مراجعة الوحدة السابعة دون حل

إعداد: محمد عمر الخطيب

KhateebAcademy.com

Alpha Education Center

الإمارات THE EMIRATES

الصف الثاني عشر متقدم

2025/2024

الوحدة السابعة

طرائق التكامل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

صيغ وقواعد التكامل

ملاحظة: راجع قواعد التكامل

(1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$ $\qquad * \int (a\,x+b)^n\,dx = \dfrac{(a\,x+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(2) $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(3) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad * \int \sin(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(4) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(5) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(6) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

(7) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

(8) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

(9) $\int e^x\,dx = e^x + c$ $\qquad * \int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\qquad * \int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

(10) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\qquad * \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(11) $\int \dfrac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$

(12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$

(13) $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$

خواص التكامل غير المحدود

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب أو القسمة

(1) $\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

مراجعة قواعد التكامل الأساسية و التكامل بالتعويض

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{ax}\,dx \quad a \neq 0$

(2) $\int \sin 6t \; dt$

(3) $\int \sec 2t \; \tan 2t \quad dt$

(4) $\int cos(ax)\,dx \quad a \neq 0$

(5) $\int (x^2+4)^2 \; dx$

(6) $\int \frac{2}{4+4x^2}\,dx$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}} \quad dx$

(8) $\int x\sqrt{x}+\frac{1}{2x} \quad dx$

(9) $\int e^{3-2x}-\frac{1}{x^2} \quad dx$

(10) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$

(11) $\int \frac{\sin t+1}{\cos^2 t}\,dt$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}\,dx$

(2) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$

(3) $\int \frac{e^{2x}}{7+e^{2x}}\,dx$

(4) $\int \frac{t+1}{t^2+2t+2}\,dt$

(5) $\int \tan x \quad dx$

(6) $\int \cot 2x \quad dx$

(7) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x(x^2-1)^3\,dx$

---

(2) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

---

(3) $\int \frac{\ln x}{2x}\,dx$

---

(4) $\int \frac{3}{16+x^2}\,dx$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}tan^{-1}(\frac{x}{a})+c$$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$

(3) $\int \frac{\tan^{-1}2x}{1+4x^2}\,dx$

(4) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x-4}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^{\frac{-2}{x^2}}}{x^3}\,dx$

---

(2) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x}\,dx$

---

(3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

---

(4) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

اختزال الرتبة

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

(2) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

الخطوة الرابعة

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x(x-1)^5 \quad dx$

(2) $\int x\sqrt{x-3} \quad dx$

(3) $\int \frac{3}{x+\sqrt{x}}\, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

---

(2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

(1) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

(3) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$

اكمال المربع (درجة البسط اصغر من درجة المقام والمقام لا يحلل)

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{4}{5+2x+x^2}\,dx$

إكمال المربع

تستخدم فكرة اكمال المرع عندما يكون المقام من الدرجة الثانية ولا يحلل

عند إكمال المربع يجب إضافة وطرح نصف معامل x تربيع

بشرط أن معامل x تربيع واحد

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$

---

(3) $\int \frac{1}{2x^2+20x+52}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{2t}{t^2+2t+5}\,dt$

---

(2) $\int \frac{x+1}{x^2+6x+10}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

---

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

القسمة المطولة (درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

أوجد التكاملات التالية:

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

(1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x-1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+7}{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{x^2+1}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \sin^2 2x\, dx$

(2) $\int \sin^2 x - \cos^2 x\, dx$

(3) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$

(4) $\int (\sec x + \tan x)^2\, dx$

(5) $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x \cos^2 x\, dx = \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)\, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx$

(2) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

(3) $\int \sec x\,dx$

(4) $\int \csc x\,dx$

أوجد قيمة كل مما يلي:

(1) $\int_{0}^{\pi} \cos x \, e^{\sin x} \; dx$

(2) $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t} \; dt$

(3) $\int_{0}^{\pi/4} \tan^4 x \; \sec^2 x \; dx$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \; dx$

أوجد قيمة كل مما يلي:

(1) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(3-e^x)^2}\, dx$

---

(2) $\displaystyle\int_3^4 x\sqrt{x-3}\, dx$

---

(3) $\displaystyle\int_1^{16} \frac{2}{x^{1/4}+x}\, dx$

يستخدم التكامل بالاجزاء عندما نريد إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين احداهما يمكن اشتقاقها بسهوله والأخرى يمكن إيجاد تكاملها بسهولة ايضا

التكامل بالاجزاء

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

u	$\xrightarrow{+}$	dv
du	$\xleftarrow{-}$	v

$\int$

دائماً يوجد تكامل مع السهم الراجع

ويمكن استخدام التكامل بالاجزاء مع هذه التكاملات

$\int$ حدودية $\rightarrow$

$\sin(\text{خطية}),\quad \cos(\text{خطية}),\quad \sec^2(\text{خطية}),\quad \csc^2(\text{خطية})$

$e^{(\text{خطية})},\quad \ln(\text{خطية})$

$\sin^{-1}(\text{خطية}),\quad \cos^{-1}(\text{خطية}),\quad \tan^{-1}(\text{خطية})$

تكاملات مكررة

$\int \begin{matrix}\sin(\text{خطية})\\ \cos(\text{خطية})\end{matrix} \rightarrow$

$\sin(\text{خطية}),\quad \cos(\text{خطية})$

$e^{(\text{خطية})}$

صيغ تكامل

تكاملات مكررة

$$\int \sin^n, \cos^n, \tan^n, \sec^n, \csc^n, \cot^n(\text{خطية})$$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x \sin x \, dx$

---

(2) $\int (2x-1) \cos 3x \, dx$

---

(3) $\int x^2 \cos x \, dx$

ويمكن استخدام <u>التكامل الجدولي</u> لتسهيل عملية التكامل وهو كالآتي

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

عمود المشتقات		عمود التكاملات
x^2	$+$	$\cos x$
$2x$	$-$	$\sin x$
2	$+$	$-\cos x$
0	$-$	$-\sin x$

السهم الراجع (الأفقي) يجب أن يكون معه تكامل

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

ملاحظة: يمكن استخدام التكامل الجدولي لكل التكاملات بالأجزاء مع الإنتباه إلى

<u>استخدام التكامل</u> مع (السهم الراجع) عند التوقف في أي صف (نفس المستوى)

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (x+1)\, e^{3x} \quad dx$

---

(2) $\int x^2 \, e^{-x} \quad dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int x^2 \sin ax \quad dx \quad a \neq 0$

(2) $\int \frac{x^2 + x}{\sec 3x} \quad dx$

(3) $\int x \sec^2 x \quad dx$

(4) $\int 8x \sin x \cos x \quad dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \ln x \, dx$

(2) $\int x^4 \ln x \, dx$

(3) $\int \ln(x-1) \, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \tan^{-1} x\, dx$

---

(2) $\int x \tan^{-1} x\, dx$

---

(3) $\int \sin^{-1} x\, dx$

اوجد التكاملات التالية بطريقة الجدول (التكامل الجدولي)

(1) $\int x(2x-1)^5 \quad dx$

---

(2) $\int x^4 e^x \, dx$

---

(3) $\int x^5 \cos 2x \, dx$

أوجد التكاملات التالية:

التكامل بالتعويض ثم الأجزاء

(1) $\int \cos x \ln(\sin x)\, dx$

---

(2) $\int x \ln(4+x^2)\ dx$

---

(3) $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$

---

(2) $\int (\ln x)^2\, dx$

---

(3) $\int 2x^3 e^{x^2}\, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^x \sin x \, dx$

---

(2) $\int \sin^3 x \, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \sec^3 x \, dx$

ممكن حل السؤال عن طريقة المتطابقات

(2) $\int \cos x \cos 2x \, dx$

(1 أوجد :

$$\int x^n \ln x \, dx$$

(2 أوجد صيغة الاختزال للتكامل

$$\int x^n e^x \, dx$$

(3 أثبت صيغة الاختزال التالية :

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية

(1) $\int_{0}^{1} x^2 \cos \pi x \; dx$

---

(2) $\int_{0}^{1} x^2 e^{3x} \; dx$

---

(3) $\int_{1}^{2} x \ln x \; dx$

(1) إذا كان $f(4)=-8\,,\ f(1)=3\,,\int_{1}^{4} f(x)\ dx=12$ فأوجد $\int_{1}^{4}(2x+3)f'(x)\ dx$

---

(2) إذا كان $f'(5)=f(5)=-6,\ f'(1)=f(1)=2\,,\int_{1}^{5} f(x)\ dx=10$

فأوجد $\int_{1}^{5} x^{2} f''(x)\ dx$

1) إذا كانت f دالة متصلة وقابلة للإشتقاق حيث $f(0)=-1,\ f(1)=2$

أوجد $$\int_0^1 e^x f(x)+e^x f'(x)\,dx$$

---

2) إذا كانت f و g دوال متصلة وقابلة للإشتقاق مرتين حيث $f(0)=g(0)=0,\ f(1)=g(1)=0$

أثبت أن $$\int_0^1 f''(x)\,g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,g''(x)\,dx$$

اكتب طريقة التكامل (1) تعويض (2) أجزاء (3) تعويض ثم أجزاء (4) أجزاء ثم تعويض

(1) $\int x \ln x \, dx$

(2) $\int x^2 \cos 2x \, dx$

(3) $\int x \sin x^2 \, dx$

(4) $\int x^3 e^{2x} \, dx$

(5) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$

(6) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

(7) $\int \sin x \ln(\cos x) \, dx$

(8) $\int e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$

(9) $\int e^x \sin 2x \, dx$

(10) $\int \tan^{-1} x \, dx$

(11) $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

(12) $\int \sin(\ln x) \, dx$

(13) $\int (\ln x)^2 \, dx$

(14) $\int x \csc^2 x \, dx$

(15) $\int \sin^{-1} x \, dx$

(16) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

أي من التكاملات التالية يمكن ايجاده باستخدام طريقة التكامل بالتعويض

(a) $\int x^2 \sin x \, dx$

(b) $\int x \ln x \, dx$

(c) $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

(d) $\int x^2 e^{-4x} \, dx$

أي من التكاملات التالية يمكن ايجاده باستخدام طريقة التكامل بالاجزاء

(a) $\int x \sin x^2 \, dx$

(b) $\int x^2 e^{-4x} \, dx$

(c) $\int x^{-2} e^{4/x} dx$

(d) $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

الصيغة الأولى (عائلة $\sin x, \cos x$)

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

الحالة الأول : إذا كانت m, n أحدهما عدد فردي

افرض u الدالة ذات القوى غير الفردية

واذا كان كلاهما فردي افرض الدلة ذات القوى الاكبر

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$

---

(2) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$

---

(2) $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$

---

(3) $\int \sin 2x \cos^4 2x\, dx$

أوجد قيمة التكاملات التالية:

