حل تمارين الدرس الخامس الأعداد المركبة و نظرية دي موافر من الوحدة الثامنة

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الحادي عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثالث ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2025-04-26 21:13:14

المزيد من مادة رياضيات: ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

إعداد: محمد زياد

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر المتقدم

صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك

المواد على تلغرام | التربية الاسلامية | اللغة العربية | اللغة الانجليزية | الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

1	أوراق عمل الدرس الثالث equations of forms rectangular and Polar من الوحدة الثامنة
2	حل تمارين الدرس الثالث الصور القطبية والديكارتية للمعادلات من الوحدة الثامنة
3	أوراق عمل الدرس الثاني equtions polar the of Graphs من الوحدة الثامنة
4	حل تمارين الدرس الثاني التمثيلات البيانية للمعادلات القطبية من الوحدة الثامنة
5	حل أوراق عمل الدرس الثالث الأعداد المركبة ونظرية دي موافر من الوحدة الثامنة

8-5 Complex Numbers and DeMoivre's Theorem

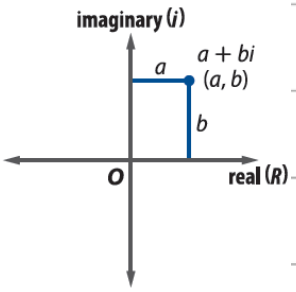
الأعداد المركبة ونظرية دي موافر

Discover all our channels
اكتشف جميع قنواتنا
أ. محمد زياد
Mr. Mohammed Ziad

A complex number can be written in the form

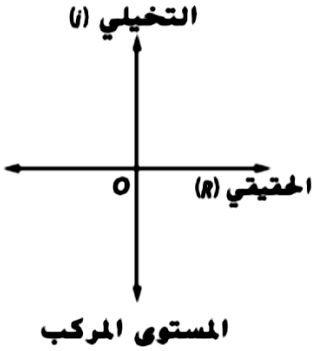
$a + bi$ where a: *real part* , bi : imaginary part

And it can be graphed in the complex plane (Argand Plane)



1 الصور القطبية للأعداد المركبة

يكون للأعداد المركبة المكتوبة في الصورة الديكارتية $a + bi$ المركب الحقيقي a والمركب التخيلي bi. يمكنك تمثيل العدد المركب بيانيًا على **المستوى المركب** بتمثيلها بالنقطة (a, b). وكما هو الحال مع المستوى الإحداثي، نحتاج إلى محورين لتمثيل العدد المركب. يطلق على المركب الحقيقي المعيّن على المحور الأفقي **المحور الحقيقي**. ويطلق على المركب التخيلي المعين على المحور الرأسي **المحور التخيلي**. وقد يشار إلى المستوى المركب بالمصطلح **مستوى أرجاند**.



افترض عددًا مركبًا حيث $b = 0$, $a + 0i$. وتكون النتيجة عددًا حقيقيًا a يمكن تمثيله بيانيًا باستخدام خط أعداد حقيقية أو المحور الحقيقي. وعندما يكون $b \neq 0$. نحتاج إلى المحور التخيلي لتمثيل المركب التخيلي.

KeyConcept Absolute Value of a Complex Number القيمة المطلقة لعدد مركب

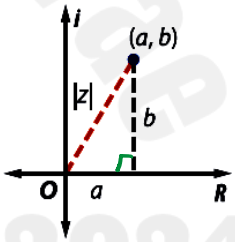
The absolute value of the complex number $z = a + bi$ is

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

تكون القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

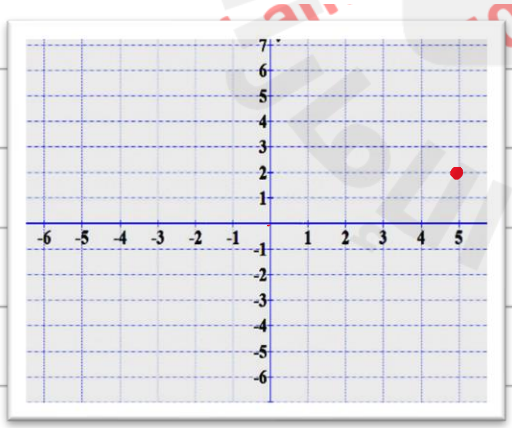
$|-2| = 2$



Ex1: Graph each number in the complex plane, and find its absolute value.

