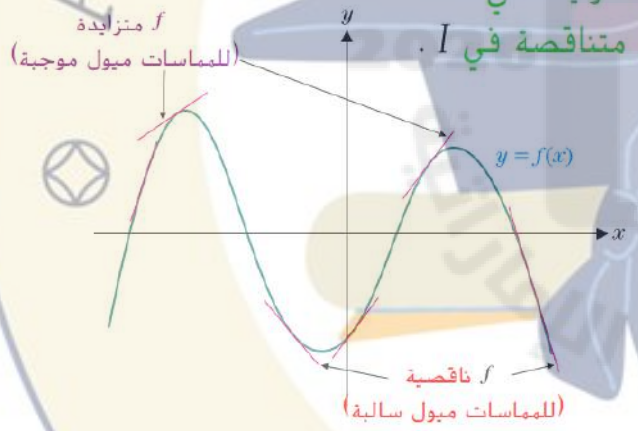


f is decreasing

على فرض أن f قابلة للاشتقاق في الفترة I .

(i) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متزايدة في I .

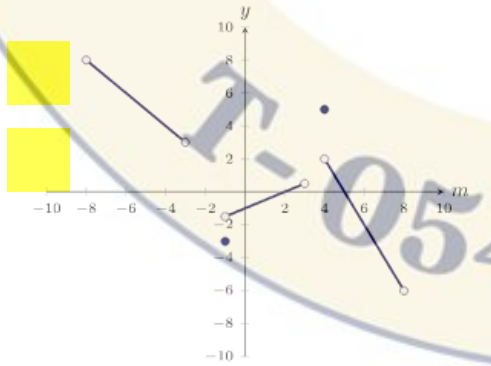
(ii) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متناقصة في I .

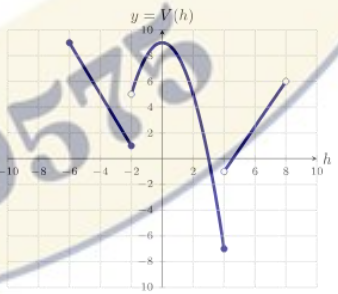


الميل موجب يعني المتشتقة موجبة الدلة متزايدة

الميل سالب يعني المتشتقة سالبة الدلة متناقصة

حدد فترات التزايد والتناقص في الرسم





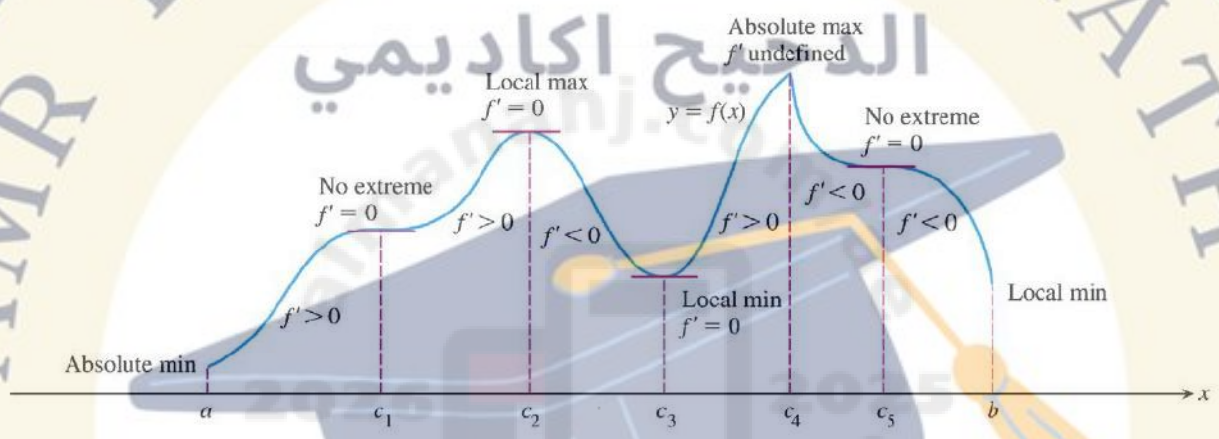
AMR ELBA YOUMY MATH
2026
T-0544560575

كيفية دراسة فترات التزايد والتناقص

تحديد النقاط الحرجه للدالة من خلال إيجاد المشتقة ومساوتها بالصفر او تكون غير معرفة

دراسة إشارة المشتقة

موجبة : متزايدة سالبة : متناقصة



f'	+++++++	- - - - - - -	+++++++++
سلوك الدالة	تذايد	تناقص	تزايد
القيم القصوى		عظمي	صغري

حدد النقاط الحرجه و فترات التزايد والتناقص والقيم القصوي لكل دالة

$$y = x^3 - 3x + 2$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدليل اكاديمي
2026
0544560575

$$y = x^4 - 8x^2 + 1$$

$$y = (x+1)^{2/3}$$

$$y = e^{x^2-1}$$

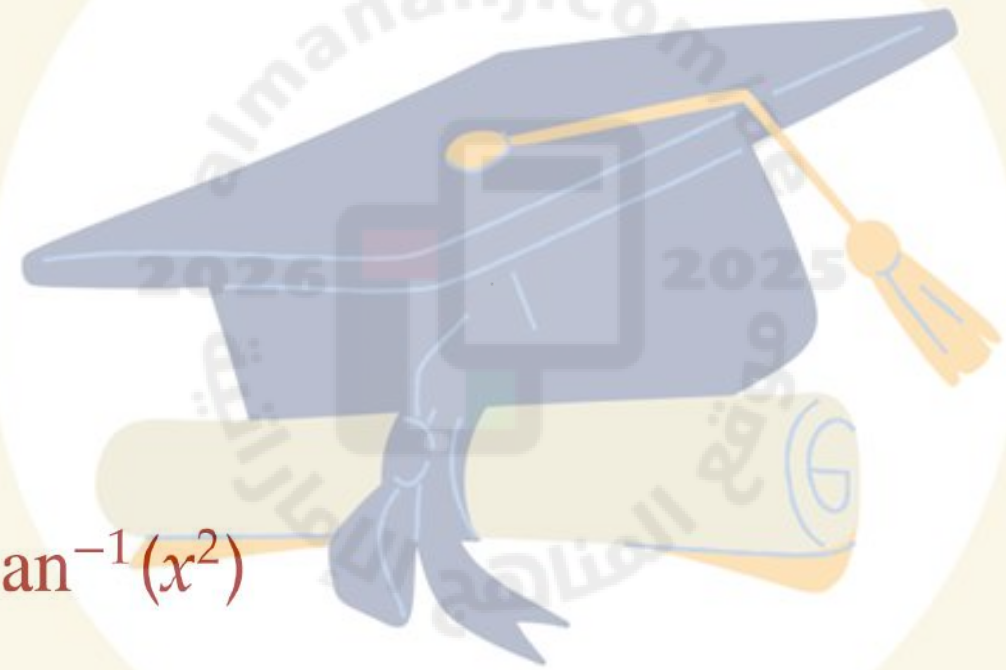
$$y = \sin x + \cos x$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$y = \ln(x^2 - 1)$$

$$y = xe^{-2x}$$

$$y = \tan^{-1}(x^2)$$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$y = \frac{x}{1+x^3}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$$

إذا كانت f و g دالتين متزايدتين، فهل صحيح أن $f(g(x))$ تُعد كذلك متزايدة؟ إما أن تثبت صحة العبارة أو اعرض مثالاً يثبت خطأها.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
T-0544560575

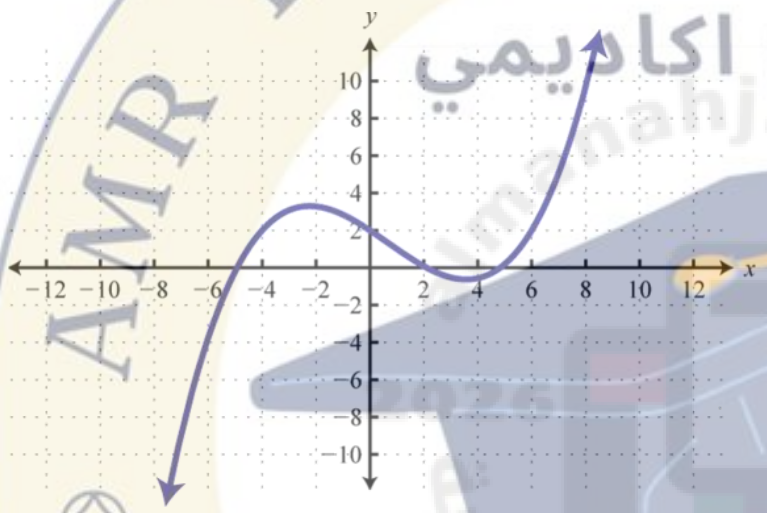
كيفية دراسة فترات التزايد والتناقص من المشتقة F'