(1) $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \; dx$

---

(2) $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{\cos x} \sin^3 x \; dx$

---

(3) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \; \sin^3 3x \; dx$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

الحالة الثانية : إذا كانت m, n **كلاهما أعداد زوجية**

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \sin^2 2x \, dx$

---

(2) $\int \cos^2 (x+1) \quad dx$

---

(3) $\int \cos^4 x \, dx$

---

(4) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

الصيغة الثانية (عائلة $\sec x, \tan x$)

$$\int \tan^m x \sec^n x \ dx \quad , \int \cot^m x \csc^n x \ dx$$

الحالة الأولى : إذا كانت n (قوة $\sec$) **عدد زوجي**

افرض $u = \tan x$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx$

---

(2) $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx$

---

(3) $\int \cot^2(2x-1) \ \csc^2(2x-1) \, dx$

---

(4) $\int \sec^4 x \, dx$

الحالة الثانية : اذا كانت m (قوة $\tan$) عدد فردي

$u = \sec x$ افرض

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \tan x \sec^5 x \, dx$

---

(2) $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$

---

(3) $\int \cot x \csc^3 x \, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \cot x \csc^4 x \quad dx$

---

(2) $\int x \tan^3(x^2+1) \ \sec(x^2+1) \quad dx$

---

(3) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x \ \csc^4 x \ dx$

تكاملات خاصة

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \sec x \, dx$

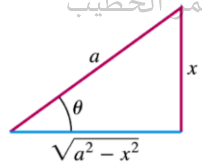
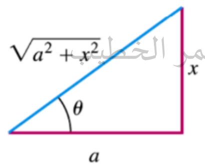
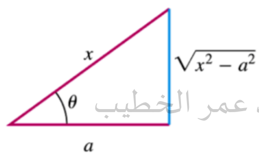
(2) $\int \csc x \, dx$

(3) $\int \frac{1}{\cos x - 1} \, dx$

أوجد قيمة n حيث $n \geq 2$

$$\int \tan^3 x \sec^n x \; dx = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

التكامل بالتعويضات المثلثية

المثلث	الفترة	التعويض	الصيغة
	$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$x=a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-x^2} \longrightarrow$
	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$x=a\tan\theta$	$\sqrt{a^2+x^2} \longrightarrow$
	$0\le\theta\le\pi, x\ne\frac{\pi}{2}$	$x=a\sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2} \longrightarrow$

اكتب التعويض المثلثي المناسب لإيجاد كل من التكاملات التالية (دون إجراء عملية التكامل):

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

---

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}\,dx$

اكتب التعويض المثلثي المناسب لإيجاد كل من التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

(2) $\int \sqrt{2-3x^2}\,dx$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

أوجد التكامل

(1) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$

---

(2) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$

أوجد التكامل

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(2) $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}}\,dx$

---

(2) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

أوجد التكاملات التالية

(1) $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

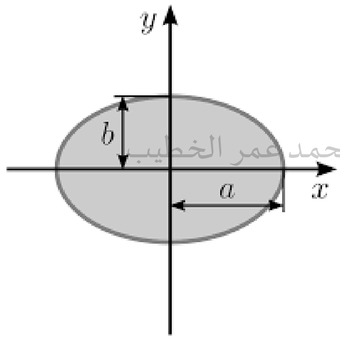
---

(2) $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

---

(3) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

أثبت أن مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ هي πab



تكامل الدوال النسبية

- درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام ← قسمة مطولة
- درجة البسط أصغر من درجة المقام
  - البسط مشتقة المقام ← ln (المقام)
  - المقام يحلل ← كسور جزئية
  - المقام لا يحلل (تربيعي) ← اكمال مربع

الكسور الجزئية هي العملية العكسية لتوحيد المقامات

ملاحظة : يجب التأكد من أن الكسر في أبسط صورة قبل كتابة الكسور الجزئية له

حالات الكسور الجزئية

عندما يكون المقام

(1) عوامل خطية مختلفة

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

(2) عوامل خطية منها مكرر

$$\frac{1}{x^2(x+3)}==\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}$$

(3) عوامل خطية وتربعية مختلفة

$$\frac{1}{x(x-2)(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

(4) عوامل خطية وتربعية منها مكرر

$$\frac{1}{x(x-2)^2(x^2+4)^2}==\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4}+\frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

اكتب الكسور الجزئية المكافئة لكل مما يلي بدون حساب الثوابت

(1) $\dfrac{2}{x^2-3x}$

(2) $\dfrac{x}{x^2-4}$

(3) $\dfrac{5}{x^2-2x-8}$

(4) $\dfrac{x}{(x+1)(x-3)(x+5)}$

(5) $\dfrac{x+7}{x^2(x+1)}$

(6) $\dfrac{2x+3}{(x^2-1)^2}$

(7) $\dfrac{-1}{x^3-4x}$

(8) $\dfrac{x}{x^3-4x}$

(9) $\dfrac{3}{x(x^2+1)}$

(10) $\dfrac{5x+7}{(x-1)^2(x^2+1)}$

(11) $\dfrac{5}{x^2(x^2+2)^2}$

(12) $\dfrac{1}{x^4-1}$

اكتب تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي

(1) $\frac{2}{x^2-1}$

---

(2) $\frac{3x}{x^2+x-2}$

---

(3) $\frac{5x-23}{6x^2-11x-7}$

---

(4) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$

اكتب تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي

(1) $\dfrac{8x-8}{x^3-2x^2-8x}$

(2) $\dfrac{12}{x^3+2x^2}$

(3) $\dfrac{x+4}{(x+1)(x-2)^2}$

اكتب تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي

(1) $$\frac{9x+7}{(x+3)(x^2+1)}$$

(2) $$\frac{12}{x^2(x^2+1)}$$

أوجد التكاملات التالية: (اكتب تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي ثم أوجد الدالة الأصلية)

(1) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$

---

(2) $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

---

(3) $\int \frac{5x-23}{6x^2-11x-7}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\, dx$

(2) $\int \frac{3x + 2}{x^3 + x}\, dx$

(3) $\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$

(2) $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx$

(3) $\int \frac{12}{x^3+2x^2}\,dx$

القسمة المطولة (درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام)

أوجد التكاملات التالية:

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

(1) $\int \frac{x+3}{x+1}\,dx$

(2) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$

(3) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

(4) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}\,dx$

---

(2) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

أوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{4\cos x}{\sin^2 x - 4}\,dx$

---

(2) $\int \frac{2e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

ملاحظة : تم ترتيب الدرس السادس والسابع بطريقة مختلفة حيث تم تقديم بعض التمارين من الدرس السابع وتاخير تمارين من الدرس السادس الى السابع

تسمى المعادلة التي تحتوي على مشتقة من اي درجة بالمعادلة التفاضلية

ويقصد بحل المعادلة التفاضلية هو ايجاد قيمة y التي تحقق المعادلة التفاضلية ، وذلك باستخدام التكامل، ومن اشهر الطرق لحل المعادلات التفاضلية هي طريقة فصل المتغيرات.

ملاحظة: (من خارج الكتاب)

1) رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة للمشتقة (أكبر مشتقة)

2) درجة المعادلة التفاضلية هي أعلى أس معامل تفاضلي (أس أكبر مشتقة)

مثال : $(y'')^5 + x(y''')^4 = xy^7$ معادلة تفاضلية من الرتبة 3 : و الدرجة 4:

(1) بين أن الدالة $y = x - \frac{1}{2} + c\,e^{-2x}$ حيث c عدد ثابت هي حل للمعادلة التفاضلية $y' + 2y = 2x$

(2) إذا كانت الدالة $y = e^{kx}$ حيث k عدد ثابت هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

فأوجد قيم k

حدد أي من المعادلات التفاضلية التالية قابلة للفصل (اجعل كل متغير في طرف)

(1) $y' = \dfrac{xy}{x^2+1}$

---

(2) $y' = 2x\cos y + x$

---

(3) $y' = 2y^2 + 2$

---

(4) $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{\cos x}{y}$

---

(5) $y' = 3\cos(x+y)$

---

(6) $y' = 3x(x+y)$

حدد أي من المعادلات التفاضلية التالية قابلة للفصل (اجعل كل متغير في طرف)

(1) $y' = e^{x+\ln y}$

(2) $y'(xy+y) = 2$

(3) $y' = \sqrt{xy+y}$

(4) $y' = 1 - \dfrac{x}{y}$

(5) $y' = \ln(x^2 y)$

(6) $y' - y + 1 = 0$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة التي تحقق الشرط الابتدائي

تأكد أن الحل يحقق الشرط

(1) $y' = 2e^{2x} \quad , \quad y(0) = 3$

---

(2) $y' = \dfrac{1}{x^2} + 2x \quad , \quad y(1) = 3$

---

(3) $y' = \dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad y(0) = 2$

---

(4) $y' = \dfrac{4x}{\cos y} \quad , \quad y(0) = 0$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة التي تحقق الشرط الابتدائي

(1) $y' = 2y \quad , \quad y(0) = 5$

---

(2) $y' = -2y \quad , \quad y(1) = 2$

---

(3) $y' = y - 50 \quad , \quad y(0) = 70$

---

(4) $y' = -0.1y - 10 \quad , \quad y(0) = 80$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة التي تحقق الشرط الابتدائي

(1) $y' = \dfrac{4x}{y}$, $y(1) = 5$

---

(2) $y' = \dfrac{\cos 2x}{y}$, $y(0) = -1$

---

(3) $y' = x \sin x$, $y(0) = 2$

---

(4) $y' = \dfrac{\tan y}{x}$, $y(-1) = \dfrac{\pi}{2}$

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y' = y^2 + 1$

(2) $y' = \dfrac{\cos x}{3y^2}$

(3) $y' = \dfrac{6x^2}{y(1+x^3)}$

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y' = \sqrt{1-y^2}$

(2) $y' = xe^{x-y}$

(3) $y' = \dfrac{e^{-2y}}{x+1}$

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y'(xy+y)=2$

(2) $y'=\tan y$

(3) $y'=(y+1)\cos x$

أوجد الحل العام بصورة صريحة لكل من المعادلات التفاضلية التالية

(1) $y' = x\cos^2 y$

---

(2) $y' = \sin x + y^2 \sin x$

---

(3) $y' = \dfrac{2y\ln x}{x}$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة

(1) $y' = \dfrac{3x}{y+1}$

(2) $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{x\ln x}$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة

(1) $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2 - 1}$

---

(2) $y' = y(y-2)$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة ضمنية

(1) $y' = \dfrac{\sec^2 x - \sin x}{\cos y + 5e^y}$, $y(0) = \pi$

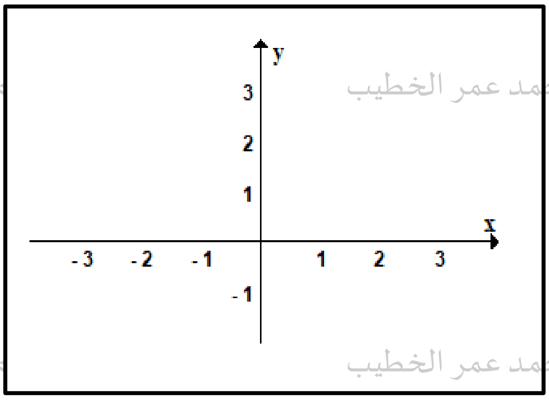
(2) $y' = \dfrac{\sin x}{\mathrm{y} \cos y}$, $y(0) = \pi$

(3) $y' = \dfrac{2x}{\mathrm{y}} e^{x-y}$ $y(1) = 1$

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة

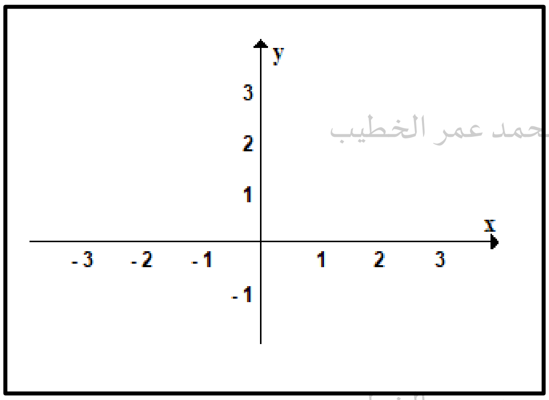
ثم ارسم عائلة المنحنيات التي تمثل حلول المعادلة

(1) $y' = y - 2$



---

(2) $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$



تطبيقات المعادلات التفاضلية

النمو والتضاؤل الأسي

المعادلة التفاضلية

$$y'(t) = k\,y(t)$$
$$y(0) = A$$

حل المعادلة

$$y(t) = A\,e^{kt}$$

قانون نيوتن بالتبريد

المعادلة التفاضلية

$$y' = k\left[y(t) - T_a\right]$$
$$y(0) = A$$

حل المعادلة

$$y(t) = A\,e^{kt} + T_a$$

معادلة النمو اللوجستي

المعادلة التفاضلية

$$y' = ky(M - y)$$
$$y(0) = A$$

حل المعادلة

$$y(t) = \frac{AM\ e^{kMt}}{1 + Ae^{kMt}}$$

ممكن إيجاد الثوابت في كل معادلة من خلال الشروط المعطى

يوجد معادلات مرتبطة بالنمو والتضاؤل الأسي مثل المرابحة والاستهلاك

النمو والتضاؤل الأسي (النسبة الثابتة)

إذا كانت $y(t)$ تمثل عدد أفراد مجتمع معين (مثل البكتريا...) فإن معدل التغير $y'(t)$ يتناسب مع عدد المجتمع الأصلي $y(t)$ أي إن

$y'(t) = k\,y(t)$ حيث k عدد ثابت يسمى معامل النمو أو معامل التضاؤل

إذا كانت $k > 0$ يكون نمو أسي (زيادة بنسبة ثابتة)

إذا كانت $k < 0$ يكون تضاؤل أسي (تناقص بنسبة ثابتة)

ملاحظة:

(1) الزمن الذي تصبح الكمية ضعف الكمية الأصلية يسمى عمر الضعف ويساوي $T_d = \dfrac{\ln 2}{k}$

(2) الزمن الذي تصبح الكمية نصف الكمية الأصلية يسمى عمر النصف ويساوي $T_h = \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{k} = \dfrac{-\ln 2}{k}$

حل المعادلة التفاضلية $y'(t) = k\,y(t)$

عند تشخيص حالة مريض وجد أن 200 خلية من البكتيريا تنمو على حلقه ،وبعد مرور 3 ساعات أصبحت عدد البكتيريا 600 خلية ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي.

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمذج عدد الخلايا في أي زمن t بالساعات وحل المعادلة

$$y'(t) = k\,y(t) \qquad , y(0) = 200 \quad y(3) = 600$$

(ب) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 5 ساعات

(ج) أوجد الزمن المضاعف (الزمن الذي يصبح عدد الخلايا ضعف العدد الإبتدائي)

(1) مستتبت بكتيري عدده 200 خلية ويتضاعف كل أربع ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي ،أوجد عدد الخلايا بعد مرور 7 ساعات.

---

(2) مستتبت بكتيري عدده 200 خلية ويتضاعف تعداده ثلاث مرات كل خمس ساعات، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي،

(أ) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

(ب) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 15ساعة.

(ج) حدد متى يصل المجتمع إلى 20000 .

1) عينة كربون 14 (^{14}C) مكونة من $50\ g$ ، تتحلل بمعدل أسي ، إذا كان عمر النصف له هو 6000 سنة

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تنمذج وزن العينة في أي زمن t السنوات

$$y'(t) = k\,y(t) \qquad , y(0) = 50 \quad , y(6000) = 25 \Leftrightarrow T_h = 6000$$

(ب) حل المعادلة التفاضلية

ملاحظة: إذا كان السؤال اختيار من متعدد
نطبق المعادلة مباشرة لحل السؤال

$$y(t) = Ae^{kt}$$

(ج) أوجد كتلة العينة بعد مرور 8000 سنة

---

2) إذا تم حقن دم مريض بكمية من المورفين هي $0.4\ g$ ، وتتحلل بالدم بمعدل أسي، إذا كان عمر النصف للمورفين هو 3 ساعات ، فأوجد كمية المورفين في الدم بعد مرور 10 ساعات

(1) يعتبر الاسترنتيوم (90) من أحد النظائر المشعة الخطرة ويتحلل بمعدل أسي حيث يبلغ عمر النصف له 28 عام، إذا امتص جسم كمية منه فأوجد النسبة المئوية المتبقية في الجسم بعد مرور 84 عام

النسبة المئوية المتبقية تساوي **الكمية المتبقية** **على** **الكمية الأصلية** $\times 100\%$

(2) إذا تبقى من كربون 14 (^{14}C) في أحد الأحافير 20% من الكمية الأصلية، حيث تحلل بمعدل أسي ، إذا كان عمر النصف له 5730 سنة فأوجد عمر الأحفورة

(1) أصيب جسم بالبكتريا وعددها 10^8 خلية ،تم اعطاء الشخص المريض علاج (حقنه) لمقاومة هذه البكتريا حيث يقتل العلاج 90% من هذه الخلايا . اذا كان عدد الخلايا يتضاعف كل 20 دقيقة وبعد مرور الفترة الزمنية T وجد ان عدد الخلايا رجع الى 10^8 ، اوجد T

---

(2) تشير ابحاث العلماء عام $1950\ (t=0)$ الى ان مساحة اليابسة التي احتاجها عدد سكان الارض لزراعتها هي 10^9 هكتار وفي عام $1980\ (t=30)$ احتاجوا الى 2×10^9 هكتار اذا كان مساحة اليابسة الصالحة للزراعة تنمو بنسبة مئوية ثابتة .اوجد في اي سنة يكفي عدد السكان زراعة 3.2×10^9 هكتار

الاستهلاك (انخفاض القيمة) وهو من أنواع التضاؤل

(1) إذا كانت قيمة سيارة 40000 درهم وتتناقص بنسبة مئوية ثابتة (أسي مستمر) مقداره 10% سنوي أوجد قيمة السيارة بعد مرور 8 سنوات

---

(2) إ كانت قيمة سيارة 40000 درهم وتتناقص بمعدل خطي، أوجد قيمة السيارة بعد مرور 8 سنوات حيث أن قيمة السيارة تصبح صفر بعد عشرين سنة

$$\frac{dy}{dt} = r \qquad , \quad y(0) = 40000, \quad y(20) = 0$$

إذا كانت قيمة بيع آلة جديدة هو 14000 درهم وتتناقص بمعدل أسي ،وتصبح قيمتها 8000 درهم بعد مرور 4 سنوات ، حيث أن قيمة الآلة خرده تصبح 1000درهم ، أوجد قيمة الآلة في أي زمن

ملاحظة: تتناقص قيمة إعادة البيع للآلة بمعدل يتناسب مع الفرق بين السعر الحالي وقيمة الخردة لها

سؤال الخردة

افترض أن $y(t)$ ثمن الآلة بعد t سنة

فإن معدل تغير قيمة الآلة السنوي يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = k(y(t) - 1000) \quad , \quad y(0) = 14000, \quad y(4) = 8000$$

الفائدة (المرابحة) المركبة والفائدة المركبة المستمرة وهو من أنواع النمو

الفائدة المركبة : إجمالي المبلغ في الربح المركب يعطى بالمعادلة

$$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

حيث

A اجمالي المبلغ بعد t سنة

P المبلغ الذي تم استثماره

r الفائدة المركبة

n عدد مرات توزيع الارباح بالسنة الواحدة

إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة تساوي 3% ،فأوجد إجمالي المبلغ بعد 5 سنوات في الحالات التالية

(أ) توزيع الأرباح سنوي

$\boxed{n=1}$

(ب) توزيع الأرباح نصف سنوي

$\boxed{n=2}$

(ج) توزيع الأرباح ربع سنوي

$\boxed{n=4}$

(د) توزيع الأرباح شهري

$\boxed{n=12}$

(هـ) توزيع الأرباح يومي

$\boxed{n=365}$

الفائدة المركبة المستمرة: إجمالي المبلغ في الربح المركب المستمر يعطى بالمعادلة

$$A = Pe^{rt}$$

المعادلة التفاضلية والشروط هي

$$y' = ry$$

$$y(0) = P$$

حيث

A إجمالي المبلغ بعد t سنة

r المبلغ الذي تم استثماره

r الفائدة المركبة

إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 3%

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تنمذج إجمالي المبلغ في أي زمن t السنوات

(ب) حل المعادلة التفاضلية

(ج) أوجد اجمالي المبلغ بعد 5 سنوات

(د) أوجد متى يتضاعف المبلغ الذي تم استثماره

(1) اذا استثمر خالد 10000 عام 1990 في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة ، وأصبح لديه 20000 عام 2000 ، أوجد معدل المرابحة المركبة المستمرة

---

(2) إذا استثمار سلطان مبلغ من المال P في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 4% واصبح المبلغ 90000 درهم بعد 5 سنوات ،أوجد المبلغ الذي تم استثمارة

---

(3) في عام 1985 $(t=0)$ اشترى شخص بطاقات تذكارية بمبلغ 34 درهم ، فاذا كانت قيمة البطاقات تزيد بنسبة مئوية ثابتة (نمو أسي) وأصبحت قيمتها 9800 درهم في عام 1995 فأوجد معادلة تعطي قيمة هذه البطاقات في أي زمن t

إذا تم استثمار مبلغ من المال P في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة (نمو أسي) هي 8% ويتم إيداع مبلغ 2000 درهم سنوياً، أوجد المبلغ الذي تم استثمارة إذا وصل إجمالي المبلغ مليون درهم بعد 20 سنة.