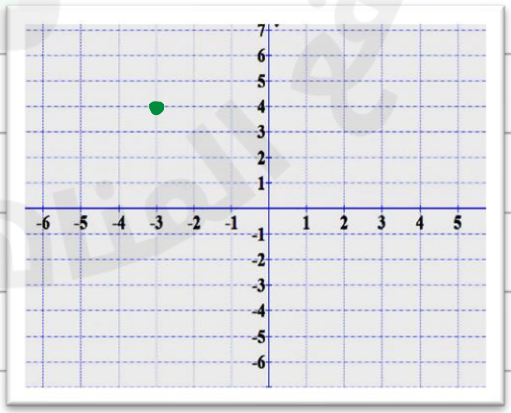
مثل كل عدد بيانيًا في المستوى المركب وأوجد قيمته المطلقة.

1A. $5 + 2i$ $(5, 2)$



$|5+2i| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{29}$

1B. $-3 + 4i$ $(-3, 4)$

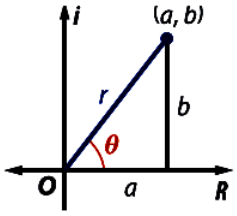


$|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$

KeyConcept Polar Form of a Complex Number — الصورة القطبية لعدد مركب

The polar or trigonometric form of the complex number $z = a + bi$ is
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, where

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, and $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ for $a > 0$ or $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.



r is called Modulus , θ is called Argument

يسمى r معامل العدد مركب و تسمى θ زاوية المتجه

تكون الصورة القطبية أو الصيغة المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث

$a = r\cos\theta$ ، $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $b = r\sin\theta$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ لـ
$a > 0$ أو $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ لـ $a < 0$.

Ex2: Express each complex number in polar form. عبّر عن كل عدد مركب بالصورة القطبية.

2A. $9 + 7i$

$a = 9 > 0$, $b = 7$

$r = \sqrt{(9)^2 + (7)^2} = \sqrt{130}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{9}\right) = 0.661$

$Z = \sqrt{130}\left(\cos(0.661) + i\sin(0.661)\right)$

2B. $-2 - 2i$

$a = -2 < 0$, $b = -2$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2}\right) + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$\Rightarrow -2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

Mr. Mohammed Ziad 0507214939
أ. محمد زياد 0507214939

Ex3: Graph each complex number on a polar grid. Then express it in rectangular form.

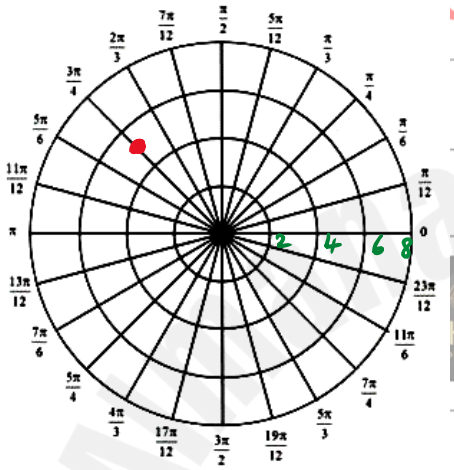
مثل الأعداد التالية على شبكة قطبية ثم عبر عنها في الصورة الديكارتية