تحديد النقاط الحرجه وهي نقاط التقاطع مع محور x

دراسة التزايد والتناقض

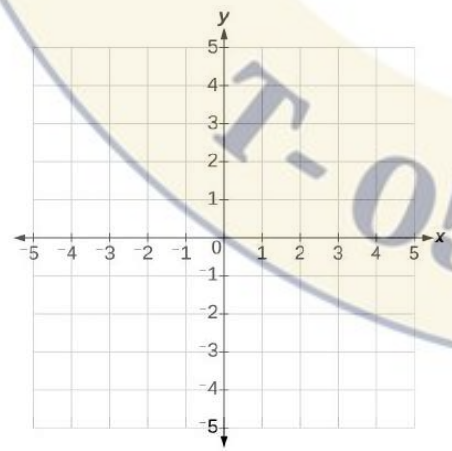
أعلي محور x : متزايدة أسفل محور x : متناقصة

حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى ونوعها معتمدا علي رسم المشتقة امامك



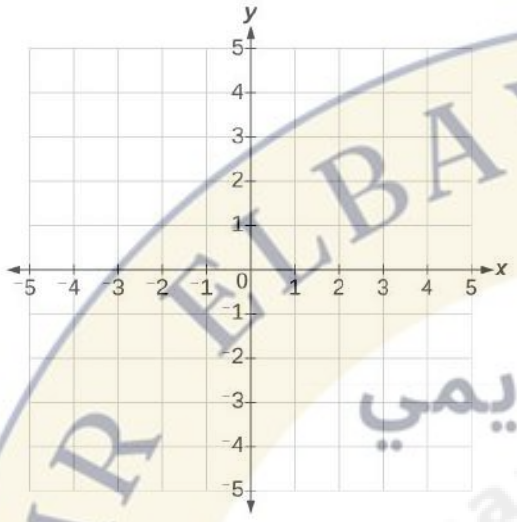
ارسم تمثيلا بيانيا بالخصائص المذكورة

$f(0)=1$. $f(2)=5$. $f'(x)<0$ لكل $x<0$ و $f'(x)>0$. $x>2$ لكل $0<x<2$



AMR EL BAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T. 0544560575

$f(-1)=1$ ، $f(2)=5$ ، $f'(x)<0$ لكل $x<-1$ و $x>2$ ، $f'(x)>0$
لكل $-1<x<2$ ، $f'(-1)=0$ ، $f'(2)$ غير موجودة.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
almanahj.com
2026
2025

أسئلة امتحانات وهياكل الأعوام السابقة

جد كل الأعداد الحرجةً يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

7. $f(x)=x^4-3x^3+2$

$a)x=\frac{9}{4}\max$ قيمة عظمي

$b)x=0\ ,x=\frac{9}{4} is\ local\ \min$ صغري محليه

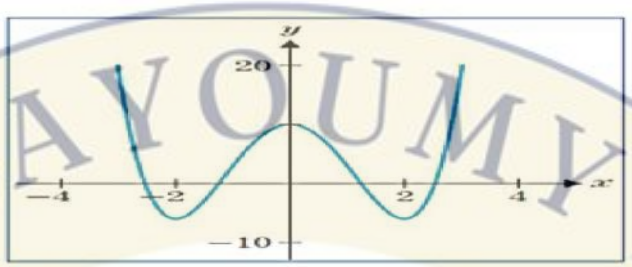
$c)x=1 local\ \min$ صغري محلية

$d)x=\frac{-9}{4} local\ \max$ عظمي محلية

2026
T.0544560575

Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing.

أوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة.



a. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

c. $(-2,0)\cup(0,2)$

b. $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

d. $(-2,0)\cup(2,\infty)$

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

$$f(x)=x^3-3x+1 \quad on\ [0,2]$$

جـد القيم القصوى المطلقة لدالة

a) (1,−1) *Abs mini* , (2,3) *Abs maxi*

b) (1,−1) *Abs maxi* , (2,3) *Abs mini*

c) (−3,−17) *Abs mini* , (−1,3) *and* (2,3) *Abs maxi*

d) (−3,−17) *Abs mini* , (2,3) *Abs maxi*

a) قيمة صغري (1,-1) عظمي مطلقة (2,3)

b) قيمة عظمي (1,-1) صغري مطلقة (2,3)

c) قيمة صغري (-3,-17) عظمي مطلقة (2,3) و(-1,3)

d) قيمة صغري (-3,-17) عظمي مطلقة (2,3)

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الدرس الخامس : التقعر وإختبار المشتقة الثانية

لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f

(i) **مقعّرًا إلى الأعلى** في I إذا كانت f' متزايدة في I.

(ii) **مقعّرًا إلى الأسفل** في I إذا كانت f' متناقصة في I.

على فرض أن f'' موجودة في الفترة I .

(i) إذا كانت $f''(x) > 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأعلى في I .

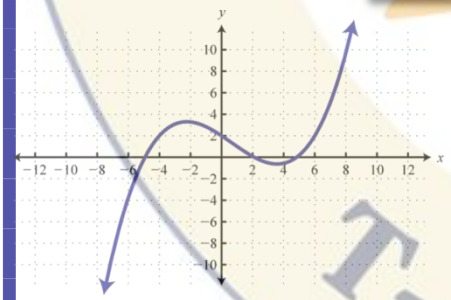
(ii) إذا كانت $f''(x) < 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأسفل في I .

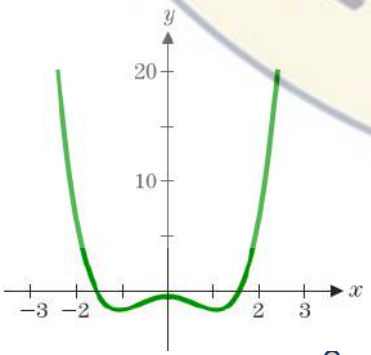
نقطة الانعطاف هي النقطة التي تغير فيها الدالة تقعرها من أعلي الي اسفل او من أسفل الي اعلي بشرط أنها متصلة علي الفترة

نقطة انعطاف

على فرض أن f متصلة في الفترة (a, b) وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $c \in (a, b)$ (أي، يتقعر التمثيل البياني إلى الأسفل على جانب واحد من c ، بينما يتقعر إلى الأعلى على الجانب الآخر). إذًا، يُطلق على النقطة $(c, f(c))$ **نقطة انعطاف** لـ f .

حدد فترات التزايد والتناقص و التقعر لاعلي ولاسفل ونقاط الانعطاف للدالة امامك





AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أ/ عمرو البيومي
@AMRMATH7

كيفية ايجاد فترات التقعر لاعلي ولاسفل (تكون مفتوحة)

إيجاد المشتقة الثانية ومساوتها بالصفر او البسط بصفر (غير معرفة)

تحديد إشارة المشتقة الثانية

موجبة : تقعر لاعلي سالبة : تقعر لاسفل

حدد فترات التقعر لاعلي ولاسفل ونقاط الانعطاف للدالة

$$f(x)=x^3-3x^2+4x-1$$

$$f(x)=x+1/x$$

$$f(x)=\sin x-\cos x$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T 0544560575

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

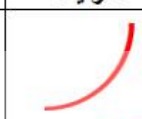
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = xe^{-4x}$$

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2)$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

ملحوظه مهمه

	متزايدة	متناقصة
مقعرة لأعلى		
مقعرة لأسفل		

اذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند العدد الحرج تساوي صفر او غير معرفة يفشل اختبار المشتقة الثانية ونعود الي المشتقة الاولي مرة أخرى

حددالنقاط الحرجه وفترات التذايد والتناقص و فترات التقعر لاعلي ولاسفل ونقاط الانعطاف للدالة

$$f(x) = x^4 - 26x^3 + x$$

المجال

المشتقة الاولي

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$f(x) = 2x^4 - 11x^3 + 17x^2$$

المجال

المشتقة الاولي

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

المجال

المشتقة الاولي

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$$

المجال

المشتقة الاولي .1

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

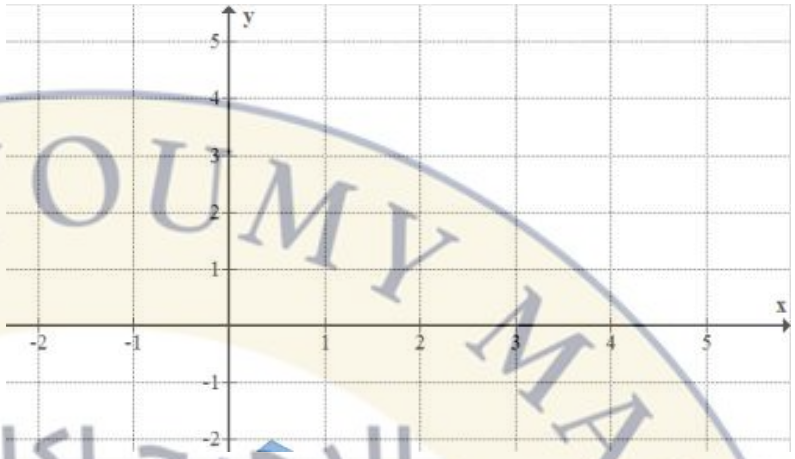
ارسم تمثيلا بيانيا بالخصائص التالية:

$f(1)=0$

$f'(x)<0: \ x<1$

$f'(x)>0: \ x>1$

$f''(x)<0: x<1 \ , x>1$



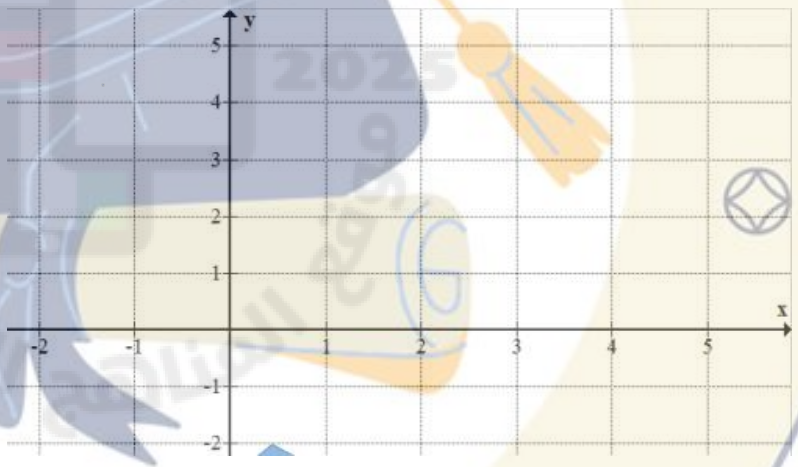
$f(0)=2$

$f'(0)=1$

$f'(x)>0:$ لكل x

$f''(x)>0: x<0$

$f''(x)<0: x>0$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أسئلة امتحانات و هياكل الأعوام السابقة

Find the inflection points of $f(x) = x^4 + 12x^3 - x$.

أوجد نقاط الانعطاف لـ $f(x) = x^4 + 12x^3 - x$.

a. $(-6, f(-6)), (0, f(0))$

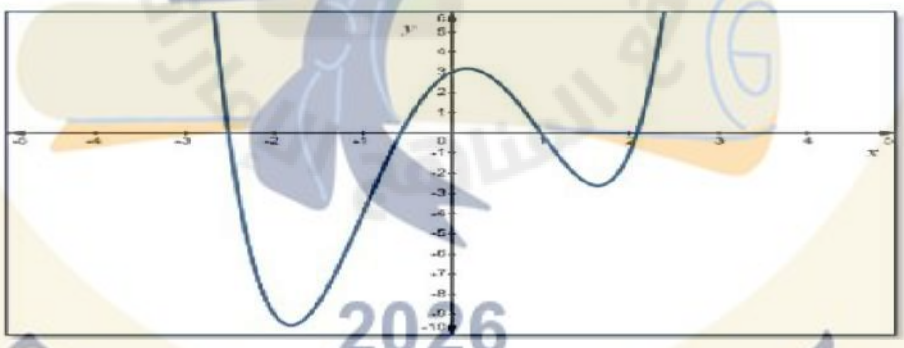
b. $(-6, f(-6)), (0, f(0)), (6, f(6))$

c. $(-6, f(-6)), (6, f(6))$

d. $(0, f(0)), (6, f(6))$

Determine where the graph of $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ is concave up.

حدد أين يكون التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ مقعرًا للأعلى.



a. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

b. $(-\infty, -1)$

c. $(-1, 1)$

d. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

find all critical numbers by hand. determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither

جد كل الأعداد الحرجة يدويا. لتحديد هل العدد الحرج يمثل قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو لا يمثل أيا

11. $f(x) = \sin x \cos x, [0, 2\pi]$

a) $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $x = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

d) $x = \left\{0, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط $f'(x) = e^{-x}$ و $f(0) = 4$.

a) $f(x) = 5 - e^{-x}$

b) $f(x) = 5 + e^{-x}$

c) $f(x) = 3 - e^{-x}$

d) $f(x) = 3 + e^{-x}$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الدرس السادس : نظرة علي رسم المنحنيات

خطوات الرسم

- **المجال:** حدد دائمًا مجال f أولًا.
- **خطوط التقارب الرأسية:** لأي نقطة منعزلة غير موجودة في مجال f. تحقق من نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من هذه النقطة. وذلك لمعرفة ما إذا كان هناك خط تقارب رأسي أو قفزة أو انفصال غير منته عند هذه النقطة.
- **معلومات حول المشتقة الأولى:** حدد أين تكون f متزايدة وأين تكون متناقصة. وجد أي قيم قصوى محلية.
- **مماسات رأسية:** في أي نقطة منعزلة ليست في مجال f'. ولكنها في مجال f. تحقق من نهاية $f(x)$. وذلك لتحديد ما إذا كان هناك مماس رأسي عند هذه النقطة.
- **معلومات حول المشتقة الثانية:** حدد ما إذا كان التمثيل البياني مقعّرًا إلى الأعلى أم مقعّرًا إلى الأسفل. وحدد موقع أي نقاط انعطاف.
- خطوط التقارب الأفقية: تحقق من نهاية $f(x)$ حيث $x \to \infty$ وحيث $x \to -\infty$.
- **التقاطعات مع المحورين:** حدد موقع التقاطع مع المحور x والمحور y

مثال

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ يوضح جميع المميزات المهمة.

المجال

2. المشتقة الاولي

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

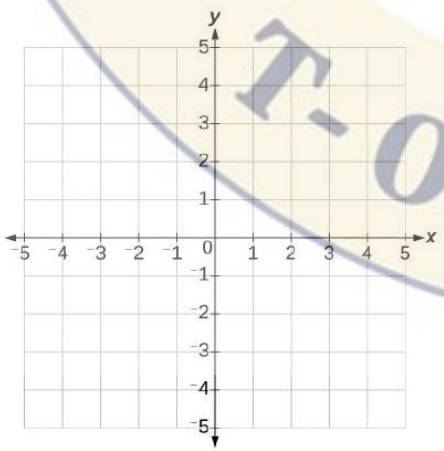
المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى



AMR EL BAYOUMY
البيومي اكاديمي
2026
T. 0544560575

أوجد خطوط التقارب الراسية والافقية والمائلة

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$$

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x^3+x}$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

أوجد خطوط التقارب الراسية والافقية والمائلة

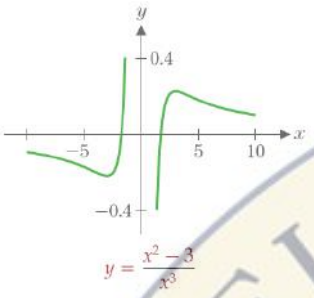
$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^3}$$

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{3x^2-1}{x}$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x)=\frac{x^2-3}{x^3}$ يوضح جميع المميزات المهمة.



المجال

المشتقة الاولي .3

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

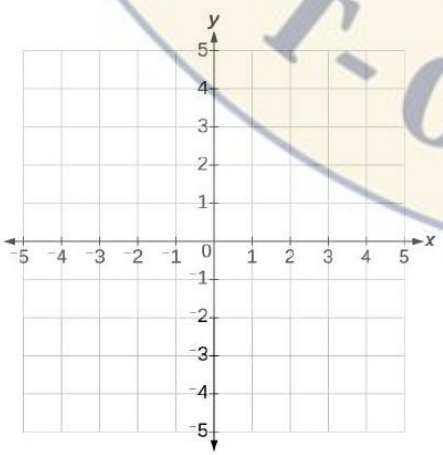
المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

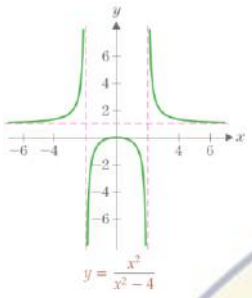
نقاط الانعطاف

القيم القصوى



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T.0544560575

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ يوضح جميع المميزات المهمة.



المجال

المشتقة الاولي 4.

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

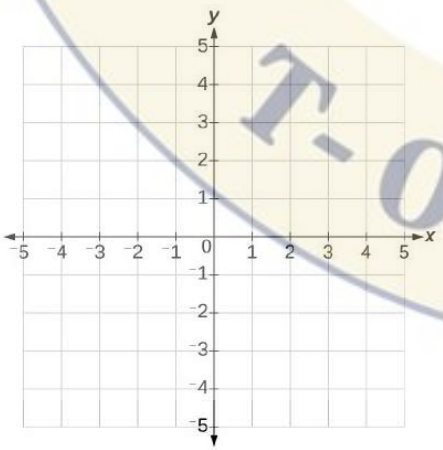
المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

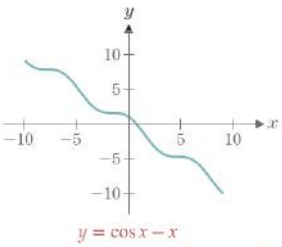
نقاط الانعطاف

القيم القصوى



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \cos x - x$ يوضح جميع المميزات المهمة.



المجال

المشتقة الاولي 5.

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

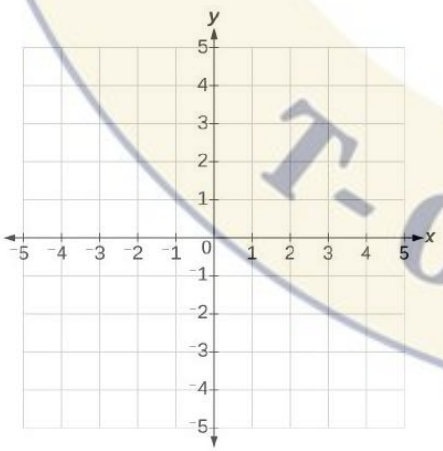
المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T. 0544560575

Find all vertical asymptotes of the function.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

أوجد جميع خطوط التقارب الرأسية للدالة.