سؤال المليون

افترض أن $y(t)$ اجمالي المبلغ بعد t سنة

فإن معدل تغير المبلغ السنوي يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt}=0.08y(t)+2000 \quad , \quad y(20)=1,000,000 \quad , y(0)=P$$

$$\frac{dy}{dt}=0.08[y+25000]$$

$$\frac{dy}{y+25000}=0.08\,dt$$

$$\int\frac{dy}{y+25000}=\int 0.08\,dt$$

$$\ln|y+25000|=0.08\,t+c$$

$$y+25000=e^{0.08t+c}=Ae^{0.08t}$$

$$y=Ae^{0.08t}-25000$$

$$y(0)=P$$

$$A-25000=P$$

$$A=P+25000$$

$$y(t)=(P+25000)e^{0.08t}-25000$$

$$y(20)=1000000$$

$$(P+25000)e^{0.08\times20}-25000=1000000$$

$$(P+25000)e^{0.08\times20}=1000000+25000$$

$$P+25000=\frac{1000000+25000}{e^{0.08\times20}}$$

$$P=\frac{1000000+25000}{e^{0.08\times20}}-25000$$

$$=181944$$

إذا تم اقتراض 150000 دولار لشراء بيت على أن يسدد المبلغ على 30 سنة بفائدة مركبة قدرها 8% ويقسط شهري هو p ، أوجد القسط الشهري.

سؤال الرهن العقاري

افترض أن $y(t)$ المبلغ المتبقي بعد t سنة

فإنه يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = 0.08y(t) - 12p \quad , \quad y(0) = 150000, \quad y(30) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.08[y - 150p]$$

$$\frac{dy}{y - 150p} = 0.08\, dt$$

$$\int \frac{dy}{y - 150p} = \int 0.08\, dt$$

$$\ln|y - 150p| = 0.08t + c$$

$$y - 150p = e^{0.08t + c} = Ae^{0.08t}$$

$$y = Ae^{0.08t} + 150p$$

$$y(0) = 150000$$

$$A + 150p = 150000$$

$$A = 150000 - 150P$$

$$y(t) = (150000 - 150p)e^{0.08t} + 150p$$

$$y(30) = 0$$

$$(150000 - 150p)e^{0.08\times 30} + 150p = 0$$

$$(150000 - 150p)e^{2.4} + 150p = 0$$

$$150000e^{2.4} - 150e^{2.4}p + 150p = 0$$

$$150000e^{2.4} - 150p(e^{2.4} - 1) = 0$$

$$-150p(e^{2.4} - 1) = -150000e^{2.4}$$

$$P = \frac{-150000e^{2.4}}{-150(e^{2.4} - 1)}$$

$$= 1100$$

$$y' = k[y(t) - T_a]$$

قانون نيوتن بالتبريد

تعطى درجة حرارة مشروب القهوة داخل كوب في غرفة درجة حرارتها T_a

بالمعادلة التفاضلية $y' = k[y(t) - T_a]$

حيث $y(t)$ درجة حرارة مشروب القهوة في أي زمن t بالدقائق ، k ثابت المعادلة

ملاحظة: تتناقص قيمة درجة الحرارة بمعدل يتناسب مع الفرق بين درجة الحرارة الحالية ودرجة حرارة المحيط بها

إذا علمت أن درجة حرارة مشروب القهوة عند سكبها هي $80C^{\circ}$ ، وأصبحت بعد دقيقتين $75C^{\circ}$ في غرفة درجة حرارتها 20°

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط التي تتمذج درجة حرارة المشروب عند أي زمن t بالدقائق

(ب) حل المعادلة التفاضلية

(ج) أوجد درجة حرارة مشروب القهوة بعد 10 دقائق

(د) أوجد الزمن الذي تصبح درجة حرارة القهوة عندها $50C^{\circ}$

(1) تم صب مشروب مثلج حرارتة $10C^\circ$ في غرفة درجة حرارتها $21C^\circ$ ، وبعد دقيقتين أصبحت درجة حرارته $13C^\circ$ اوجد درجة حرارته بعد 10 دقائق

---

(2) وضع وعاء حساء درجة حرارتة $93C^\circ$ في غرفة درجة حرارتها $21C^\circ$ ، وبعد دقيقة واحدة أصبحت درجة حرارته $82C^\circ$ اوجد متى تصل درجة حرارتة الى $49C^\circ$

معادلة النمو اللوجستي

تتم نمذجة عدد السكان $y(t)$ لمجتمع معين بعد أي زمن t بالسنوات بالمعادلة التفاضلية

$$y' = ky(M-y)$$

حيث M ثابت القدرة الإستعابية لعدد السكان (الحد الأقصى) ، و k ثابت يرتبط بمعدل النمو السكاني (معدل النمو السكاني $r = kM$)

تمت نمذجة عدد السكان $y(t)$ لمجتمع معين بعد أي زمن بالسنوات بالمعادلة $y' = ky(M-y)$

حيث M ثابت القدرة الاستعابية لعدد السكان (الحد الأقصى) ، و k ثابت يرتبط بمعدل النمو السكاني (معدل النمو السكاني $r = kM$)

بين أن حل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد السكان في أي زمن t بالسنوات هو

$$y(t) = \frac{AM\ e^{kM\,t}}{1+Ae^{kM\,t}} \quad Or \quad y = \frac{AM}{A+e^{-kM\,t}}$$

حيث A عدد ثابت يمكن إيجاده من خلال الشرط $y(0)$ يساوي عدد السكان الأصلي

$$y' = ky(M-y)$$
$$\frac{dy}{dt} = ky(M-y)$$
$$\frac{dy}{y(M-y)} = k\ dt$$
$$\int \frac{dy}{y(M-y)} = \int k\ dt$$
$$\int \left[\frac{1}{My} + \frac{1}{M(m-y)}\right] dy = \int k\ dt$$
$$\frac{1}{M}\ln|y| - \frac{1}{M}\ln|M-y| = k\,t + c$$
$$\ln|y| - \ln|M-y| = kM\ t + c$$
$$\ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = kM\ t + c$$

$$\frac{y}{M-y} = e^{kM\,t+c} = e^{kM\,t} \times e^{c}$$
$$\frac{y}{M-y} = Ae^{kM\,t}$$
$$y = Ae^{kM\,t}(M-y)$$
$$y = AMe^{kM\,t} - Aye^{kM\,t}$$
$$y + Aye^{kM\,t} = AMe^{kM\,t}$$
$$y(1+Ae^{kM\,t}) = AMe^{kM\,t}$$
$$y = \frac{AMe^{kM\,t}}{1+Ae^{kM\,t}}$$
$$y = \frac{AM}{A+e^{-kM\,t}}$$

وضعت 350 سمكة في حوض لتربية الاسماك وتنمو سنوياً بفرضية النمو اللوجستي حيث $k=0.007$

و قدرت الحوض الاستيعابية 1000 سمكة،

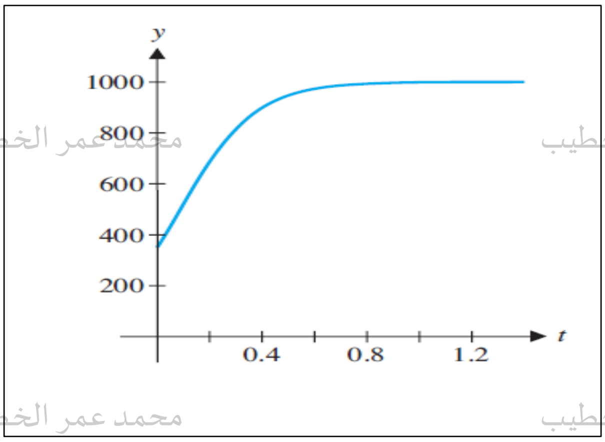
(أ) اكتب المعادلة التي تمثل معدل نمو الاسماك في الحوض مع الشروط (المعادلة التفاضلية)

$$y'(t)=ky(M-y)$$
$$y'=0.007y(1000-y) \quad ,y(0)=350$$

(ب) اكتب المعادلة التي تمثل عدد الأسماك في الحوض مع مرور الزمن (حل المعادلة التفاضلية)

(ج) أوجد عدد الأسماك في الحوض بعد مرور 6 أشهر (0.5 سنة)

(د) ارسم دالة النمو اللوجستي



(1) إذا كان عدد سكان إحدى الدول 10 مليون نسمة وينمو بفرضية النمو اللوجتسي حيث $k = 0.001$ ، وقدرته الاستيعابية 20 مليون نسمة ،أوجد عدد السكان بعد خمس سنوات

---

(2) حل المعادلة التفاضلية التالية $y' = 2y(5-y)$, $y(0) = 4$

معادلة نمو لوجستي

انتهت الوحدة السابعة بحمد الله

تمارين عامة على الوحدة السابعة

الوحدة السابع ///// اسئلة الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) $\int \sec 3x \tan 3x \quad dx$

(a) $\frac{1}{9}\sec 3x + c$ (b) $\frac{1}{3}\sec 3x + c$

(c) $\frac{1}{9}\sec 3x \tan 3x + c$ (d) $\frac{1}{3}\sec 3x \tan 3x + c$

---

(2) $\int \sin^2 2x \quad dx =$

(a) $\frac{1}{2}(1-\sin 4x)+c$ (b) $\frac{1}{2}(2x-\sin 2x)+c$

(c) $\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+c$ (d) $\frac{1}{8}(4x-\sin 4x)+c$

---

(3) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \ dx =$

(a) $x+\cos x+c$ (b) $x-\cos x+c$

(c) $x-\sin x+c$ (d) $x+\sin x+c$

(4) $\int \frac{1}{2x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad dx =$

(a) $\frac{1}{2}\ln x + \sec x + c$

(b) $\ln 2x + \sec x + c$

(c) $\frac{1}{2}\ln x + \sec x \tan x + c$

(d) $\frac{1}{2}\ln x + \tan x + c$

---

(5) $\int 15x^2 (x^3+1)^4 \quad dx =$

(a) $(x^3+1)^6 + c$

(b) $15(x^3+1)^6 + c$

(c) $(x^3+1)^5 + c$

(d) $6(x^3+1)^6 + c$

---

(6) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}} \quad dx =$

(a) $\frac{1}{9}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}} + c$

(b) $\frac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\frac{1}{3}(3x^2+5)^{\frac{1}{2}} + c$