3A. $5\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

$= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} i$

$r = 5 \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

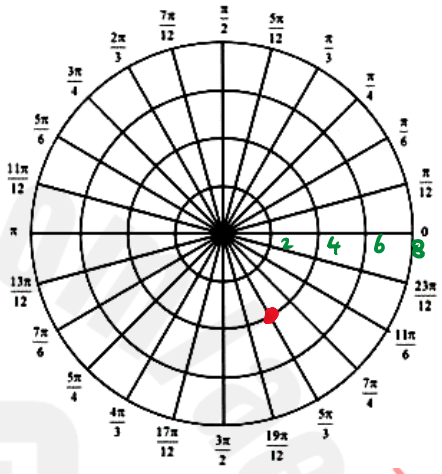


3B. $4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

$= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

$= 2 - 2\sqrt{3} i$

$r = 4 \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$



Products, Quotients, Powers, and Roots of Complex Numbers

ناتج ضرب الأعداد المركبة وناتج قسمتها وأسسها وجذورها في الصورة القطبية

KeyConcept Product and Quotient of Complex Numbers in Polar Form

Given the complex numbers $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ and $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$:

Product Formula $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

Quotient Formula $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$, where z_2 and $r_2 \neq 0$

Ex4: Find each product or quotient, and express it in rectangular form. (Examples 4 and 5)

أوجد كل مقدار أسي أو ناتج قسمة وعبر عنه في الصورة الديكارتية. (المثالان 4 و5)

26. $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \cdot 4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$r_1 \quad \theta_1 \quad \theta_1 \quad r_2 \quad \theta_2 \quad \theta_2$

$= (6)(4)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 24\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= 24\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} i$

28. $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$r_1 \quad \theta_1 \qquad r_2 \quad \theta_2$

$= \frac{3}{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)\right]$

$= 6\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$

$= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,i$

THE GARDEN ACADEMY
We guide you to succeed

KeyConcept DeMoivre's Theorem نظرية دي موافر

If the polar form of a complex number is $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, then for positive integers n

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n \quad \text{or} \quad r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Ex5: Find each power, and express it in rectangular form.

6A. $(1 + \sqrt{3}i)^4$

$a \quad b$

$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$Z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$Z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\times 4\right)\right)$

$= 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$= 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= -8 - 8\sqrt{3}\,i$

Math garden حديقة الرياضيات

KeyConcept Distinct Roots الجذور المختلفة

For a positive integer p, the complex number $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ has p distinct pth roots. They are found by $\sqrt[p]{\ }$

$$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{p}\right),$$

where $n = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$.

أ. محمد زياد 0507214939
Mr. Mohammed Ziad 0507214939

Ex6: Find the cube roots of $2 + 2i$. أوجد الجذور التكعيبية للعدد

$a \quad b$ $\qquad p=3$

$r = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\theta = \tan\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt[3]{Z} = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2n\pi}{3}\right)\right]$, $n = 0, 1, 2$

$n=0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{3}\right)\right] = 1.366 + 0.366i$

$n=1 \Rightarrow (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(1)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(1)\pi}{3}\right)\right] = -1 + i$

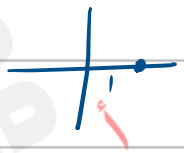
$n=2 \Rightarrow (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/4+2(2)\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(2)\pi}{3}\right)\right] = -0.366 - 1.366i$

Roots: $1.366 + 0.366i$, $-1 + i$, $-0.366 - 1.366i$

Ex7: find the fourth roots of unity. أوجد جذور الوحدة من الدرجة الرابعة

المطلوب $\sqrt[4]{1}$

$1 = \underset{a}{1} + \underset{b}{0}i$



$r = \sqrt{1^2+0^2} = 1$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

$Z = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$\sqrt[4]{1} = (1)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{0+2n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2n\pi}{4}\right)\right]$, $n = 0, 1, 2, 3$

$n=0 \Rightarrow (1)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{0+2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2(0)\pi}{4}\right)\right] = 1$

$n=1 \Rightarrow (1)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{0+2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2(1)\pi}{4}\right)\right] = i$

$n=2 \Rightarrow (1)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{0+2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2(2)\pi}{4}\right)\right] = -1$

$n=3 \Rightarrow (1)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{0+2(3)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{0+2(3)\pi}{4}\right)\right] = -i$

Roots are : 1 , i , -1 , $-i$