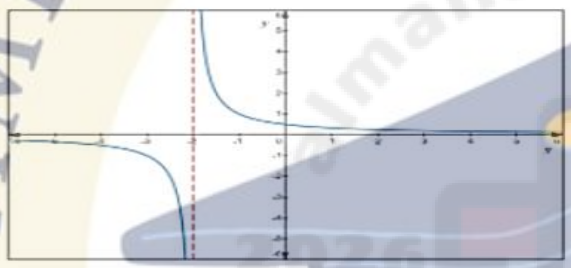
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

A	B	C	D
0	1,-1	2	1

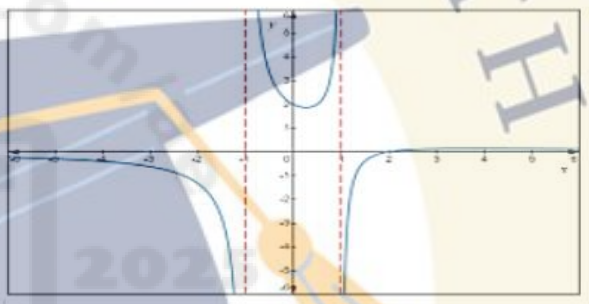
Determine the graph of the function $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

حدد التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$.

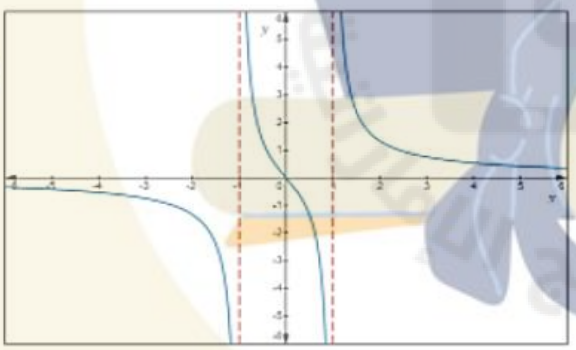
a.



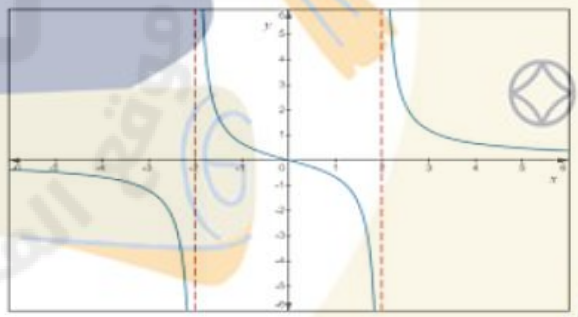
c.



b.

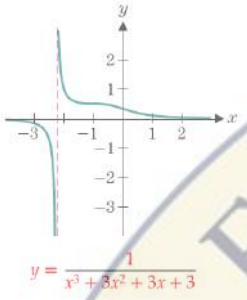


d.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}$ يوضح جميع المميزات المهمة.



المجال

المشتقة الاولي .6

النقاط الحرجه

فترات التزايد

فترات التناقص

المشتقة الثانية

المشتقة الثانية تساوي صفر

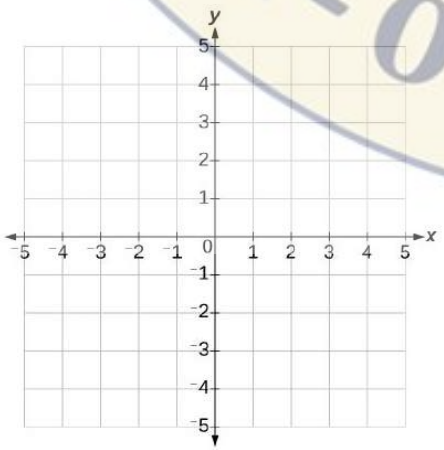
المشتقة الثانية غير موجوده

فترات التقعر لاعلي

فترات التقعر لاسفل

نقاط الانعطاف

القيم القصوى

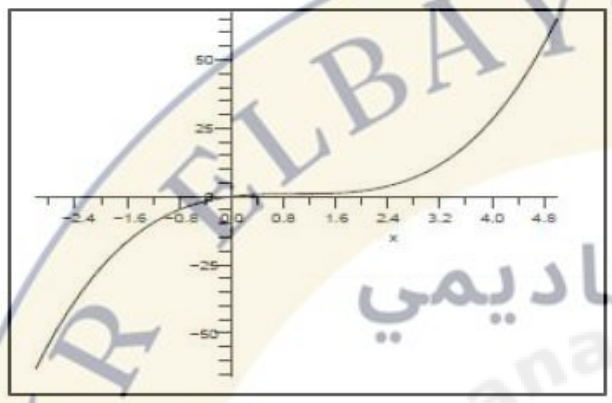


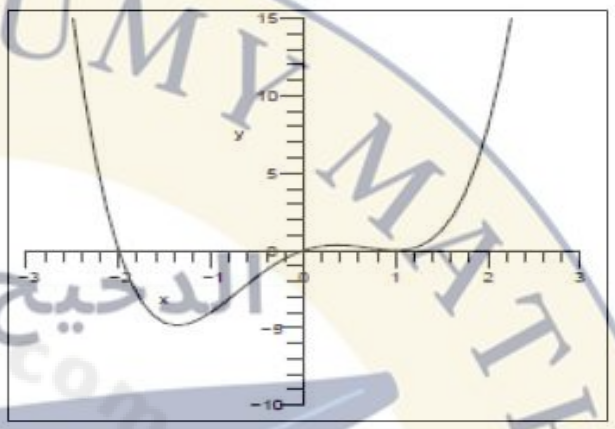
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575
@AMRMATH7

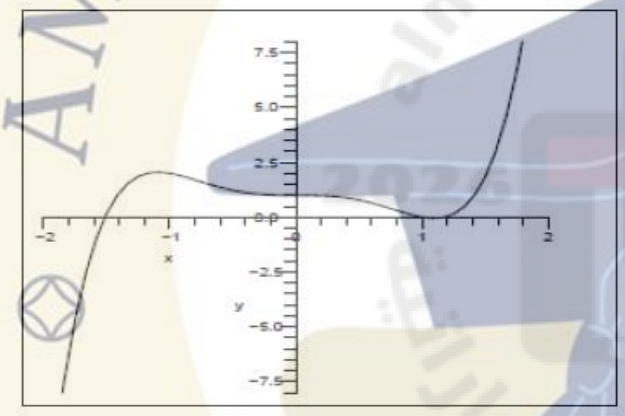
Determine the graph of the function.

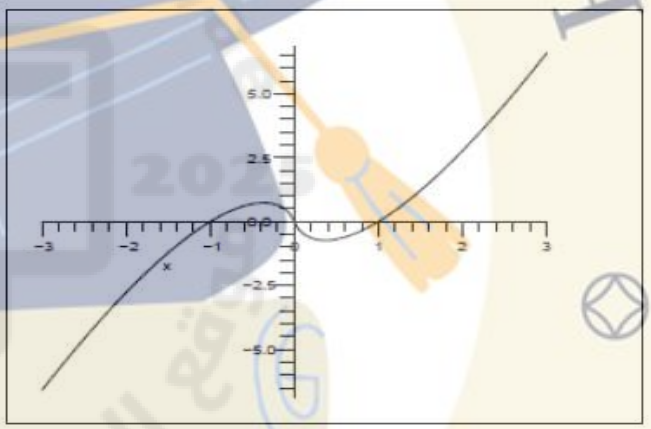
حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$







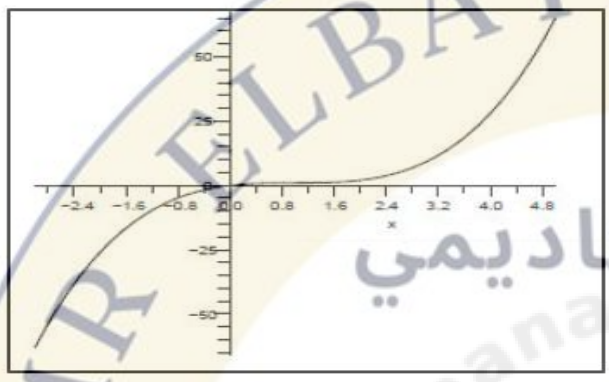


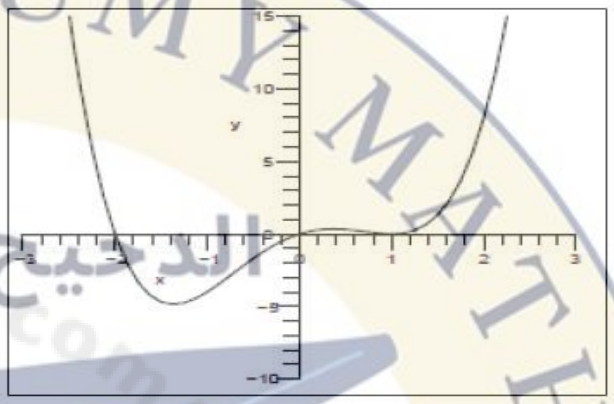
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

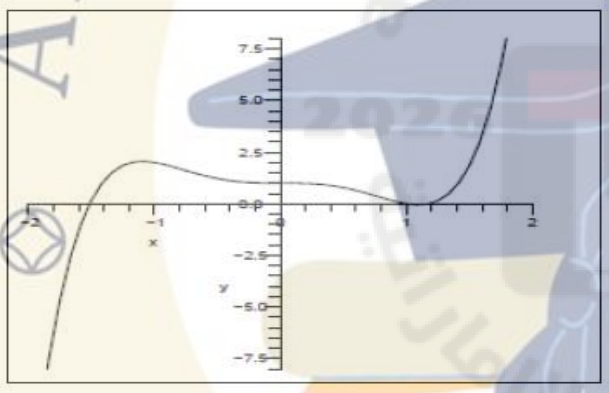
Determine the graph of the function.