(d) $\frac{3}{2}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}} + c$

---

(7) $\int \sin x \cos^6 x \ dx =$

(a) $\frac{1}{7}\cos^7 x + c$

(b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + c$

(c) $\frac{1}{14}\sin^2 x \cos^7 x + c$

(d) $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$

(8) $\int x^2 \cos x^3 \quad dx =$

(a) $\frac{1}{3}\sin x^3 + c$ (b) $-\frac{1}{3}\sin^3 x + c$

(c) $\frac{1}{3}x^3 \sin x^3 + c$ (d) $-\frac{1}{3}x^3 \sin x^3 + c$

---

(9) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx$

(a) $\frac{1}{a^2}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ (b) $\frac{1}{a}\tan^{-1}(x) + c$

(c) $\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c$ (d) $\frac{1}{a^2}\tan^{-1}(\frac{x}{a^2}) + c$

---

(10) $\int 3x\, e^{x^2+1} \quad dx =$

(a) $6e^{x^2+1} + c$ (b) $2xe^{x^2} + c$

(c) $2e^{x^2} + c$ (d) $\frac{3}{2}e^{x^2+1} + c$

---

(11) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2 + 1} \quad dx =$

(a) $(\tan^{-1} x)^3 + c$ (b) $(x^2 + 1)^3 + c$

(c) $\frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + c$ (d) $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + c$

(12) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\ dx =$

(a) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $\frac{3}{2}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\frac{1}{3}(\sec x)^3 + c$ (d) $-\frac{1}{3}(\sec x)^3 + c$

---

(13) $\int x\sqrt{x-1}\ dx =$

(a) $2x^2(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $(x-1)^{\frac{5}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\frac{2}{3}(x^2-x)^{\frac{3}{2}} + c$ (d) $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

---

(14) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\ dx =$

(a) $\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c$ (b) $2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c$

(c) $\ln\left|\sqrt{x}+x\right| + c$ (d) $2\ln\left|\sqrt{x}+x\right| + c$

---

(15) $\int \frac{1}{9x^2+4}\ dx =$

(a) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{3}{2}x) + c$ (b) $\frac{2}{3}\tan^{-1}(\frac{3}{2}x) + c$

(c) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{2}{3}x) + c$ (d) $\frac{1}{9}\tan^{-1}(\frac{9}{4}x) + c$

(16) $\int \frac{1}{x^2-6x+10}\ dx =$

(a) $\tan^{-1}(x+3)+c$

(b) $\sec^{-1}(x+3)+c$

(c) $\tan^{-1}(x-3)+c$

(d) $\sin^{-1}(x-3)+c$

---

(17) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^4)+c$

(b) $\frac{1}{2}\tan(x^4)+c$

(c) $\tan^{-1}(x^4)+c-$

(d) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+c$

---

(18) $\int \frac{3}{(x-2)^2+5}\ dx$

(a) $\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{(x-2)}{\sqrt{5}}+c$

(b) $\frac{6}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{(x-2)}{\sqrt{5}}+c$

(c) $\frac{3}{5}\tan^{-1}\frac{(x-2)}{\sqrt{5}}+c$

(d) $\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{(x-5)}{\sqrt{2}}+c$

---

(19) $\int (1+e^{\tan 2x})\sec^2 2x\quad dx =$

(a) $\tan x+e^{\tan 2x}+c$

(b) $x+e^{\tan 2x}+c$

(c) $\frac{1}{2}(\tan 2x+e^{\tan 2x})+c$

(d) $x+\frac{1}{2}e^{\tan 2x}+c$

(20) $\int 2(\tan x+\tan^3 x)\,dx=$

(a) $\tan^2 x+c$ (b) $\sec^2 x+x+c$

(c) $\sec^3 x+c$ (d) $2x+c$

---

(21) $\int 4e^{x^2+\ln x}\ dx=$

(a) $e^{x^2}+c$ (b) $2xe^{x^2}+c$

(c) $2e^{x^2}+c$ (d) $xe^{x^2}+c$

---

(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}\ dx=$

(a) $\sec^{-1} x+c$ (b) $\csc^{-1} x+c$

(c) $\sin^{-1} x+c$ (d) $\cos^{-1} x+c$

---

(23) $\int x(2x+1)^5\ dx=$

(a) $\frac{1}{28}(2x+1)^7-\frac{1}{24}(2x+1)^6+c$ (b) $\frac{1}{28}(2x+1)^7+\frac{1}{24}(2x+1)^6+c$

(c) $\frac{1}{28}(2x+1)^8-\frac{1}{24}(2x+1)^7+c$ (d) $\frac{1}{14}(2x+1)^7-\frac{1}{12}(2x+1)^6+c$

(24) $\int \sec x \, dx =$

(a) $\ln|\sec x + \tan x| + c$

(b) $\ln|\sec x - \tan x| + c$

(c) $\ln|\sec x \tan x| + c$

(d) $\ln|\sec x| + c$

---

(25) $\int \csc x \, dx =$

(a) $\ln|\csc x - \cot x| + c$

(b) $\ln|\csc x \cot x| + c$

(c) $\ln|\csc x| + c$

(d) $-\cot^2 x + c$

---

(26) $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

(a) $\sqrt{3-2x-x^2} + c$

(b) $-\sqrt{3-2x-x^2} + c$

(c) $\sin^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

(d) $2\sin^{-1}(\frac{x+1}{2}) + c$

---

(27) $\int \frac{2}{\sqrt{e^{4x}-1}} \quad dx =$

(a) $\sec^{-1}(e^{4x}) + c$

(b) $\sin^{-1}(e^{4x}) + c$

(c) $\sec^{-1}(e^{2x}) + c$

(d) $\sin^{-1}(e^{2x}) + c$

(28) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(a) $\ln(e^{2x}+1)+c$ (b) $\tan^{-1}(e^x)+c$

(c) $\tan^{-1}(e^{2x}+1)+c$ (d) $\tan^{-1}(e^x+1)+c$

---

(29) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

(a) $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{2x+1}{3}+c$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c$

(c) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$

---

(30) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

(a) $\sin^{-1}x+c$ (b) $\sin^{-1}(x-1)+c$

(c) $\sin^{-1}(x+1)+c$ (d) $\sin^{-1}(1-x)+c$

---

(31) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \quad ,a>0$

(a) $\frac{1}{a^2}\sec^{-1}(\frac{x}{a})+c$ (b) $\frac{1}{a}\sec^{-1}(x)+c$

(c) $\frac{1}{a}\sec^{-1}(\frac{x}{a})+c$ (d) $\frac{1}{a^2}\sec^{-1}(\frac{x}{a^2})+c$

(32) $\int \frac{3}{x^{1/4}+x} \quad dx =$

(**a**) $4\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$ (**b**) $2\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$

(**c**) $4\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$ (**d**) $2\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$

---

(33) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad dx =$

(**a**) $2\cos\sqrt{x}+c$ (**b**) $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+c$

(**c**) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (**d**) $2\sin\sqrt{x}+c$

---

(34) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3} \; dx =$

(**a**) $\frac{3}{4}(x^5-x^3)^{\frac{4}{3}}+c$ (**b**) $\frac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

(**c**) $\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$ (**d**) $-\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

---

(35) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} \; dx$

(**a**) $\sin^{-1}(\frac{x+1}{2})+c$ (**b**) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{x+1}{2})+c$

(**c**) $\sec^{-1}(\frac{x+1}{2})+c$ (**d**) $\frac{1}{2}\sin^{-1}(x+1)+c$

(36) $\int_{0}^{1} x(x-1)^3 \; dx$

(a) $\frac{1}{20}$ (b) $-\frac{1}{20}$

(c) $\frac{1}{8}$ (d) $-\frac{1}{8}$

---

(37) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \; \sin x \, dx =$

(a) -1 (b) 1

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

---

(38) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} \; dx =$

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

---

(39) $\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \; dx =$

(a) $\frac{1}{2}\int_{1}^{4} e^u \; du$ (b) $\frac{1}{2}\int_{1}^{2} e^u \; du$

(c) $2\int_{1}^{2} e^u \; du$ (d) $2\int_{1}^{4} e^u \; du$

(40) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx =$

(a) 1

(b) $\ln\sqrt{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $-\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$

---

(41) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx =$

(a) $-\frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{8}$

(c) $-\frac{3}{16}$

(d) $\frac{3}{16}$

---

(42) $\int_1^3 e^{2\ln x} \, dx =$

(a) $\frac{28}{3}$

(b) $\frac{26}{3}$

(c) 8

(d) 10

---

(43) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx =$

(a) $2\sqrt{2}$

(b) $-2\sqrt{2}$

(c) $2(\sqrt{2}-1)$

(d) $2(\sqrt{2}+1)$

(44) باستخدام التعويض المناسب يمكن تحويل التكامل $\int (\ln x)^2 dx$ الى

(a) $\int u\, e^u du$

(b) $\int u^2\, e^u du$

(c) $\int u^3 du$

(d) $\int e^{2u} du$

---

(45) إذا كان $\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\, dx = k\int_a^b (u+1)\sqrt{u}\, du$ فإن قيمة الثابت k تساوي

(a) 4

(b) 2

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{4}$

---

(46) إذا كان $\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\, dx = k\int_a^b (u+1)\sqrt{u}\, du$ فإن قيمة الثابت b تساوي

(a) 5

(b) 9

(c) 11

(d) 8

---

(47) إذا كانت $\int_0^k \frac{\sec^2 x}{1+\tan x} dx = \ln 2$ فإن قيمة الثابت k حيث $0 \le k \le \pi$ يساوي

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

(d) $\frac{\pi}{2}$

(48) إذا كان $f(x)$ دالة متصلة على R ، فإن $\int_0^{\pi} \cos x \, f'(\sin x)\, dx$ يساوي

(a) 1 (b) π (c) 0 (d) 2π

---

(49) إذا كان $f(0)=-2 \, , \, f(1)=2$ ، فإن $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\, dx$ يساوي

(a) 0 (b) 4

(c) $\ln 3$ (d) $\ln 4$

---

(50) $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x} \, dx =$

(a) $\frac{1}{6}(\ln 4)^3$ (b) $-\frac{1}{6}(\ln 4)^3$

(c) $\frac{1}{4}(\ln 4)^2$ (d) $-\frac{1}{4}(\ln 4)^2$

---

(1) $\int x\sin x \quad dx$

(a) $\dfrac{x^2}{2}\cos x + c$

(b) $-\dfrac{1}{4}x^2\cos^2 x + c$

(c) $-x\cos x + \sin x + c$

(d) $x\cos x - \sin x + c$

---

(2) $\int e^{ax}x^2 \quad dx \;=\; \int x^2 e^{ax} \quad dx \qquad a \neq 0$

(a) $\dfrac{1}{a}x^2 e^{ax} - \dfrac{2}{a^2}x e^{ax} + \dfrac{2}{a^3}e^{ax} + c$

(b) $\dfrac{1}{a}x^2 e^{ax} + \dfrac{2}{a^2}x e^{ax} + \dfrac{2}{a^3}e^{ax} + c$

(c) $\dfrac{1}{a^2}x^2 e^{ax} - \dfrac{1}{a^3}x e^{ax} + \dfrac{1}{a^4}e^{ax} + c$

(d) $\dfrac{1}{3a}x^3 e^{ax} + c$

---

(3) $\int x\sec^2 x \quad dx =$

(a) $\dfrac{x^2}{2}(\sec^2 x - \tan^2 x) + c$

(b) $x\tan x + \ln|\cos x| + c$

(c) $\dfrac{1}{2}x^2\sec^2 x - \dfrac{1}{6}x^3\tan^2 x) + c$

(d) $\dfrac{1}{2}x^2\sec^2 x + \tan^2 x + c$

(4) $\int \sin^{-1} x \;\; dx =$

(a) $x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\; dx$

(b) $x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\; dx$

(c) $x\sin^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\; dx$

(d) $\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\; dx$

---

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{e^x}} dx$

(a) $\frac{2x-4}{\sqrt{e^x}} + c$

(b) $\frac{-2x-4}{\sqrt{e^x}} + c$

(c) $\frac{2x+4}{\sqrt{e^x}} + c$

(d) $\frac{-2x+4}{\sqrt{e^x}} + c$

---

(6) $\int \sin\sqrt{x} \; dx$

(a) $\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x} + c$

(b) $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$

(c) $\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$

(d) $2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c$

---

(7) $\int e^{\sqrt{x}} \; dx$

(a) $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} + c$

(b) $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2e^{\sqrt{x}} + c$

(c) $2xe^{x} - 2e^{x} + c$

(d) $2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

(8) $\int e^{2x} \sin e^{x} \, dx$

(a) $-e^{x} \cos e^{x} + \sin e^{x} + c$

(b) $e^{x} \cos e^{x} - \sin e^{x} + c$

(c) $e^{x} \sin e^{x} + \cos e^{x} + c$

(d) $\cos e^{x} - e^{x} \sin e^{x} + c$

---

(9) $\int (lnx)^{2} \quad dx$

(a) $x(\ln x)^{2} - 2x \ln x + 2x + c$

(b) $x(\ln x)^{2} + 2x \ln x + 2x + c$

(c) $\frac{1}{3}(\ln x)^{3} + c$

(d) $2(x \ln x - x) + c$

---

(10) $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx =$

(a) $\sin x \ln(\sin x) - \sin x + c$

(b) $\sin x \ln(\sin x) + \sin x + c$

(c) $\frac{1}{2}[\ln(\sin x)]^{2} + c$

(d) $\frac{[\ln(\sin x)]^{2}}{\sin x} + c$

---

(11) $\int 2x^{3} e^{x^{2}} \, dx =$

(a) $x^{2} e^{x^{2}} - e^{x^{2}} + c$

(b) $x^{2} e^{x^{2}} + e^{x^{2}} + c$

(c) $\frac{1}{3} x^{3} e^{x^{2}} - e^{x^{2}} + c$

(d) $\frac{1}{3} x^{3} e^{x^{2}} + c$

(12) $\int 2x^3 \sin x^2 \; dx$

(a) $x^2 \cos x^2 + \sin x + c$

(b) $-x^2 \cos x^2 + \sin x^2 + c$

(c) $-\cos x^4 + c$

(d) $x \cos x + \sin x + c$

---

(13) $\int_0^{\pi} 2x \cos x \;\; dx$

(a) 4

(b) 6

(c) -4

(d) 0

---

(14) $\int_1^2 lnx \;\; dx$

(a) $\ln 4 - 1$

(b) $\ln 2 - 1$

(c) $\ln 4 + 1$

(d) $2 \ln 2$

---

(15) $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx =$

(a) $1 - 2e$

(b) $1 - 2e^{-1}$

(c) $1 + 2e$

(d) $1 + 2e^{-1}$

(16) عند استخدام التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل $\int x^2 \ln x \quad dx$ فإن

(a) $u = x^2 , dv = \ln x$ (b) $u = \ln x , dv = x^2$

(c) $u = x^2 \ln x , dv = 1$ (d) $u = x , dv = x \ln x$

---

(17) إذا كان

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int g(x) \tan x \, dx$$

فإن $g(x)$ تساوي

(a) $\sec x$ (b) $\sec^2 x$

(c) $\sec^3 x$ (d) $\sec x \tan x$

---

(18) إذا كان $\int f(x) \sin x \, dx = -f(x) \cos x + \int 3x^2 \cos x \, dx$ فإن $f(x)$

(a) $-x^3 + c$ (b) $x^3 + c$

(c) $3x^2 + c$ (d) $-3x^2 + c$

---

(19) إذا كانت $\int_1^4 f(x) \, dx = 12$ $f(4) = -8, f(1) = 3,$

فإن قيمة $\int_1^4 (2x+3) \, f'(x) \, dx$ يساوي

(a) -88 (b) -24

(c) -127 (d) -137

(20) اعتمد على الجدول المجاور وقيمة التكامل

x	-3	-1	2	4	5
$f(x)$	2	4	1	-3	3
$g(x)$	-1	-2	0	7	4

$$\int_{-3}^{5} f(x)\, g'(x)\, dx = 9$$

فإن $\displaystyle\int_{-3}^{5} f'(x)\, g(x)\, dx$ يساوي

(**a**) -2

(**b**) 5

(**c**) 12

(**d**) 17

---

(21) إذا كانت $f(2)=3,\ f(5)=7,\quad g(2)=4,\ g(5)=2$

وكانت كل من:

$$T_1=\int_2^5 f'(x)g(x)\,dx \quad , \quad T_2=\int_2^5 f(x)g'(x)\,dx$$

فإن قيمة T_1+T_2 تساوي

(**a**) -4

(**b**) 4

(**c**) -2

(**d**) 2

---

(22) إذا كانت f دالة متصلة وقابلة للإشتقاق حيث $f(0)=-1,\ f(1)=2$

فإن $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)+e^x f'(x)\, dx$ يساوي

(**a**) $2e+1$

(**b**) $2e-1$

(**c**) 2

(**d**) 3

(23) أي من التكاملات التالية يمكن ايجاده باستخدام طريقة التكامل بالاجزاء

(a) $\int x \sin x^2 \, dx$

(b) $\int x^2 \sin 2x \, dx$

(c) $\int (x^2 - 5)^2 \, dx$

(d) $\int x^3 e^{x^4} \, dx$

الوحدة السابعة ///// اسئلة الدرس الثالث

(1) $\int \tan^3 x \sec x \ dx$

(a) $\frac{1}{2}\sec^2 x - \sec x + c$

(b) $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + c$

(c) $\frac{1}{2}\sec^2 x + \sec x + c$

(d) $-\frac{1}{3}\sec^3 x + \sec x + c$

---

(2) $\int \cos^2(x+1) \ dx$

(a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2(x+1) + c$

(b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin 2(x+1) + c$

(c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x+1) + c$

(d) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2(x+1) + c$

---

(3) $\int \sin^2 x \cos^3 x \ dx =$

(a) $\frac{2}{3}\sin^3 x \cos^3 x + c$

(b) $\frac{1}{4}\sin x \cos^4 x - \frac{1}{3}\sin^3 x \cos^5 x + c$

(c) $\frac{1}{4}\sin x \cos^4 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$

(d) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

---

(4) $\int \sin^3 x \ dx =$

(a) $\frac{1}{3}\cos x \sin^2 x - \cos x + c$

(b) $\frac{1}{4}\sin^4 x + c$

(c) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

(d) $\frac{1}{4}\cos^4 x + c$

(5) $\int \sec^4 x \sqrt{\tan x}\, dx =$

(a) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}(\tan x)^{\frac{7}{2}} + c$

(b) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}(\tan x)^{\frac{7}{2}} + c$

(c) $\frac{1}{2}(\tan x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{7}(\tan x)^{\frac{1}{7}} + c$

(d) $\frac{1}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{7}(\tan x)^{\frac{7}{2}} + c$

---

(6) $\int \tan x \sec^3 x\, dx =$

(a) $-\frac{1}{3}\sec^3 x + c$

(b) $\frac{1}{3}\sec^3 x + c$

(c) $\frac{1}{4}\sec^4 x + c$

(d) $\frac{1}{3}\tan^3 x + c$

---

(7) $\int \cot^3 x\, dx$

(a) $-\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c$

(b) $\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sin x| + c$

(c) $\frac{1}{4}\cot^4 x + c$

(d) $-\frac{1}{4}\csc^4 x + c$

---

(8) $\int \sec^4 x\ \ dx =$

(a) $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + c$

(b) $\frac{1}{5}\sec^5 x + c$

(c) $\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + c$

(d) $4\sec^4 x \tan x + c$

(9) $\int \cot^2 x \csc^2 x \, dx =$

(a) $\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

(b) $\frac{1}{3}\csc^3 x + c$

(c) $-\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

(d) $\frac{1}{9}\cot^3 x \csc^3 x + c$

---

(10) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

(a) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$

(b) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$

(c) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 2x + c$

(d) $\frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

---

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx =$

(a) $2\sqrt{2}$

(b) $-2\sqrt{2}$

(c) $2(\sqrt{2}-1)$

(d) $2(\sqrt{2}+1)$

---

(12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx =$

(a) $-\frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{8}$

(c) $-\frac{3}{16}$

(d) $\frac{3}{16}$

(13) $\int_{0}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

(**a**) $\frac{2}{5}$ (**b**) $\frac{12}{35}$

(**c**) $\frac{17}{21}$ (**d**) $\frac{24}{35}$

---

(14) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$

(**a**) -72 (**b**) 2π

(**c**) $\frac{-1}{72}$ (**d**) $\frac{-1}{36}$

---

(15) لإيجاد التكامل $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ نستخدم التعويض

(**a**) $x = 3\sin\theta$ (**b**) $x = 3\sec^2\theta$

(**c**) $x = 3\sec\theta$ (**d**) $x = 3\tan\theta$

---

(16) لإيجاد التكامل $\int \sqrt{x^2-4x} \, dx$ نستخدم التعويض

(**a**) $x = 2\sin\theta - 2$ (**b**) $x = 2\sec^2\theta - 4$

(**c**) $x = 2\sec\theta + 2$ (**d**) $x = 2\sec\theta - 2$

(17) باستخدام التعويض المناسب يمكن كتابة التكامل $\int \sqrt{2x-x^2}\; dx$ بالصورة

(a) $\int \cos\theta \, d\theta$ (b) $\int \cos^2\theta \, d\theta$

(c) $\int \sin^2\theta \, d\theta$ (d) $\int \cos\theta \, d\theta$

---

(18) باستخدام التعويض المناسب يمكن كتابة التكامل $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \; dx$ بالصورة