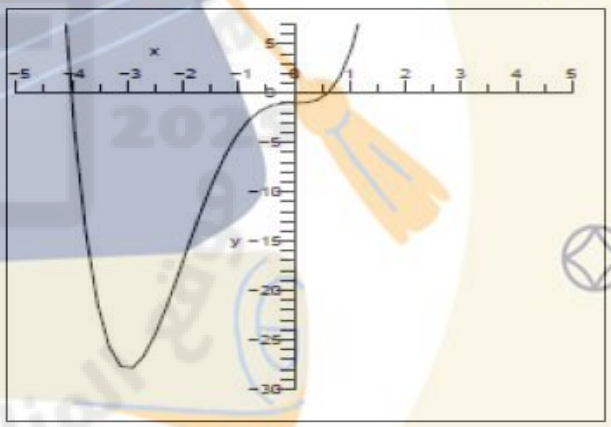
حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$







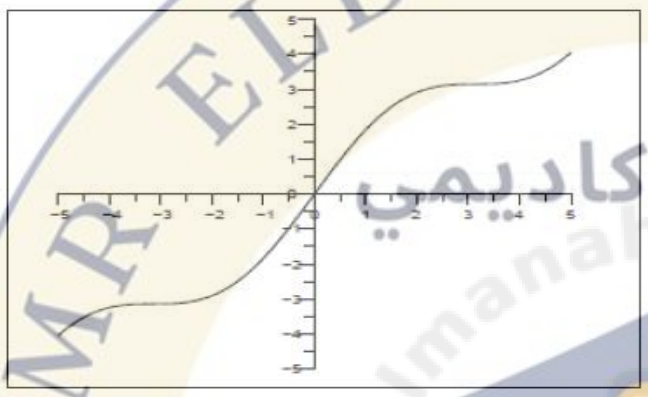


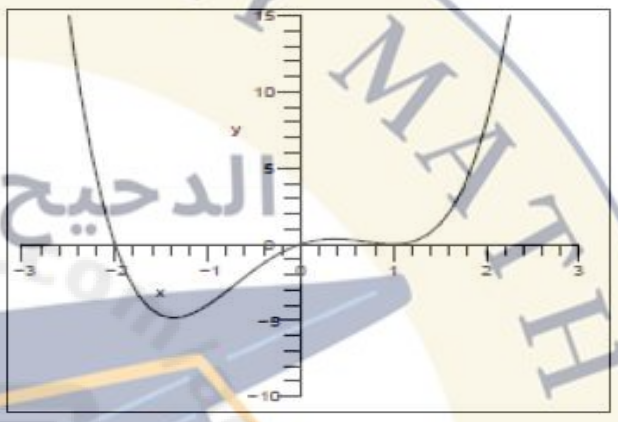
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

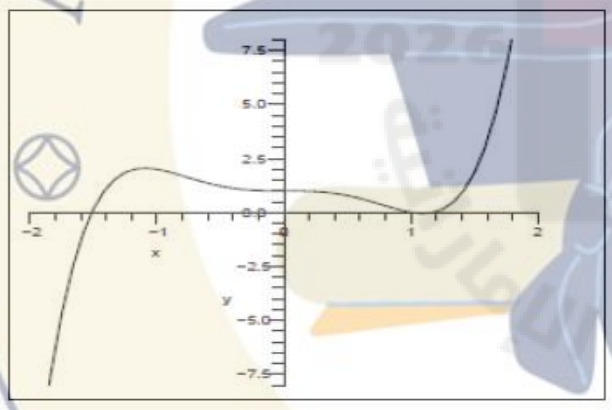
Determine the graph of the function.

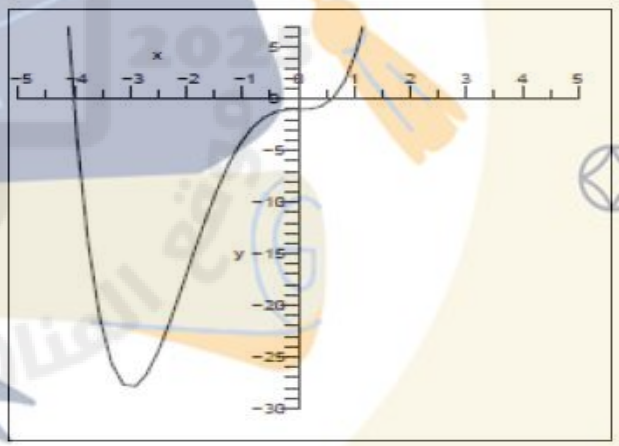
حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$$







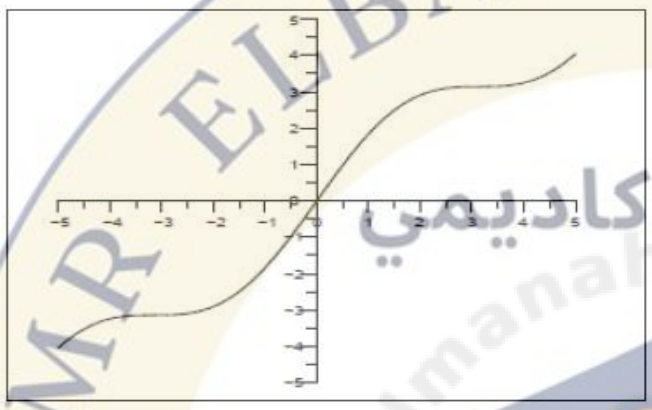


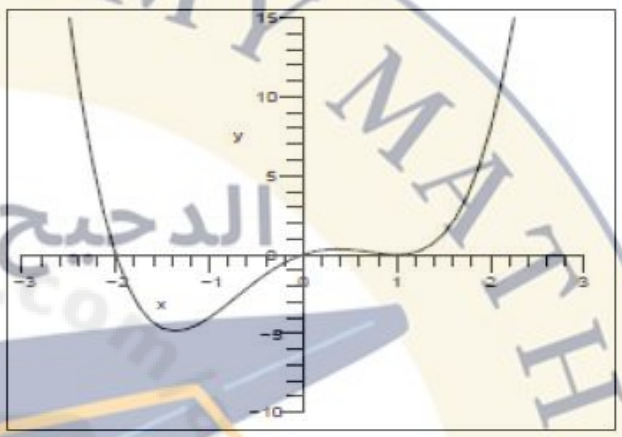
AMR EL BAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

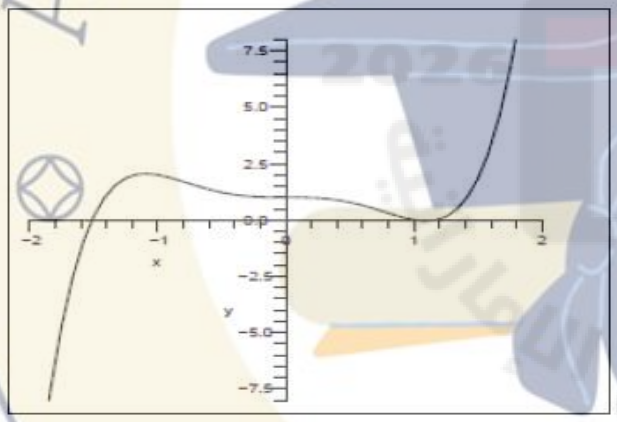
Determine the graph of the function.

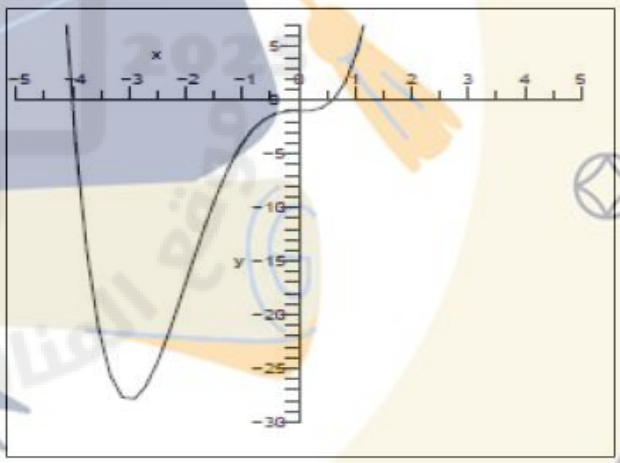
حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$$









AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الدرس السابع : القيم المثلي

كيفية حل مسائل القيم المثلي

تحديد المتغيرات

هناك دالتين واحده أساسية وهي مرتبطه بالقيم القصوي (أكبر و أصغر كدا يعني ....)

كتابة الدالة الأساسية في متغير واحد عن طريق دالة أخرى مساعدة تستنتجها من المسائلة

تحديد مجال الدالة الناتجه ومن ثم هناك حلان اما

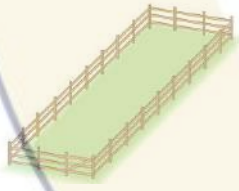
ان المجال علي فترة مغلقة فيكون هناك اعداد حرجه واطراف الفترة للتعويض لايجاد القيم القصوي

او المجال فترة مفتوحه فتتخدم اختبار المشتقة الاولي والثانية لايجاد القيم القصوى

ثم التعويض في الدالة المساعده لايجاد القيم الأخرى

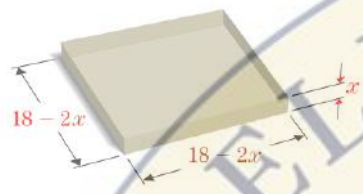
مثال

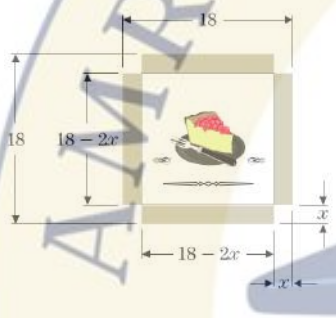
لديك سياج طوله 40 ft لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. جـد أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذه السياج وأبعاد الحديقة المناظرة لها.



AMR EL BAYOUMY MATH
2026
T-0544560575

لوح مربع من الورق المقوى طول ضلعه. 18 in صنع منه صندوق مفتوح (أي، لا يوجد غطاء). بقطع مربعات متساوية من كل زاوية (انظر الشكل 4.81a) وطي الجوانب على طول الخطوط المنقطة. (انظر الشكل 4.81b). جد أبعاد الصندوق الذي له قيمة عظمى للحجم.

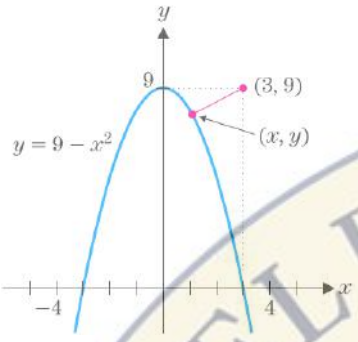




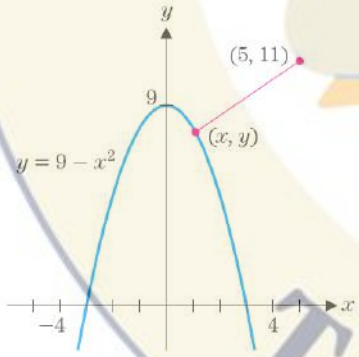
يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة. المساحة المحاطة تساوي $1800\ \text{ft}^2$. جد أصغر قيمة ممكنة للمحيط المناظر لهذه المساحة.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جـــد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(3, 9)$.

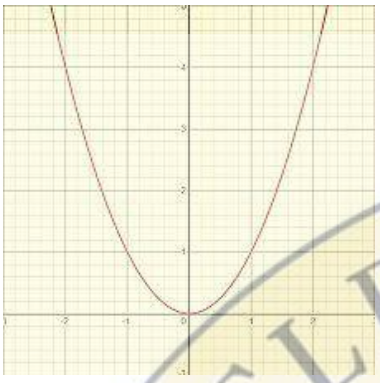


جـــد النقطة على القطع المكافئ $y = 9 - x^2$ الأقرب للنقطة $(5, 11)$.

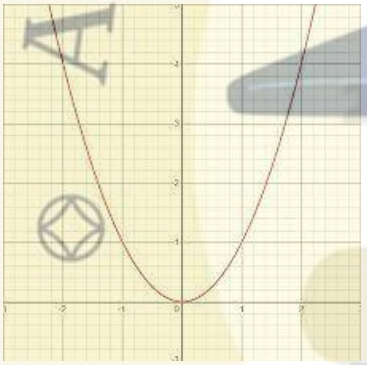


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جـــد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(0, 1)$.

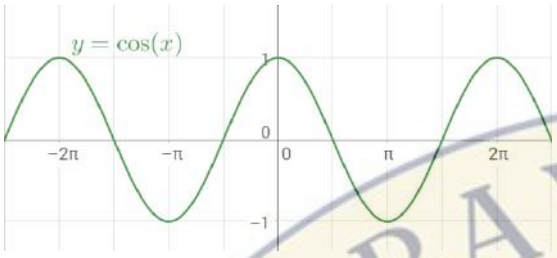


جـــد النقطة على المنحنى $y = x^2$ الأقرب للنقطة $(3, 4)$.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

جـــد النقطة على المنحنى $y = \cos x$ الأقرب للنقطة $(0, 0)$.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

تتسع علبة الصودا لـ 12 fl oz. جـــدابعاد العلبة التي ستوفر القيمة الصغرى لكمية المواد المستخدمة في صنعها، على فرض أن سمك المادة واحد (أي، سمك الألمنيوم واحد في أي مكان بالعبوة).

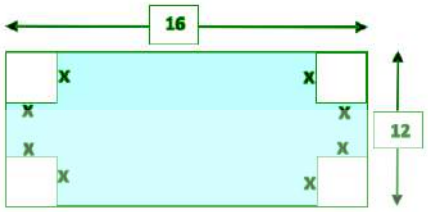
تريد مدينة بناء امتداد جديد لطريق سريع يربط الجسر الحالي بتقاطع لشارع رئيسي، يقع على بعد 8 mi من جهتي جنوب وشرق الجسر. وهناك امتداد بعرض 5 mi لمستنقعات مجاورة للجسر يجب عبورها. (انظر الشكل). على فرض أن الطريق السريع يكلف 10 ملايين درهم إماراتي للميل للبناء فوق المستنقعات و7 ملايين درهم إماراتي فقط للميل للبناء فوق أرض جافة، فما هي المسافة بين الطريق السريع و شرق الجسر عندما يعبر المستنقعات؟

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
0544560575

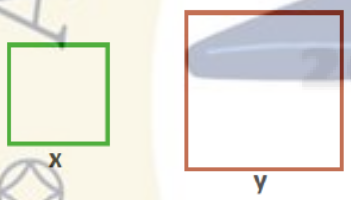
يجب أن تكون صالة عرض بمتجر متعدد الأقسام مستطيلة بثلاثة جدران في ثلاثة جوانب وفتحات باب 6 ft في الجانبين المتقابلين وفتحة باب 10 ft في الجدار المتبقي. يجب أن تكون مساحة أرضية صالة العرض $800\ ft^2$. ما هي الأبعاد التي ستكون أصغر طول للجدار المستخدم؟

يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة لوح من الورق المقوى أبعاده 6 in – 10 in وذلك بقص مربعات قياس ضلعها x in من كل زاوية وطي الجوانب. جد قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للصندوق.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575



يجب بناء صندوق مفتوح من الأعلى بأخذ لوح من الورق المقوى مساحته 12 in–في– 16 in وقص مربعات مساحة كل منها $x\ \text{in}^2$ من كل زاوية وطي الجوانب. جـــد قيمة x تحقق القيمةالعظمى لحجم الصندوق.



على فرض أن هناك سلكًا بطول 2 ft يجب قصه إلى قطعتين، ستشكل كل منهما مربعًا. جـــد طول كل قطعة لتحقق قيمة صغرى لاجمالي مساحتي المربعين.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

نافذة نورمندية على شكل نصف دائرة فوق مستطيل. على فرض أنه يتوفر $\pi + 8$ قدمًا من الزخارف الخشبية. ناقش السبب في أن مصمم النافذة قد يرغب في زيادة مساحة النافذة. جـــد أبعاد المستطيل (وبالتالي، نصف الدائرة) التي ستحقق القيمة العظمى لمساحة النافذة.

يمتد خط الماء بين الشرق والغرب. وتريد مدينة توصيل مشروعي تطوير سكنية بالخط من خلال مد خط من نقطة واحدة على الخط الموجود إلى مشروعي التطوير. يقع أحد مشاريع التطوير على بعد 3 كيلومتر جنوب الخط الموجود؛ ويقع الآخر على بعد 4 mi جنوب الخط الموجود و 5 mi شرق مشروع التطوير الأول. جـــد المكان على الخط الموجود لعمل الوصلة وايجاد القيمة الصغرى لطول الخط الجديد.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region.
There is 80 ft of fencing available.
Find the maximum enclosed area.

يجب بناء سياج من ثلاثة جوانب بجوار الجزء المستقيم من النهر، الذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة.
يتوفر 80 ft من السياج.
أوجد القيمة العظمى للمساحة المحاطة بالسياج.

a. $60\ ft^2$

b. $400\ ft^2$

c. $800\ ft^2$

d. $40\ ft^2$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الدرس الثامن : المعدلات المرتبطة

كيفية حل مسائل المعدلات المرتبطه

تحديد المتغيرات والثوابت والمعدلات

اشتق بالنسبة للزمن ضمنيا

اكتب معادلة تربط بين كل المعدلات بحيث يكون هناك معدل واحد فقط غير معلوم والباقي معلوم

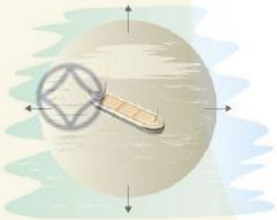
معدل التغير بالنسبة للزمن

موجب في حالة التزايد

سالب في حلة التناقص

عوض بالقيم المعطاه والمستنتجه لايجاد المطلوب

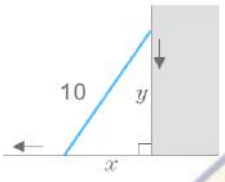
تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150 gl/min. على فرض أن النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}$ in. (انظر الشكل). اعتبر أن $1\ ft^3$ يساوي 7.5 gl حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى 500 ft



تسرب نفطي

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح الاكاديمي
2026
T-0544560575

يرتكز سلم بطول 10 ft على جانب المبنى. إذا كان الجزء العلوي من السلم يبدأ في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل $2\ \text{ft/s}$، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعا عن الأرض بـ 8 ft



تسير سيارة بسرعة 50 mph تجاه الجنوب من نقطة تبعد $\frac{1}{2}$ mi شمال التقاطع. وتسير سيارة شرطة بسرعة 40 mph (ساعة/كم) من نقـــطة تبعد $\frac{1}{4}$ mi شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق x ألف درهم على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

السنة	4	3	2	1
ألاعلانات(بالدرهم)	20,000	18,000	16,000	14,500

قدر القيمة الحالية (السنة 4) لـ $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

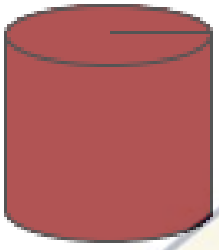
الدحيح اكاديمي
AMR ELBAYOUMI MATH
2026
T-0544560575

تنفق شركة صغيرة الآلاف سنويًا على الإعلانات. على فرض أن مبيعاتها السنوية $AEDX$ بآلاف من الدراهم تساوي $s = 60 - 40e^{-0.05x}$. تتضح أعداد إعلاناتها السنوية في الثلاث سنوات الأخيرة في الجدول التالي.

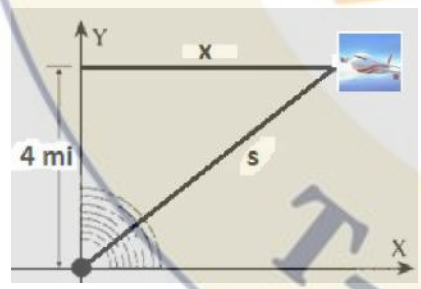
السنة	2	1	0
الاعلان	20,000	18,000	16,000

قدّر قيمة $x'(2)$ ومعدل تغير المبيعات في العام الحالي (عامين).

يتسرب النفط من ناقلة النفط بمعدل 120 gl/min. ينتشر النفط في دائرة بسمك $\frac{1}{4}''$. نظرًا لأن $1\ ft^3$ يساوي 7.5 براميل، حدد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول نصف القطر إلى (a) 100 m و (b) 200 m اشرح سبب تناقص المعدل بتزايد نصف القطر.



تقع طائرة على بعد $x = 40$ ميل (أفقيًا) عن المطار وارتفاع ثابت 4 ميل . يوجد رادار في المطار يكشف المسافة بين الطائرة والمطار (S) وتتغير هذه المسافة بمعدل -240 mph إذا حلقت الطائرة أفقيًا نحو المطار فما هي سرعة الطائرة في الاتجاه الأفقي.



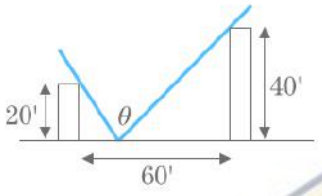
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

على فرض أن المنطقة المصابة بإصابة ما دائرية. (a). فإذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 mm وتزداد بمعدل 1 mm/hr. فما هو معدل تزايد المنطقة المصابة؟ (b) جد معدل تزايد المنطقة المصابة عند وصول نصف القطر إلى 6 mm. اشرح بمنطق سليم سبب كون هذا المعدل أكبر من معدل الجزء (a).

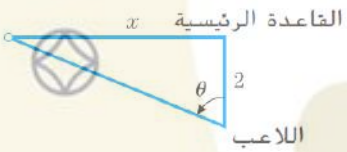
على فرض أن قطرة مطر تتبخر بطريقة تحافظ معها على شكلها الكروي. علماً ان حجم شكل كروي بنصف قطر r هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ وأن مساحة سطحه هي $A = 4\pi r^2$. فإذا تغير نصف القطر مع الزمن، واصبح الحجم $V' = Ar'$. إذا كان معدل التبخر (V') يتناسب مع مساحة السطح، بيّن أن نصف القطر يتغير بمعدل ثابت.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

مبنيان ارتفاعهما 20 ft و 40 ft على التوالي، والمسافة بينهما 60 ft على فرض أن شدة الضوء في نقطة معينة بين المبنيين تتناسب طرديا مع الزاوية θ في الشكل (a). إذا تحرك شخص ما من اليمين إلى اليسار بمعدل 4 ft/s. فما معدل تغير θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة بين المبنيين بالضبط ؟ (b) جد الموقع الذي يكون قياس الزاوية θ أكبر ما يمكن.

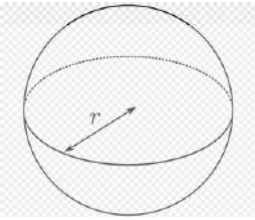


يبعد لاعب البيسبول حوالي 2 ft من القاعدة الرئيسية وشاهد الكرة تمر سريعًا. في الشكل، x هي المسافة من الكرة إلى القاعدة الرئيسية و θ هي الزاوية التي تحدد اتجاه نظر اللاعب. (a) جد المعدل θ' الذي تتحرك به عينيه لمشاهدة رمية الكرة بنحو $x'(t) = -130$ ft/s حيث تمر إلى القاعدة الرئيسية بمعدل $x = 0$. (b) يمكن أن يحافظ الإنسان على تركيزه فقط عندما $\theta' \leq 3$. جد أسرع رمية كرة يمكنك مشاهدتها فعليًا إلى القاعدة الرئيسية.



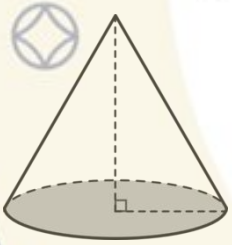
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

ضُخت مياه إلى خزان كروي نصف قطره 60 ft بمعدل ثابت $10\ ft^3/s$
(a) جـد معدل تغيير نصف قطر أعلى مستوى للمياه في الخزان عندما يمتلئ الخزان إلى النصف.
(b) جـد الارتفاع الذي تتغير فيه المياه في الخزان بنفس معدل نصف قطره.



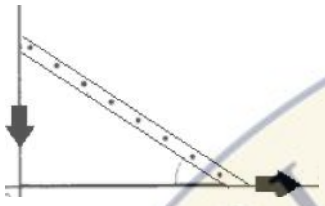
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

افرغ الرمل وشكّل كومة مخروطية بارتفاع يساوي مِثلي نصف قطره.
(a) إذا افرغ الرمل بمعدل ثابت $20\ ft^3/s$ فجـد المعدل الذي يتزايد به نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 ft



يرتكز سلم طوله 10 ft على أرض أفقية وجدار رأسي، فإذا سحب الجزء السفلي من السلم بعيدا عن الجدار بمعدل 3 ft/s فأوجد:

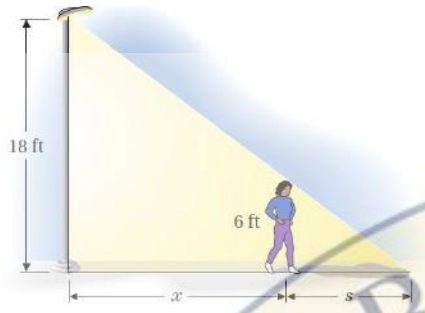
a) المعدل الذي يسقط به الجزء العلوي من السلم عندما يكون أسفل السلم بعيدًا عن الجدار 6 قدم.

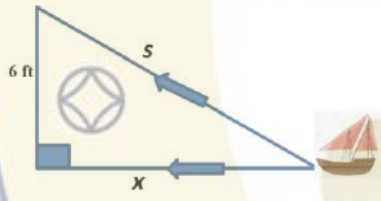


b) معدل تغير الزاوية بين السلم والأفقي عندما يكون أسفل السلم بعيدًا عن الجدار 6 قدم.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

على فرض أن شخصًا ما يبلغ طوله 6 ft يبعد 12 ft من عمود إنارة ارتفاعه 18 ft (انظر الشكل). (a) إذا كان الشخص يبتعد عن عمود الإنارة بمعدل $2\ \text{ft/s}^2$. فما هو المعدل الذي يتغير به طول ظل الشخص مبتعدًا عن العمود؟ (إرشاد: انظر إلى $\frac{x+s}{18} = \frac{s}{6}$) (b) كرّر العملية مع شخص يبعد 6 ft عن عمود الإنارة و يمشي نحو العمود بمعدل 3 ft/s





يرتفع حوض مائي 6 ft عن منسوب المياه. على فرض أنك تقف على حافة الحوض وتسحب حبلًا متصلًا بمركب بمعدل ثابت 2 ft/s وان المركب لا تزال على مستوى المياه.

فما هي سرعة أقتراب المركب من الحوض عندما يبعد 20 ft من الحوض؟

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

على فرض أن حريق غابات ينتشر في دائرة بنصف قطر يتغير بمعدل 5 ft/min.
عندما يصل نصف القطر إلى 100 ft، فما هو معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة؟

Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of 5 ft/min.
When the radius reaches 100 ft, at what rate is the area of the burning region increasing?

a. $2,000\pi \text{ ft}^2/\text{min}$
b. $200\pi \text{ ft}^2/\text{min}$
c. $1,000\pi \text{ ft}^2/\text{min}$
d. $500\pi \text{ ft}^2/\text{min}$

AMR EL BAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الدرس التاسع : معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

مصطلحات ورموز: في الاقتصاد يُستخدم المصطلح حدّية للإشارة إلى المعدل

الإيراد $R(x)$	الإيراد الحدي $R'(x)$
التكلفة $C(x)$	التكلفة الحدية $C'(x)$
الربح $P(x)$	الربح الحدي $P'(x)$

مستوى الإنتاج:
نقصد به عدد الوحدات المنتجة x

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad \Rightarrow \quad P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

التكلفة الحدية: إذا كانت $C(x)$ هي دالة التكلفة لعدد x منتج فإن:

دالة التكلفة الحدية هي $C'(x)$

التكلفة الحدية عند $x = n$ هي $C'(n)$

التكلفة الفعلية للمنتج رقم n هي $C(n) - C(n-1)$

تمرين

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

هو إجمالي التكلفة (بالدرهم) معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح الاكاديمي
2026
T-0544560575

تمرين إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 11x^2 + 40x + 10$
جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية عند $x = 100$ والتكلفة الفعلية لـ 100 منتجًا.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$
جـــد دالة التكلفة الحدية وقارن بين التكلفة الحدية بمعدل $x = 50$ والتكلفة الفعلية لـ 50 منتجاً.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة: إذا كانت C(x) هي دالة التكلفة لعدد x منتج فلإيجاد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

نوجد دالة متوسط التكلفة: $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

نوجد المشتقة الأولى $\overline{C}'(x)$ والأعداد الحرجة في المجال $x > 0$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى (إذا الأعداد الحرجة وحيدة) أو اختبار المشتقة الثانية (إذا الأعداد الحرجة وحيدة أو غير وحيدة)، لتحديد قيمة x التي تحدث عندها القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

تمرين

على فرض أن $C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$

هو إجمالي التكلفة (بالدراهم) لشركة معينة تنتج x وحدة من منتجات معينة. فجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

تمرين

جد مستوى الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$C(x) = 0\,1x^2 + 3x + 2000$

AMR EL BAYOUMI MATH
الدحيح اكاديمي
2026
1-0544560575

تمرين جـــد مستوى الإنتاج الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة.

$$C(x) = 0.2x^3 + 4x + 4000$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
1-0544560575

تمرين

لتكن $R(x)$ هي الإيرادات و $C(x)$ هي تكلفة تصنيع x منتج. تُعرف الأرباح بأنها $P(x) = R(x) - C(x)$.

(a) بيّن انه عند قيمة x التي تحقق القيمة العظمى للأرباح. فان الإيرادات الحدية تساوي التكلفة الحدية.

(b) جـــد القيمة العظمى للأرباح إذا كانت $R(x) = 10x - 0.001x^2$ دراهم و $C(x) = 2x + 5000$ دراهم.

مرونة الطلب والتغير في الإيرادات: في معظم الحالات عندما يرتفع السعر لأي منتج يتناقص الطلب عليه .

فإذا كان $f(p)$ هو طلب منتج بسعر p درهم فإن:

مرونة الطلب هي: $E = \frac{p}{f(p)} f'(p)$

مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا هو: $E < -1$

الإيرادات هي: $p\,f(p)$

تمرين

إذا كان $f(p)$ هو طلب منتج بسعر p درهم:

$f(p) = 200\,(30 - p)$

a) أوجد مرونة الطلب

أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح أكاديمي
2026
T-0544560575

إذا كان $f(p)$ هو طلب منتج بسعر p درهم:

$$f(p) = 60p(10 - p)$$

a) أوجد مرونة الطلب

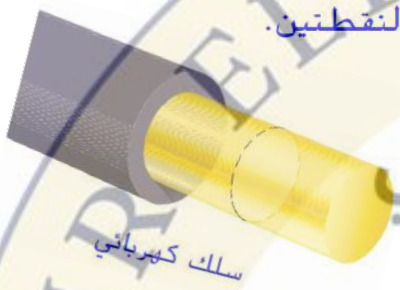
أوجد مدى الأسعار الذي يكون فيه الطلب مرنًا

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

الكثافة الخطية عند $x = x_1$ بأنها $\rho(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) \quad f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1)$

تمرين

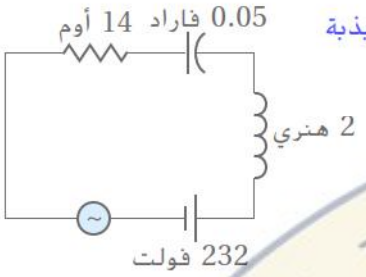
على فرض أن كثافة الأول x متر من القضيب الرقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$، وقارن الكثافتين عند النقطتين.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

تمرين

تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري، ومكثّف 0.05 – فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $232 \sin 2t$، حيث إن t تقاس بالثواني. فجـــد التيار في الدارة عند أي t.



دارة كهربائية بسيطة

إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة $x'(t) = 0.5x(t)[5 - x(t)]$

(a) جـــد التركيز $x(t)$ الذى تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى،

إذا كان تركيز التغير الكيميائي وفقًا للمعادلة $x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$

(a) جـــد التركيز $x(t)$ الذي تصل فيه سرعة التفاعل إلى القيمة العظمى، (b) جـــد حدود التركيز.

(b) جـــد حدود التركيز.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575

If the cost of manufacturing x items is $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

Find the marginal cost at $x = 30$.

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x) = x^3 + 20x^2 + 90x + 15$

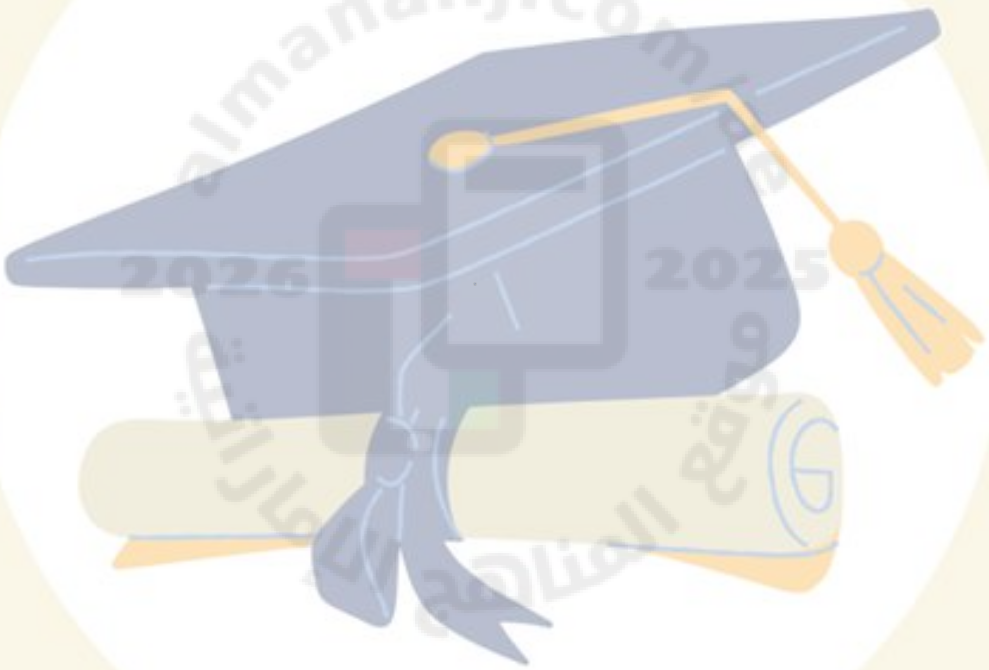
أوجد التكلفة الحدية عند $x = 30$.

a. $C'(30) = 4005$

b. $C'(30) = 2190$

c. $C'(30) = 3990$

d. $C'(30) = 3390$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2026
T-0544560575