(a) $-\int \tan\theta \quad d\theta$ (b) $\frac{1}{2}\int \sec\theta \tan\theta \quad d\theta$

(c) $2\int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \quad d\theta$ (d) $2\int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad d\theta$

---

(19) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$ (b) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c$

(c) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$ (d) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$

---

(20) $\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \, dx$

(a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$ (b) $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + c$

(c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$ (d) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$

(21) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$

(a) $\sqrt{x^2-1}+\sec^{-1}x+c$ (b) $\sqrt{x^2+1}+\sec^{-1}x+c$

(c) $\sqrt{x^2-1}-\sec^{-1}x+c$ (d) $\sqrt{x^2-1}-\cos^{-1}x+c$

---

(22) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\, dx$

(a) $\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c$ (b) $-\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x}+c$

(c) $\frac{9x}{\sqrt{9-x^2}}+c$ (d) $-\frac{9x}{\sqrt{9-x^2}}+c$

---

(23) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta$ (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\theta\, d\theta$ (d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta\, d\theta$

---

(24) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

(25) إذا كان $\int \sin^3 x \cos^n x \; dx = \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + c$ فإن قيمة n تساوي

(**a**) 1 (**b**) 2

(**c**) 3 (**d**) 4

---

(26) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$

(**a**) $\frac{1}{3}\tan^3 x + c$ (**b**) $\frac{1}{2}\tan^2 x + c$

(**c**) $\frac{1}{3}\sec^3 x + c$ (**d**) $\frac{1}{3}\cos^3 x + c$

الوحدة السابعة ///// اسئلة الدرس الرابع

(1) لايجاد التكامل $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$ نستخدم طريقة

(a) التعويض (b) الأجزاء

(c) الكسور الجزئية (d) التعويضات المثلثية

---

(2) لايجاد التكامل $\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$ نستخدم طريقة

(a) التعويض (b) الأجزاء

(c) الكسور الجزئية (d) القسمة المطولة

---

(3) الكسور الجزئية المكافئة للكسر $\frac{5x+7}{(x+1)^2(x^2+1)}$ (بدون حساب الثوابت) هي

(a) $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ (b) $\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

(c) $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ (d) $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x^2+1}$

---

(4) الكسور الجزئية المكافئة للكسر $\frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$

(a) $\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{x-3}$ (b) $\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{x-3}$

(c) $\frac{2}{2x+1}+\frac{-1}{x-3}$ (d) $\frac{-2}{2x+1}+\frac{1}{x-3}$

(5) $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\, dx =$

(a) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$ (b) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+c$

(c) $\frac{1}{3}\ln|(x-1)(x+2)|+c$ (d) $\frac{\ln|x-1|}{3\ln|x+2|}$

---

(6) $\int \frac{1}{x^2+x}\, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x+\frac{1}{2})+c$ (b) $\frac{1}{2}\ln|x^2+x|+c$

(c) $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+c$ (d) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$

---

(7) $\int \frac{1}{(x^2+x)(x+1)}\, dx =$

(a) $A\ln|x|+B\ln|x+1|-\frac{C}{x+1}+c$ (b) $A\ln|x|+B\ln|x+1|+\frac{C}{(x+1)^2}+c$

(c) $A\ln|x^2+x|+B\ln|x+1|+c$ (d) $A\ln|x|+B\ln|x^2+1|+c$

حيث C, B, A ثوابت

(8) إذا كان

$$\int \frac{3x}{(x-1)(x+2)}\,dx \quad = A\ln|x-1| + B\ln|x+2| + c$$

فإن

(a) $A=1\,,\,B=2$ (b) $A=2\,,\,B=1$

(c) $A=-1\,,\,B=2$ (d) $A=1\,,\,B=-2$

---

(9) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$

(a) $\ln|x| + \tan^{-1}x + c$ (b) $\ln|x| + \tan^{-1}x^2 + c$

(c) $\ln|x| + \ln|x+1| + c$ (d) $\ln|x| + \ln|x^2+1| + c$

---

(10) $\displaystyle\int \frac{-x+5}{x^3-x^2-2x}\,dx$

(a) $\frac{5}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| - 2\ln|x+1| + c$ (b) $-\frac{5}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + \ln|x+1| + c$

(c) $\frac{5}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + c$ (d) $-\frac{5}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + c$

---

(11) $\displaystyle\int \frac{4x-5}{x^3-x^2}\,dx$

(a) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{5}{x} + c$ (b) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{5}{x} + c$

(c) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \frac{5}{x} + c$ (d) $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - 5\ln|x| + c$

(12) $\int_{2}^{3} \frac{x+1}{x^2+2x-3}\, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\ln 3$

(b) $\frac{1}{2}\ln\frac{12}{5}$

(c) $\ln 12$

(d) $\frac{1-\ln 3}{2}\ln\frac{6}{5}$

---

(13) $\int \frac{x}{x+2}\, dx =$

(a) $x\ln|x+2|+c$

(b) $x+2\ln|x+2|+c$

(c) $x-2\ln|x+2|+c$

(d) $x+\ln|x+2|+c$

---

(14) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}\, dx =$

(a) 0

(b) $\ln 2$

(c) $\frac{\ln 2}{2}$

(d) $1-\frac{\pi}{4}$

---

(15) $\int \frac{x^5}{x^4+1}\, dx =$

(a) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c$

(b) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+c$

(c) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$

(d) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x^4+1)+c$

---

1) إحدى المعادلات التفاضلية التالية قابلة للفصل

(a) $y' = 3x(x+y)$

(b) $y' = e^{x+\ln y}$

(c) $y' = 3x\cos(x+y)$

(d) $y' = \dfrac{3xy}{x^2+y^2}$

---

2) أي من المعادلات التفاضلية التالية غير قابلة للفصل

(a) $y' = \sin(x+y)$

(b) $y' = e^{x+\ln y}$

(c) $y' = \dfrac{xy}{x^2+1}$

(d) $\dfrac{y'}{x} = \dfrac{\cos x}{y}$

---

3) أي من الدوال التالية هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y = 0$

(a) $y = e^{2x}$

(b) $y = 2e^{x}$

(c) $y = \sin 2x$

(d) $y = \cos 2x$

---

4) إن حل المعادلة التفاضلية , $y(0) = A, y'(t) = k\ y$ حيث $A > 0$ هو

(a) $y = A\,e^{kt}$

(b) $y = A\,kt + c$

(c) $y = e^{Akt}$

(d) $y = e^{kt} + A$

(5) إن حل المعادلة التفاضلية $y(0)=-5\,,\,y'(t)=2y$ هو

(a) $y=5\,e^{2t}$

(b) $y=5e^{-2t}$

(c) $y=-5e^{2t}$

(d) $y=e^{2t}-5$

---

(6) إن حل المعادلة التفاضلية $y(1)=1\,,\,y'(t)=2y$ هو

(a) $y=2\,e^{2t-1}$

(b) $y=2t-1$

(c) $y=e^{2t-2}$

(d) $y=2e^{2t}-1$

---

(7) إن حل المعادلة التفاضلية $y'(x)=y^2+1$ هي

(a) $y=e^x+A$

(b) $y=Ae^x$

(c) $y=\tan(x+c)$

(d) $y=\tan x+c$

---

(8) إن حل المعادلة التفاضلية $y'=\sqrt{1-y^2}$ هي

(a) $y=\cos(x+c)$

(b) $y=\sin x+c$

(c) $y=\sin^{-1}x+c$

(d) $y=\sin(x+c)$

---

(9) إن حل المعادلة التفاضلية $y(0)=\dfrac{3\pi}{4}\,,\,y'=\cos^2 y$ بصورة صريحة هو

(a) $y=\tan^{-1}(x-1)$

(b) $y=\tan^{-1}x-1$

(c) $y=\tan^{-1}(x+1)$

(d) $y=\tan^{-1}(x+c)$

(10) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{x}{x^2+1}$, $y(0) = 2$ هي

(a) $y = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c$

(b) $y = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 2$

(c) $y = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|$

(d) $y = \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 2$

---

(11) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2xy}{x^2+1}$ هي

(a) $y = A(x^2+1)$

(b) $y = (x^2+1) + A$

(c) $y = \ln(x^2+1) + c$

(d) $y = A\ln(x^2+1)$

---

(12) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = xy^2 + x$ بصورة صريحة هو

(a) $y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + c)$

(b) $y = \tan(\frac{1}{2}x^2) + c$

(c) $y = A\tan(\frac{1}{2}x^2)$

(d) $y = \tan(Ax^2)$

---

(13) إن حل المعادلة التفاضلية $y(0) = -2$ $y' = \frac{x-1}{y}$ هي

(a) $y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

(c) $y = -\sqrt{x^2 - 2x - 4}$

(d) $y = -\sqrt{x^2 - 2x + 4}$

(14) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = e^{x-y}$ هي

(a) $y = \ln e^{x} + c$

(b) $y = \ln(e^{x} + c)$

(c) $y = A\ln e^{x}$

(d) $y = x^{2} + 1$

---

(15) إذا كانت $y' = e^{x-y}$, $y(0) = 0$ فإن $y(2)$ تساوي

(a) 4

(b) $2e$

(c) $2e^{2}$

(d) 2

---

(16) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = 2x\cos^{2} y$ بصورة صريحة هي

(a) $y = \tan^{-1} x + c$

(b) $y = \tan^{-1}(x + c)$

(c) $y = \tan^{-1} x^{2} + c$

(d) $y = \tan^{-1}(x^{2} + c)$

---

(17) إن حل المعادلة التفاضلية $y'(t) = -0.1\,y - 10$, $y(0) = 80$ هو

(a) $y = 100 - 20\,e^{-0.1t}$

(b) $y = 180\,e^{-0.1t} - 100$

(c) $y = 10 + 70\,e^{0.1t}$

(d) $y = 70\,e^{-0.1t} + 10$

(18) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{3x}{y+1}$, $y(1) = 1$ بصورة صريحة هو

(a) $y = -1 + \sqrt{3x^2 + 1}$

(b) $y = -1 - \sqrt{3x^2 + 1}$

(c) $y = -1 \pm \sqrt{3x^2 + 1}$

(d) $y = -1 + \sqrt{3x^2 - 1}$

---

(19) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = x\sin x$, $y(0) = 1$ هي

(a) $y = x\cos x + \sin x + 1$

(b) $y = -x^2 \cos x + 1$

(c) $y = \dfrac{1}{4}x^2 \sin^2 x + 1$

(d) $y = -x\cos x + \sin x + 1$

---

(20) إن حل المعادلة التفاضلية $y(0) = -1, y' = \dfrac{-x\sin x^2}{y}$ بصورة صريحة هي

(a) $y = -\sqrt{\cos x^2}$

(b) $y = \sqrt{\cos x^2}$

(c) $y = \pm\sqrt{\cos x^2}$

(d) $y^2 = \cos x^2$

---

(21) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{-x}{ye^{x^2}}$, $y(0) = 1$ بصورة ضمنية هي

(a) $y^2 = 1 + e^{-x^2}$

(b) $y = 1 - e^{-2x}$

(c) $y = e^{-x}$

(d) $y^2 = e^{-x^2}$

(22) إن حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{\sin x}{y\cos y}$, $y(0)=\pi$ بصورة ضمنية هي

(a) $y\cos y + \sin y = \sin x$

(b) $y\cos y - \sin y = -\sin x + \pi$

(c) $y\sin y + \sin y = -\cos x$

(d) $y\sin y + \cos y = -\cos x$

---

(23) إذا كان $f'(x) = f(x)$ حيث $f(1)=1$ فان $f(x)$ تساوي

(a) $e^x + c$

(b) e^{x+c}

(c) $e^x - 1$

(d) e^{x-1}

---

(24) إذا كان $f'(x) = 3x^2 + 2x$ حيث $f(2)=3$ فإن $f(1)$ تساوي

(a) -10

(b) -7

(c) 10

(d) 13

---

(25) إذا كانت $y' = \sin x \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ فإن $y(0)$ تساوي

(a) -1

(b) 1

(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $-\dfrac{1}{3}$

(1) مجتمع سكاني ينمو حسب المعادلة التفاضلية $y' = ky$ ويتضاعف كل 10 سنوات ، فان قيمة k تساوي

(a) 0.069 (b) 0.2

(c) 5 (d) 3.22

---

(2) عند تشخيص حالة مريض وجد ان عدد الخلايا على حلقه تنموا بالمعادلة $y(t) = 300\, e^{0.231t}$

فإن الزمن المضاعف لعدد الخلايا تقريباً يساوي

(a) 300 (b) 30

(c) 3 (d) 0.3

---

(3) يحتفظ الجسم بمادة الكفاين بعد شرب فنجان من القوة حسب المعادلة التفاضلية التالية

$y'(t) = -0.14\, y(t)$ حيث الزمن بالساعات ،فإن الزمن بالساعات الذي يبقى فيه نصف كمية الكفايين في الجسم تساوي تقريبا´

(a) 5 (b) 2.5

(c) 10 (d) 8

---

(4) مجتمع بكتيري عدده 100 ويتضاعف كل أربع ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي، فإن عدد الخلايا بعد مرور 7 ساعات يساوي

(a) 673 (b) 336

(c) 700 (d) 400

(5) عينة كربون 14 (^{14}C) مكونة من $50\ g$ ، تتحلل بمعدل أسي، إذا كان عمر النصف له هو 6000 سنة فإن كتلة العينة بعد مرور 8000 سنة تساوي تقريباً

(a) $20\ g$ (b) $0\ g$

(c) $2\ g$ (d) $10\ g$

---

(6) إذا تم حقن دم مريض بكمية من المورفين هي $0.4\ g$ ، وتتحلل بالدم بمعدل أسي، إذا كان عمر النصف للمورفين هو 3 ساعات ، فإن كمية المورفين في الدم بعد مرور 24 ساعة تساوي

(a) $0.00156\ g$ (b) $0.008\ g$

(c) $0.00321\ g$ (d) $0.00052\ g$

---

(7) إذا تم حقن دم مريض بكمية من المورفين هي $0.8\ g$ ، وتتحلل بالدم بمعدل أسي، إذا كان عمر النصف للمورفين هو 3 ساعات ، فإن الزمن بالساعات التي تصبح كمية المورفين في الدم تساوي $0.1\ g$ هي

(a) 6 (b) 9

(c) 12 (d) 15

---

(8) إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة هي 3% ، فإن المعادلة التي تمثل إجمالي المبلغ عند أي زمن بالسنوات هي

(a) $y = 100000e^{0.03t}$ (b) $y = 1000e^{0.03t}$

(c) $y = 100000(1.03)^{t}$ (d) $y = 100000e^{3t}$

(9) إذا كانت قيمة سيارة 60000 درهم وتتناقص بمعدل أسي مستمر هو 10% ، فإن قيمة السيارة بعد مرور 5 سنوات هو (لا يوجد قيمة خردة لها)

(a) 30000 (b) 57000

(c) 40738 (d) 36391

---

(10) إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة هي 3% ، وتوزع الأرباح شهرياً فان إجمالي المبلغ بعد 5 سنوات يعطي بالقيمة

(a) $A=100000(1+\frac{0.03}{60})^{60}$ (b) $A=100000(1+\frac{0.03}{12})^{60}$

(c) $A=100000(1+\frac{3}{12})^{60}$ (d) $A=100000(1+\frac{0.03}{12})^{5}$

---

(11) يعتبر الاسترنتيوم (90) من أحد النظائر المشعة الخطرة ويتحلل بمعدل أسي حيث يبلغ عمر النصف له 28 عام ، إذا امتص جسم كمية منه فإن النسبة المتبقية في الجسم بعد مرور 84 عام هي

(a) 12.5% (b) 25%

(c) 14.5% (d) 29%

---

(12) إذا تبقى من كربون 14 (^{14}C) في أحد الأحافير هو 20% من الكمية الأصلية حيث يتحلل بمعدل أسي مستمر، إذا كان عمر النصف له 5730 سنة فإن عمر الاحفورة بالسنوات هو

(a) 13304 (b) 6652

(c) 26609 (d) 6876

(13) في عام $1985\ (t=0)$ اشترى شخص بطاقات تذكارية بمبلغ 34 درهم فإذا كانت قيمة البطاقات تزيد بنسبة مئوية ثابتة (نمو أسي) وأصبحت قيمتها 9800 درهم عام $1995\ (t=10)$

فإن المعادلة التي تعطي قيمة هذة البطاقات في أي زمن t هي

(a) $y=34e^{\frac{1}{10}\ln(\frac{9800}{34})\,t}$ (b) $y=34e^{\ln(\frac{9800}{34})\,t}$

(c) $y=34e^{\ln(\frac{34}{9800})\,t}$ (d) $y=9800e^{\ln(\frac{34}{9800})\,t}$

---

(14) إذا استثمر خالد 10000 عام 1990 في أحد البنوك بفائدة مركبة مستمرة ، وأصبح لديه 20000 عام 2000 فإن معدل (الفائدة) المرابحة المركبة المستمرة هي

(a) 6.9% (b) 69%

(c) 3.45% (d) 0.069%

---

(15) عند تشخيص حالة مريض وجد أن 300 خلية تنمو على حلق المريض ، وبعد مرور 30 دقيقة أصبحت عدد الخلايا 900 خلية ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي، فإن عدد الخلايا بعد مرور 3 ساعات يساوي

(a) 218700 (b) 139968

(c) 64800 (d) 21870

---

(16) يتم نمذجة درجة حرارة مشروب القهوة $y(t)$ داخل كوب في غرفة درجة حرارتها 30° بالمعادلة

(a) $y'=30\,y$ (b) $y=k\,(y-30)$

(c) $y'=k(y-30)$ (d) $y'=k\,y$

(17) إذا تمت نمذجة درجة حرارة مشروب القهوة داخل كوب في غرفة درجة حرارتها $20C^{\circ}$ بالمعادلة

$$y' = k\left[y(t) - 20\right]$$

حيث $y(t)$ درجة حرارة مشروب القهوة في أي زمن t بالدقائق ، k ثابت المعادلة

إذا علمت ان حرارة مشروب القهوة عند سكبها هي $80C^{\circ}$ ، وأصبحت بعد دقيقتين $75C^{\circ}$ فإن درجة حرارة القهوة بعد مرور 5 دقائق تساوي

(a) $67.5C^{\circ}$ (b) $68.3C^{\circ}$

(c) $73C^{\circ}$ (d) $70.1C^{\circ}$

---

(18) إذا كان عدد سكان إحدى الدول 20 مليون نسمة وينمو بفرضية النمو اللوجستي حيث $k = 0.001$ وقدرته الاستيعابية 100 مليون نسمة ،فان عدد السكان بعد مرور 5 سنوات هو

(a) $116\ million$ (b) $23.4\ million$

(c) $29.2\ million$ (d) $21.1\ million$

---

(19) إذا كان عدد سكان إحدى الدول ينمو بفرضية النمو اللوجتسي فإن المعادلة التفاضلية مع مرور الزمن التي تمثل هذا النموذج ممكن أن تكون

(a) $y'(t) = 0.025t$ (b) $y'(t) = 0.025y$

(c) $y'(t) = 0.025t(5000 - y)$ (d) $y'(t) = 0.025y(5000 - y)$

20) حل المعادلة التفاضلية $y' = y(5-y) \quad , \quad y(0) = 4$ هو

(a) $y = \dfrac{5e^{5t}}{1+4e^{5t}}$

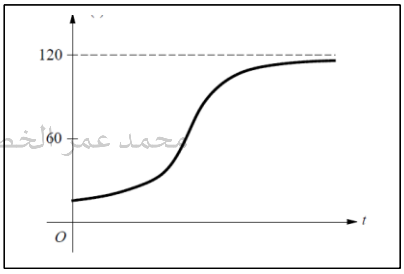
(b) $y = \dfrac{20e^{5t}}{1+4e^{5t}}$

(c) $y = \dfrac{2e^{5t}}{1+e^{5t}}$

(d) $y = \dfrac{4e^{5t}}{1+5e^{5t}}$

---

21)) الشكل المجاور يمثل حل لاحدى المعادلة التفاضلية التالية



(a) $y' = ky(120-y)$

(b) $y' = ky + 120$

(c) $y' = k(y-120)$

(d) $y' = 120k$

انتهت اسئلة الوحدة السابعة ، ، ،بحمد الله

إجابات تمارين الوحدة السابعة

الدرس الأول

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	A	C	C	B	A	C	D	C	A	D	B	A	C	D	A	C	A
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
C	A	A	A	A	B	C	B	C	B	C	A	C	C	A	B	C	D	C	B
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**										
D	B	C	B	D	B	B	C	C	D										

الدرس الثاني

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	B	B	B	B	D	A	A	A	A	B	C	A	B	B	D	B	C	B
21	**22**	**23**																	
D	A	B																	

الدرس الثالث

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	D	D	C	B	B	A	C	C	A	C	D	B	C	C	C	B	C	D	C
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
C	B	D	A	C	A														

الرابع

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15					
C	D	C	A	A	D	A	A	A	D	A	B	C	D	A					

الدرس السادس

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	A	B	A	C	C	C	D	A	B	A	A	D	B	D	D	B	A	D	A
21	**22**	**23**	**24**	**25**															
D	D	D	B	D															

الدرس السابع

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	A	B	A	A	B	A	D	B	A	A	A	A	A	C	B	C	D	B
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
A																			

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق