

ملزمة مراجعة وتقويم تكويني للوحدة الحادية عشر



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الحادي عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الأول ← ملفات متنوعة ← الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-10-25 00:16:45

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب | اختبارات الكترونية | اختبارات | حلول | عروض بوربوينت | أوراق عمل
منهج انجليزي | ملخصات وتقارير | مذكرات وبنوك | الامتحان النهائي | للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

إعداد: سيف الدين العل

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر المتقدم



صفحة المناهج
الإماراتية على
فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول

سلوك التزايد والتناقص للدوال

1

النمو الأسّي المستمر وتطبيقاته السكانية

2

اختبر نفسك (3) الدوال الأسية منهج ريفيل

3

اختبر نفسك (2) الدوال الأسية وحل المعادلات والمتباينات الأسية منهج ريفيل

4

اختبر نفسك (1) رسم الدوال الأسية منهج ريفيل

5

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية

تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

تطبيق المناهج على Store App (آبل)

LEARN
GROW
ACHIEVE



A Brighter
Tomorrow

مدارس المنارة الخاصة
AL MANARA PRIVATE SCHOOLS

معاً نحو نجاح أكبر
Together Towards Greater Success

التكويني
الأول

المراجعة

REVISION BOOKLET

الرياضيات

المادة:



الحادي عشر المتقدم

الصف:



العام الدراسي

2026 - 2027



المعرفة
Knowledge



الابتكار
Innovation



التميز
Excellence

Better
Students
Brighter
Futures

A BRIGHTER
TOMORROW

ملزمة المراجعة

التقويم التكويني

الرياضيات

الصف الحادي عشر المتقدم

الوحدة الحادية عشر : الدوال — الدروس 11.1 إلى 11.4

اسم الطالب:

الصف / الشعبة:

المعلم:

التاريخ:

محتويات الملزمة

- الدرس 11.1: الدوال ومجالها
- الدرس 11.2: تحليل التمثيلات البيانية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل
- الدرس 11.3: الاتصال والأصفار التقريبية والسلوك الطرفي
- الدرس 11.4: التزايد والتناقص والقيم القصوى ومتوسط معدل التغير

إرشادات استخدام الملزمة

- تبدأ كل وحدة دراسية بـ مخرجات التعلم المستهدفة، ثم شرح مختصر لكل مخرج مع أمثلة محلولة.
- تعقبها 20 سؤالاً متدرجة في ثلاثة مستويات لتناسب الفروق الفردية بين الطلبة، وتتنوع بين الاختيار من متعدد والصح والخطأ والإجابة القصيرة والمسائل المقالية.
- ابدأ بحل أسئلة المستوى الأول ثم انتقل إلى الأعلى بحسب تمكنك؛ فإذا أخطأت في مستوى فارجع إلى المثال المناسب في الشرح.
- اكتب خطوات الحل كاملة في الأسئلة المقالية، ثم قارن إجابتك بنموذج الإجابة في مفتاح الإجابات بنهاية الملزمة.

مستويات الأسئلة

- **المستوى الأول: أساسي (DOK 1):** تذكر المفاهيم والقواعد وتطبيقها المباشر في خطوة واحدة ؛ أنماطها: اختيار من متعدد، صح وخطأ ؛ الدرجة المقترحة 1 .
- **المستوى الثاني: متوسط (DOK 2):** تطبيق المفاهيم في أكثر من خطوة وربط التمثيلات (جبري / بياني) ؛ أنماطها: اختيار من متعدد، إجابة قصيرة ؛ الدرجة المقترحة 2 .
- **المستوى الثالث: متقدم (DOK 3):** التحليل والتبرير وحل المسائل غير المألوفة والمواقف الحياتية ؛ أنماطها: اختيار مركب، مسائل مقالية ؛ الدرجة المقترحة 3 .

جدول المواصفات

- **الدرس 11.1:** 8 أسئلة أساسية + 7 متوسطة + 5 متقدمة = 20 سؤالاً (37 درجة مقترحة)
- **الدرس 11.2:** 8 أسئلة أساسية + 7 متوسطة + 5 متقدمة = 20 سؤالاً (37 درجة مقترحة)
- **الدرس 11.3:** 8 أسئلة أساسية + 7 متوسطة + 5 متقدمة = 20 سؤالاً (37 درجة مقترحة)
- **الدرس 11.4:** 8 أسئلة أساسية + 7 متوسطة + 5 متقدمة = 20 سؤالاً (37 درجة مقترحة)
- **المجموع:** 32 أساسية + 28 متوسطة + 20 متقدمة = 80 سؤالاً (148 درجة مقترحة) ؛ أي بنسب 40% و 35% و 25% على الترتيب.

الدرجات المقترحة يمكن للمعلم تعديلها بما يتوافق مع سياسة التقويم المعتمدة.

الوحدة الحادية عشر — الدرس 11.1

الدوال ومجالها

Functions and Their Domains

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس يكون الطالب قادراً على أن:

1. يكتب مجموعة الأعداد باستخدام رمز بناء المجموعة ورمز الفترات.
2. يحدد ما إذا كانت علاقة (أزواج مرتبة، معادلة، تمثيل بياني) تمثل دالة.
3. يوجد قيمة الدالة عند عدد أو عند تعبير جبري، بما في ذلك الدالة متعددة التعريف.
4. يوجد مجال الدالة جبرياً (كثيرات الحدود، الكسرية، الجذرية) ويكتبه بترميز الفترات.

أولاً: شرح مخرجات التعلم

المخرج 1: رمز بناء المجموعة ورمز الفترات

يصف رمز بناء المجموعة عناصر المجموعة بشرط، مثل $\{x|x \geq -2, x \in \mathbb{Z}\}$ ونقرأ: مجموعة كل الأعداد الصحيحة x التي تحقق $x \geq -2$. أما رمز الفترات فيكتب المجموعة بين قوسين: القوس المدور () لا يضم الطرف، والقوس المربع [] يضم الطرف.

رموز الفترات

- فترة مفتوحة: المتباينة $a < x < b$ تُكتب (a, b) ؛ والقوسان المدوران لا يضمّان الطرفين.
- فترة مغلقة: المتباينة $a \leq x \leq b$ تُكتب $[a, b]$ ؛ والقوسان المربعان يضمّان الطرفين.
- فترة نصف مفتوحة: المتباينة $a \leq x < b$ تُكتب $[a, b)$.
- فترة غير محدودة: $x > a$ تُكتب (a, ∞) ، و $x \leq a$ تُكتب $(-\infty, a]$ ؛ ويُكتب مع ∞ و $-\infty$ قوس مدور دائماً.
- اتحاد فترتين: $x < a$ أو $x \geq b$ تُكتب $(-\infty, a) \cup [b, \infty)$ ؛ والرمز $\cup$ يعني الاتحاد.

مثال: اكتب $x < -2$ أو $x \geq 7$ بترميز الفترات.

الحل: -2 غير مشمول فنستخدم () ، و 7 مشمول فنستخدم [] .

النتائج: $(-\infty, -2) \cup [7, \infty)$

المخرج 2: تعريف الدالة

الدالة

- الدالة علاقة تُقابل كل قيمة مدخلة x بقيمة مخرجة واحدة فقط y .
- في الأزواج المرتبة: لا يتكرر المدخل x مع مخرجات مختلفة (تكرار المخرج y مسموح).
- اختبار المستقيم الرأسي: إذا قطع أي مستقيم رأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.
- في المعادلات: أوجد y بدلالة x ؛ إذا ظهرت الإشارة $\pm$ (قيمتان لـ y) فالعلاقة ليست دالة.

مثال: هل المعادلة $x = y^2 + 3$ تعبّر عن y كدالة في x ؟

الحل: نحل لـ y : $y = \pm\sqrt{x-3}$.

لكل $x > 3$ قيمتان لـ y ، إذن ليست دالة.

المخرج 3: إيجاد قيمة الدالة (والدالة متعددة التعريف)

القاعدة

- لإيجاد $f(a)$ عوض كل x في القاعدة بالقيمة أو بالتعبير a بين قوسين.
- في الدالة متعددة التعريف اختر الفرع الذي تحقق قيمة x شرطه ثم عوض فيه.

مثال: إذا كانت $g(x) = x^2 + 3x - 1$ فأوجد $g(x+2)$.

$$\begin{aligned} \text{الحل: } g(x+2) &= (x+2)^2 + 3(x+2) - 1 \\ &= x^2 + 4x + 4 + 3x + 6 - 1 = x^2 + 7x + 9 \end{aligned}$$

مثال: إذا كانت الدالة $h(x)$ معرفة بالقاعدة: $x+5$ عندما $x < 0$ ، و x^2 عندما $0 \leq x < 4$ ، و $2x-1$ عندما $x \geq 4$ فأوجد $h(-3)$ و $h(4)$.

$$\begin{aligned} \text{الحل: } h(-3) &: \text{لأن } -3 < 0 \text{ نستخدم الفرع الأول: } -3 + 5 = 2. \\ h(4) &: \text{لأن } 4 \geq 4 \text{ نستخدم الفرع الثالث: } 2(4) - 1 = 7. \end{aligned}$$

المخرج 4: إيجاد مجال الدالة جبرياً

قيود مجال الدالة

- كثيرة الحدود: لا قيد على x ؛ مثل $f(x) = x^2 - 3x$ مجالها $(-\infty, \infty)$.
- الدالة الكسرية: المقام $\neq 0$ ؛ مثل $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ فيكون $x \neq 2$.
- الجذر التربيعي: ما تحت الجذر ≥ 0 ؛ مثل $f(x) = \sqrt{x-5}$ فيكون $x \geq 5$.
- جذر فهرسه فردي: لا قيد على x ؛ مثل $\sqrt[3]{2x-6}$ مجاله $(-\infty, \infty)$.
- جذر في المقام: ما تحت الجذر > 0 ؛ مثل $\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ فيكون $x > 5$.

مثال: أوجد مجال $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-12}$.

$$\begin{aligned} \text{الحل: نحلل المقام: } x^2 - x - 12 &= (x-4)(x+3) \text{ ونجعله } \neq 0 \\ x &\neq -3 \text{ و } x \neq 4 \text{ المجال: } (-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty) \end{aligned}$$

مثال: أوجد مجال $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

$$\begin{aligned} \text{الحل: نحل } x^2 - 9 &\geq 0 \text{ أي } (x-3)(x+3) \geq 0 \\ \text{المجال: } &(-\infty, -3] \cup [3, \infty) \end{aligned}$$

تنبيه: لا تختصر العوامل المشتركة قبل تحديد المجال؛ فمجال $\frac{x^2-9}{x-3}$ هو $x \neq 3$ حتى لو بسّطت إلى $x+3$.

ثانياً: أسئلة المراجعة (20 سؤالاً)

المستوى الأول: أساسي — تذكر وفهم (DOK 1)

الأسئلة من 1 إلى 8 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 1

1. أي مما يلي يمثل المجموعة $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ بطريقة بناء المجموعة؟

a) $\{x|x > -2, x \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x|x < -2, x \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x|x \geq -2, x \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x|x \leq -2, x \in \mathbb{Z}\}$

2. أي مما يلي يمثل المتباينة $-3 \leq x < 5$ بترميز الفترات؟

a) $[-3, 5)$

b) $(-3, 5]$

c) $[-3, 5]$

d) $(-3, 5)$

3. أي مما يلي يمثل المتباينتين $x \leq -1$ أو $x > 4$ بترميز الفترات؟

a) $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

b) $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

c) $[-1, 4)$

d) $(-\infty, -1] \cup (4, \infty)$

4. أي مجموعات الأزواج المرتبة الآتية تمثل دالة؟

a) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

b) $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

c) $\{(3, 0), (3, 5), (4, 1)\}$

d) $\{(2, 1), (2, -1), (3, 0)\}$

5. أي المعادلات الآتية لا تعبر عن y كدالة في x ؟

a) $y = 2x - 5$

b) $x = y^2 + 1$

c) $y = |x|$

d) $y = x^3$

6. إذا كانت $g(x) = 3x - 7$ ، فما قيمة $g(4)$ ؟

a) -5

b) 12

c) 19

d) 5

7. ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x - 5}$ ؟

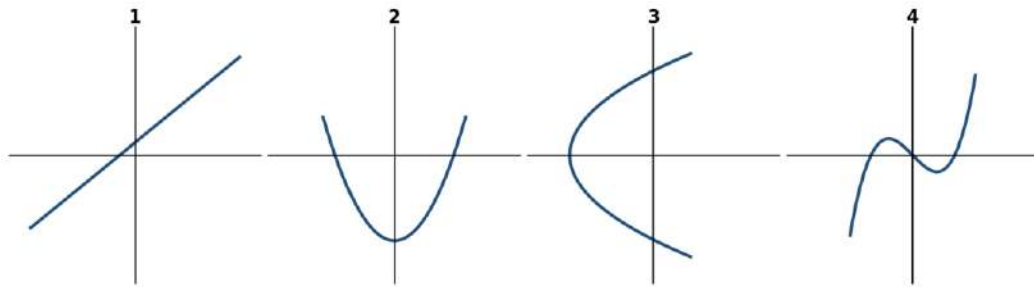
a) $[5, \infty)$

b) $(5, \infty)$

c) $(-\infty, \infty)$

d) $(-\infty, 5]$

8. أي الأشكال الآتية لا يمثل دالة وفق اختبار المستقيم الرأسي؟



b) الشكل (2)

d) الشكل (4)

a) الشكل (1)

c) الشكل (3)

المستوى الثاني: متوسط — تطبيق وتحليل (DOK 2)

الأسئلة من 9 إلى 15 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 2

9. إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ، فما قيمة $f(-2)$ ؟

- a) 3
c) 11

- b) -5
d) 7

10. إذا كانت $g(x) = 2x^2 + x$ ، فما ناتج $g(x+1)$ ؟

- a) $2x^2 + x + 1$
c) $2x^2 + 4x + 2$

- b) $2x^2 + 3x + 1$
d) $2x^2 + 5x + 3$

11. عرّفت الدالة f كما يلي. ما قيمة $f(-2) + f(3) + f(5)$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 10 - x & , \quad x > 3 \end{cases}$$

- a) 8
c) 14

- b) 11
d) 17

12. ما مجال الدالة $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$ ؟

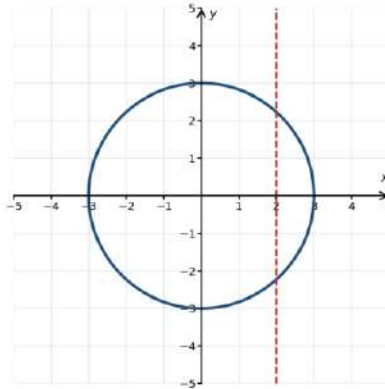
- a) $x \neq \pm 3$
c) $x \neq 3$

- b) $x \neq -4$
d) $(-3, 3)$

13. ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{7-2x}$ ؟

- a) $\left[\frac{7}{2}, \infty\right)$
c) $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

- b) $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$
d) $(-\infty, 7]$

14. يوضح الشكل التمثيل البياني للعلاقة $x^2 + y^2 = 9$. هل تمثل هذه العلاقة y دالة في x ؟ برّر إجابتك مستخدماً اختبار المستقيم الرأسلي.

15. أوجد مجال الدالة $h(x) = \frac{5}{x^2-4x}$ ، واكتبه بترميز الفترات.

المستوى الثالث: متقدم — استدلال وتبرير وحل مسائل مركبة (DOK 3)

الأسئلة من 16 إلى 20 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 3

16. ما مجال الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ ؟

- a) $[-3, \infty)$ b) $(-3, 2) \cup (2, \infty)$
c) $[-3, 2) \cup (2, \infty)$ d) $(-\infty, -3] \cup (2, \infty)$

17. ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ ؟

- a) $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ b) $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$
c) $(-2, 3)$ d) $[-2, 3]$

18. عرّفت الدالة f كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x + 4 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(أ) أوجد $f(-2)$ و $f(1)$.

(ب) أوجد قيم x التي تحقق $f(x) = 7$ ، مع توضيح سبب استبعاد أي حل غير مقبول.

19. إذا كانت $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ، فأوجد ناتج $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ مبسطاً ، حيث $h \neq 0$.

20. قال خالد: «مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها، لأن $f(x) = x + 3$ بعد الاختصار». هل توافق خالداً؟ برّر إجابتك.

الوحدة الحادية عشر — الدرس 11.2

تحليل التمثيلات البيانية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل

Analyzing Graphs of Functions: Domain, Range, Intercepts and Symmetry

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس يكون الطالب قادراً على أن:

1. يحدد مجال ومدى دالة من تمثيلها البياني ويكتبهما بترميز الفترات.
2. يوجد التقاطع مع المحور y وأصفار الدالة (التقاطعات مع المحور x) بيانياً وجبرياً.
3. يفحص تماثل التمثيل البياني حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
4. يحدد جبرياً إن كانت الدالة زوجية أو فردية أو لا هذا ولا ذاك.

أولاً: شرح مخرجات التعلم

المخرج 1: المجال والمدى من التمثيل البياني

كيف نقرأ الرسم؟

- المجال: القيم الأفقية x التي يغطيها المنحنى (نقرأ من اليسار إلى اليمين).
- المدى: القيم الرأسية y التي يصل إليها المنحنى (نقرأ من الأسفل إلى الأعلى).
- الدائرة المغلقة • تعني أن النقطة مشمولة فنستخدم [أو] ، والدائرة المفتوحة ○ تعني غير مشمولة فنستخدم (أو) .
- السهم في طرف المنحنى يعني أنه يمتد إلى ∞ أو $-\infty$.

مثال: منحنى يبدأ من نقطة مغلقة $(-3, 1)$ وينتهي عند نقطة مفتوحة $(4, 6)$ ويرتفع باستمرار بينهما. أوجد المجال والمدى.

الحل: المجال (قيم x من -3 إلى 4): $[-3, 4)$

المدى (قيم y من 1 إلى 6): $[1, 6)$

المخرج 2: التقاطعات مع المحورين وأصفار الدالة

القاعدة

- التقاطع مع المحور y : نضع $x = 0$ فنحصل على النقطة $(0, f(0))$.
- أصفار الدالة (التقاطعات مع المحور x): نحل المعادلة $f(x) = 0$.

مثال: أوجد التقاطع مع المحور y وأصفار الدالة $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

الحل: $f(0) = -8$ ، فالتقاطع مع المحور y هو $(0, -8)$.

$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4$ أو $x = -2$.

المخرج 3: تماثل التمثيل البياني

اختبارات التماثل

- حول المحور x : استبدل y بـ $-y$ ، فإذا عادت المعادلة نفسها كانت النقطتان (x, y) و $(x, -y)$ على التمثيل.
- حول المحور y : استبدل x بـ $-x$ ، فإذا عادت المعادلة نفسها كانت النقطتان (x, y) و $(-x, y)$ على التمثيل.
- حول نقطة الأصل: استبدل x بـ $-x$ و y بـ $-y$ معاً ، فإذا عادت المعادلة نفسها كانت النقطتان (x, y) و $(-x, -y)$ على التمثيل.

مثال: اختبر تماثل $y = x^3 - x$ حول نقطة الأصل.

الحل: نستبدل $-x$ بـ y و $-y$ بـ x : $-y = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$: $-y \rightarrow y$ و $-x \rightarrow x$ نستبدل
نضرب في -1 : $y = x^3 - x$ وهي المعادلة الأصلية $\Rightarrow$ متماثلة حول نقطة الأصل.

المخرج 4: الدوال الزوجية والفردية

التعريف

- دالة زوجية: $f(-x) = f(x)$ لكل x في المجال، وتمثيلها متماثل حول المحور y .
- دالة فردية: $f(-x) = -f(x)$ لكل x في المجال، وتمثيلها متماثل حول نقطة الأصل.
- إن لم يتحقق أي من الشرطين فالدالة لا زوجية ولا فردية.
- اختصار مفيد: كثيرة حدود جميع قواها زوجية (والثابت يُعد قوة زوجية) دالة زوجية، وجميع قواها فردية دالة فردية.

مثال: صنف الدوال: $h(x) = x^2 + x$ ، $g(x) = x^3 + 2x$ ، $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

الحل: $f(-x) = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$ زوجية.

$$\Rightarrow g(-x) = -x^3 - 2x = -g(x) \text{ فردية.}$$

$h(-x) = x^2 - x$ لا تساوي $h(x)$ ولا $-h(x) \Rightarrow$ لا زوجية ولا فردية.

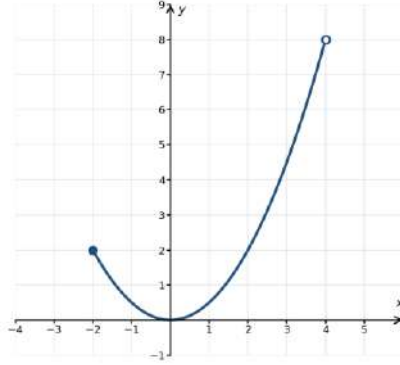
تنبيه: التمثيل البياني لدالة (غير الدالة الصفرية) لا يمكن أن يكون متماثلاً حول المحور x ، وإلا لقطعه مستقيم رأسي في نقطتين.

ثانياً: أسئلة المراجعة (20 سؤالاً)

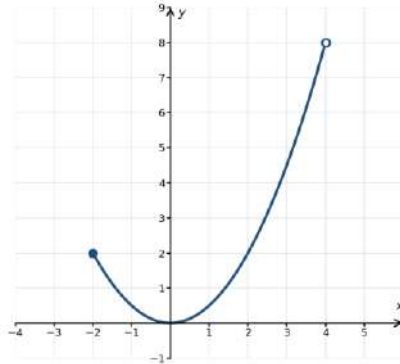
المستوى الأول: أساسي — تذكّر وفهم (DOK 1)

الأسئلة من 1 إلى 8 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 1

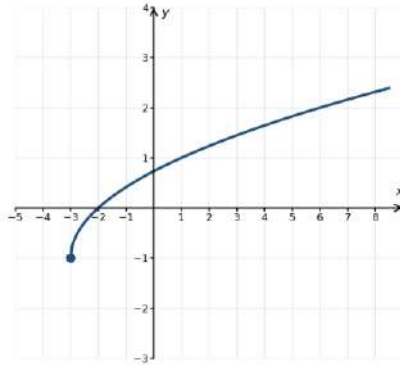
1. من التمثيل البياني الموضح، ما مجال الدالة؟

a) $(-2, 4)$ b) $[-2, 4]$ c) $(-2, 4]$ d) $[-2, 4)$

2. من التمثيل البياني نفسه، ما مدى الدالة؟

a) $[0, 8]$ b) $[0, 8)$ c) $(0, 8)$ d) $[2, 8)$

3. من التمثيل البياني الموضح، ما مجال الدالة وما مداها؟

a) المجال $(-3, \infty)$ ، المدى $(-1, \infty)$ b) المجال $[-3, \infty)$ ، المدى $[-1, \infty)$ c) المجال $[-1, \infty)$ ، المدى $[-3, \infty)$ d) المجال $(-\infty, \infty)$ ، المدى $[-1, \infty)$

4. ما نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ مع المحور y ؟

- a)** $(7, 0)$ **b)** $(0, 2)$
c) $(0, -5)$ **d)** $(0, 7)$

5. ما أصفار الدالة $f(x) = x^2 - 16$ ؟

- a) $x = \pm 4$** **b) $x = 4$**
c) $x = 16$ **d) $x = -16$**

6. تمثيل دالة متماثل حول المحور y ، وتنتمي إليه النقطة (5, 3) . أي النقاط الآتية تنتمي إليه أيضاً؟

- a)** $(-3, -5)$ **b)** $(3, -5)$
c) $(-3, 5)$ **d)** $(5, 3)$

7. أي الدوال الآتية زوجية؟

- a)** $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = x + 1$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = x^4 - 3x^2$

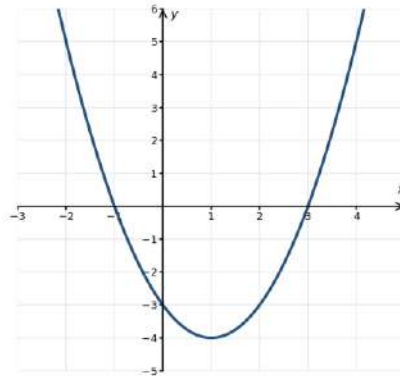
8. صح أم خطأ: «التمثيل البياني لكل دالة فردية متماثل حول المحور y ». صحّ العبارة إن كانت خاطئة.

..... التصحيح: خطأ صح

المستوى الثاني: متوسط — تطبيق وتحليل (DOK 2)

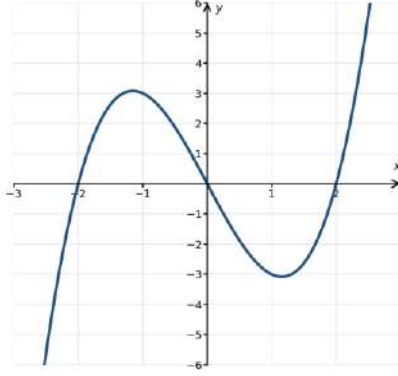
الأسئلة من 9 إلى 15 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 2

9. من التمثيل البياني للدالة f الموضح، ما نقطة التقاطع مع المحور y وما أصفار الدالة؟



- a) التقاطع $(0, 3)$ ، الأصفر $x = 3$ و $x = -1$**
b) التقاطع $(0, -3)$ ، الأصفر $x = 3$ و $x = -1$
c) التقاطع $(0, -3)$ ، الأصفر $x = -3$ و $x = 1$
d) التقاطع $(0, -1)$ ، الأصفر $x = 3$ و $x = -3$

10. أي أنواع التماثل الآتية ينطبق على التمثيل البياني الموضح؟



b) المحور y

a) نقطة الأصل

d) جميع ما سبق

c) المحور x

11. أي أنواع التماثل الآتية تنطبق على العلاقة $x = y^2 + 1$ ؟

b) حول نقطة الأصل

a) حول المحور y

d) لا شيء مما سبق

c) حول المحور x

12. ما نوع الدالة $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1$ من حيث الزوجية والفردية؟

b) زوجية وفردية معاً

a) فردية

d) لا زوجية ولا فردية

c) زوجية

13. ما نوع الدالة $h(x) = x^2 + x$ من حيث الزوجية والفردية؟

b) فردية

a) لا زوجية ولا فردية

d) متماثلة حول المحور y

c) زوجية

14. أوجد جبرياً نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 - 5x + 6$ مع المحور y ، وأصفار الدالة.

15. اختبر جبرياً تماثل التمثيل البياني للعلاقة $x^2 + y^2 = 25$ حول كل من المحور x والمحور y ونقطة الأصل.

المستوى الثالث: متقدم — استدلال وتبرير وحل مسائل مركبة (DOK 3)

الأسئلة من 16 إلى 20 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 3

16. إذا كانت f دالة فردية وكانت $f(2) = 5$ ، وكانت g دالة زوجية وكانت $g(2) = -3$ ، فما قيمة $f(-2) + g(-2)$ ؟

a) 2

b) -2

c) 8

d) -8

17. إذا كانت f دالة زوجية وكانت g دالة فردية، فما نوع الدالة $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ؟

- (a) زوجية
(b) فردية
(c) لا زوجية ولا فردية
(d) لا يمكن تحديد ذلك

18. لتكن $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$. حدّد جبرياً هل الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم اذكر نوع التماثل في تمثيلها البياني.

19. ادرس جبرياً تماثل التمثيل البياني للعلاقة $x \cdot y^2 = 4$ حول كل من المحور x والمحور y ونقطة الأصل، مع إظهار خطوات الاختبار.

20. الدالة f فردية، وقيمها معلومة عند بعض النقاط: $f(1) = 2$ ، $f(2) = -1$ ، $f(3) = 4$.

(أ) أكمل: $f(-1) = \dots$ ، $f(-2) = \dots$ ، $f(-3) = \dots$.

(ب) ما قيمة $f(0)$ إن كانت الدالة معرفة عند 0 ؟ برّر إجابتك.

الوحدة الحادية عشر — الدرس 11.3

الاتصال والأصفار التقريبية والسلوك الطرفي

Continuity, Approximating Zeros and End Behavior

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس يكون الطالب قادراً على أن:

1. يحدد نقاط عدم الاتصال ويصنف نوعها: قابل للإزالة، قفزي، لا نهائي.
2. يقرب أصفار الدالة بتحديد فترات تتغير فيها إشارة قيم الدالة (مبرهنة القيمة المتوسطة).
3. يصف السلوك الطرفي لدالة جبرياً وبيانياً باستخدام رمز النهايات.
4. (إثرائي) يقرأ النهايات من جهة اليمين واليسار وقيمة الدالة من التمثيل البياني.

أولاً: شرح مخرجات التعلم

المخرج 1: الاتصال وأنواع عدم الاتصال

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ إذا تحقق: (1) $f(c)$ معرفة، (2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة، (3) النهاية تساوي $f(c)$. وإذا اختلف شرط منها كانت الدالة غير متصلة عند c .

أنواع عدم الاتصال

- قابل للإزالة (فجوة): النهاية موجودة لكن $f(c)$ غير معرفة أو تختلف عن النهاية ؛ مثل $\frac{x^2-16}{x-4}$ عند $x = 4$.
- قفزي: النهايتان من اليمين ومن اليسار موجودتان لكنهما مختلفتان ؛ كما في دالة متعددة التعريف تفقر عند c .
- لا نهائي: قيم الدالة تؤول إلى ∞ أو $-\infty$ قرب c (خط تقارب رأسي) ؛ مثل $\frac{3}{x+2}$ عند $x = -2$.

مثال: صنف عدم الاتصال للدالة $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ عند $x = 4$.

الحل: نحلل: $f(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$ عندما $x \neq 4$.

العامل $(x-4)$ اختصر $\Rightarrow$ قابل للإزالة: فجوة عند النقطة $(4, 8)$.

نصيحة: حلل البسط والمقام؛ إن اختصر العامل فالانفصال قابل للإزالة، وإن بقي في المقام فالانفصال لا نهائي.

المخرج 2: الأصفار التقريبية (تغير الإشارة)

مبرهنة القيمة المتوسطة

- إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ وكانت $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين في الإشارة، فللدالة صفر حقيقي واحد على الأقل في (a, b) .

مثال: بين أن للدالة $f(x) = x^3 + x - 3$ صفران بين عددين صحيحين متتاليين.

الحل: $f(1) = 1 + 1 - 3 = -1$ (سالبة) و $f(2) = 8 + 2 - 3 = 7$ (موجبة).

تغيرت الإشارة $\Rightarrow$ يوجد صفر بين 1 و 2.

المخرج 3: السلوك الطرفي

السلوك الطرفي يصف ما يحدث لقيم $f(x)$ عندما x تصبح كبيرة جداً موجبة ($x \rightarrow \infty$) أو سالبة ($x \rightarrow -\infty$) ، ويُكتب بالنهايات $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

السلوك الطرفي لكثيرة الحدود

- درجة زوجية ومعامل رئيس موجب: $f(x) \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$ وعندما $x \rightarrow \infty$.
- درجة زوجية ومعامل رئيس سالب: $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$ وعندما $x \rightarrow \infty$.
- درجة فردية ومعامل رئيس موجب: $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$ ، و $f(x) \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$.
- درجة فردية ومعامل رئيس سالب: $f(x) \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$ ، و $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow \infty$.

مثال: صف السلوك الطرفي للدالة $f(x) = -2x^4 + x^2$.

الحل: الدرجة 4 (زوجية) والمعامل الرئيس -2 (سالب).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

إذا اقترب المنحنى من مستقيم أفقي $y = c$ عند طرفيه فالنهاية تساوي c ، ويسمى $y = c$ خط تقارب أفقي.

المخرج 4 (إثرائي): النهايات من اليمين واليسار

الرمز $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ يعني الاقتراب من c من جهة اليسار، و $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ من جهة اليمين. تكون $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة فقط إذا تساوت النهايتان. ولاحظ أن قيمة $f(c)$ قد تختلف عن النهاية.

ثانياً: أسئلة المراجعة (20 سؤالاً)

المستوى الأول: أساسي — تذكر وفهم (DOK 1)

الأسئلة من 1 إلى 8 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 1

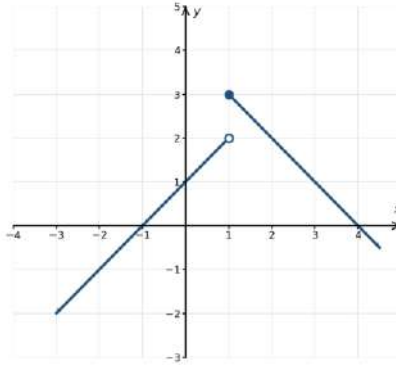
1. عند أي قيمة لـ x تكون الدالة $h(x) = \frac{x^2-25}{x+5}$ غير متصلة؟

a) $x = 5$

b) $x = -5$

c) $x = \pm 5$

d) $x = 0$

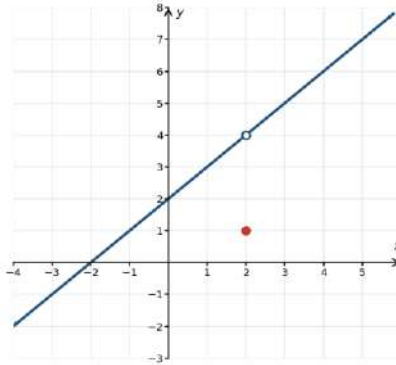
2. ما نوع عدم الاتصال عند $x = 1$ في التمثيل البياني الموضح؟

b) لا نهائي

d) قفزي

a) قابل للإزالة

c) لا يوجد عدم اتصال

3. ما نوع عدم الاتصال عند $x = 2$ في التمثيل البياني الموضح؟

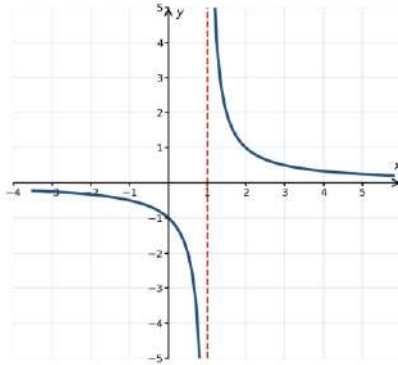
b) لا نهائي

d) تنذببي

a) قابل للإزالة

c) قفزي

4. ما نوع عدم الاتصال عند $x = 1$ في التمثيل البياني الموضح؟



- a) قابل للإزالة
b) قفزي
c) لا نهائي
d) الدالة متصلة عند $x = 1$

5. ما السلوك الطرفي للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ؟

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

6. ما السلوك الطرفي للدالة $f(x) = 5x^3 - x$ ؟

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

7. دالة متصلة f فيها $f(1) = -3$ و $f(2) = 5$. في أي فترة يوجد للدالة صفر حقيقي واحد على الأقل؟

- a) (1, 2)
b) (2, 3)
c) (0, 1)
d) لا يمكن تحديد ذلك

8. صح أم خطأ: «تكون الدالة f متصلة عند $x = a$ إذا كانت $f(a)$ معرفة، ووجدت النهاية عند a ، وكانت تساوي $f(a)$ » .
صحح العبارة إن كانت خاطئة.

صح ☐ خطأ ☐ التصحيح:

المستوى الثاني: متوسط — تطبيق وتحليل (DOK 2)

الأسئلة من 9 إلى 15 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 2

9. ما نوع عدم الاتصال عند $x = 2$ للدالة f المعرفة أدناه؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

- a) قابل للإزالة
b) قفزي
c) لا نهائي
d) الدالة متصلة عند $x = 2$

10. ما نوع عدم الاتصال للدالة $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ عند $x = 3$ ؟

- a) لا نهائي
b) قفزي
c) قابل للإزالة
d) تذبذبي

11. ما نوع عدم الاتصال للدالة $f(x) = \frac{7}{x+1}$ عند $x = -1$ ؟

- a) لا نهائي
b) قابل للإزالة
c) قفزي
d) لا يوجد

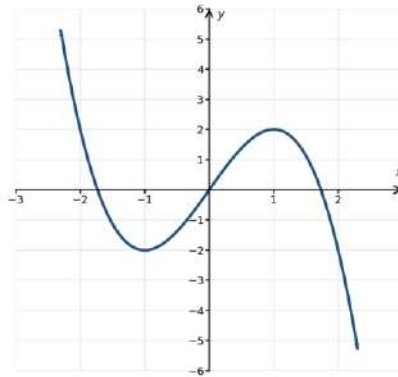
12. بين أي عددين صحيحين متتاليين يقع الصفر الحقيقي للدالة $f(x) = x^3 - 2x - 5$ في الفترة $[0, 4]$ ؟

- a) 0 و 1
b) 1 و 2
c) 3 و 4
d) 2 و 3

13. ما السلوك الطرفي للدالة $f(x) = -x^4 + 3x^2$ ؟

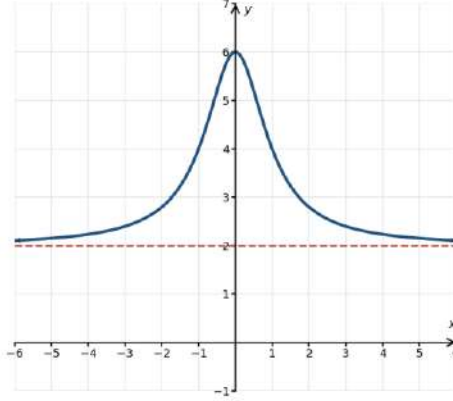
- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

14. ما السلوك الطرفي للدالة الممثلة بيانياً؟



- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

15. من التمثيل البياني الموضح، اكتب السلوك الطرفي للدالة باستخدام رمز النهايات، ثم اذكر معادلة خط التقارب الأفقي.



المستوى الثالث: متقدم — استدلال وتبرير وحل مسائل مركبة (DOK 3)

الأسئلة من 16 إلى 20 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 3

16. ما قيمة k التي تجعل الدالة f المعرفة أدناه متصلة عند $x = 2$ ؟

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) 0

b) 2

c) 3

d) 1

17. أي العبارات الآتية صحيحة بشأن عدم اتصال الدالة $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$ ؟

a) عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 3$ ولا نهائي عند $x = -3$

b) عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 3$ وقابل للإزالة عند $x = -3$

c) عدم اتصال لا نهائي عند $x = 3$ وقابل للإزالة عند $x = -3$

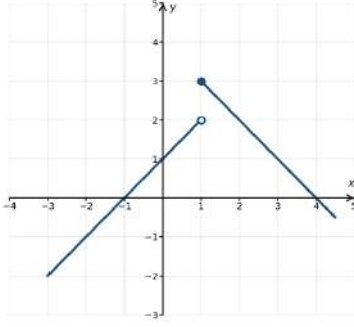
d) عدم اتصال لا نهائي عند $x = 3$ و $x = -3$

18. لتكن $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(أ) أكمل: $f(-2) = \dots\dots$ ، $f(-1) = \dots\dots$ ، $f(0) = \dots\dots$ ، $f(1) = \dots\dots$ ، $f(2) = \dots\dots$.

(ب) حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي ينحصر بينها كل صفر حقيقي.

(ج) كم صفرًا حقيقيًا للدالة؟ برّر إجابتك.



19. استعن بالتمثيل البياني الموضح للدالة f لإيجاد ما يلي:

(أ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(د) $f(1)$

(هـ) نوع عدم الاتصال عند $x = 1$.

20. لتكن $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$.

(أ) أوجد مجال f .

(ب) بسّط f وأوجد $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

(ج) ما نوع عدم الاتصال عند $x = 4$ ؟

الوحدة الحادية عشر — الدرس 11.4

التزايد والتناقص والقيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Increasing/Decreasing Behavior, Extrema and Average Rate of Change

مخرجات التعلم

بعد دراسة هذا الدرس يكون الطالب قادراً على أن:

1. يحدد فترات التزايد والتناقص والثبات لدالة من تمثيلها البياني.
2. يقدّر القيم القصوى المحلية والمطلقة (العظمى والصغرى) ويحدد مواضعها.
3. يحسب متوسط معدل التغير لدالة في فترة جبرياً وبيانياً.
4. يفسر متوسط معدل التغير في مواقف حياتية (السرعة المتوسطة وغيرها).

أولاً: شرح مخرجات التعلم

المخرج 1: التزايد والتناقص والثبات

نقرأ من اليسار إلى اليمين

- متزايدة على فترة: يرتفع المنحنى كلما زادت x (تزداد قيم y).
- متناقصة على فترة: ينخفض المنحنى كلما زادت x .
- ثابتة على فترة: يكون المنحنى أفقياً.
- نكتب الفترات بدلالة قيم x وبأقواس مفتوحة، مثل $(-\infty, -1)$.

مثال: دالة يرتفع منحناها حتى $x = 3$ ثم ينخفض. حدّد فترتي التزايد والتناقص.

الحل: متزايدة على $(-\infty, 3)$.

متناقصة على $(3, \infty)$.

المخرج 2: القيم القصوى المحلية والمطلقة

المصطلحات

- قيمة عظمى محلية: أكبر قيمة للدالة في جوار النقطة (قمة في المنحنى).
- قيمة صغرى محلية: أصغر قيمة للدالة في جوار النقطة (قاع في المنحنى).
- قيمة عظمى مطلقة: أكبر قيمة للدالة على مجالها كله.
- قيمة صغرى مطلقة: أصغر قيمة للدالة على مجالها كله.

مثال: المنحنى $y = -(x - 1)^2 + 4$ (قطع مكافئ مفتوح للأسفل). ما قيمته القصوى؟

الحل: الرأس $(1, 4) \Rightarrow$ قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 وتحدث عند $x = 1$.

لا توجد قيمة صغرى لأن المنحنى ينخفض إلى $-\infty$.

القيمة القصوى هي قيمة y ، أما موضعها فهو قيمة x التي تحدث عندها.

المخرج 3: متوسط معدل التغير

الصيغة

- متوسط معدل تغير الدالة f في الفترة $[a, b]$ هو $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ، وهو ميل المستقيم القاطع الواصل بين النقطتين $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$.

مثال: أوجد متوسط معدل تغير $f(x) = x^2 + 2x$ في الفترة $[1, 4]$.

الحل: $f(1) = 1 + 2 = 3$ و $f(4) = 16 + 8 = 24$

$$\text{المتوسط} = \frac{24-3}{4-1} = \frac{21}{3} = 7$$

المخرج 4: التفسير الحياتي

إذا مثلت الدالة المسافة d بدلالة الزمن t فإن متوسط معدل التغير هو السرعة المتوسطة (المسافة ÷ الزمن). وإذا كانت الدالة سعراً أو عدداً فهو متوسط التغير في وحدة الزمن، ونكتب الوحدة دائماً (كم/ساعة، م/ث، ...).

مثال: قطعت سيارة 60 كم بعد ساعة واحدة و 180 كم بعد 3 ساعات. ما سرعتها المتوسطة في الفترة $[1, 3]$ ؟

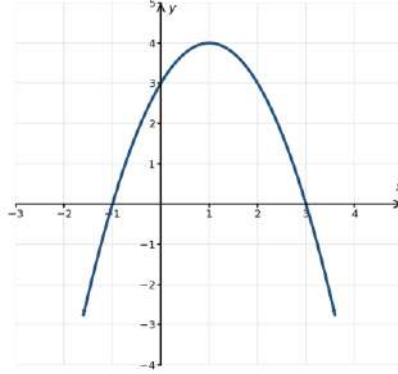
$$\text{الحل: } 60 = \frac{180-60}{3-1} = \frac{120}{2} \text{ كم/ساعة.}$$

ثانياً: أسئلة المراجعة (20 سؤالاً)

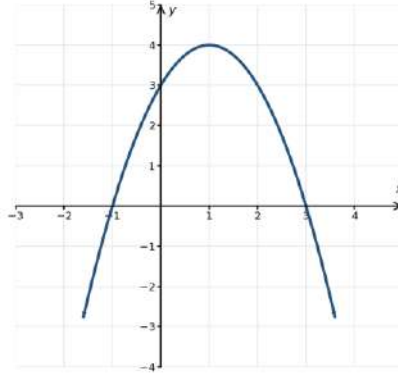
المستوى الأول: أساسي — تذكّر وفهم (DOK 1)

الأسئلة من 1 إلى 8 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 1

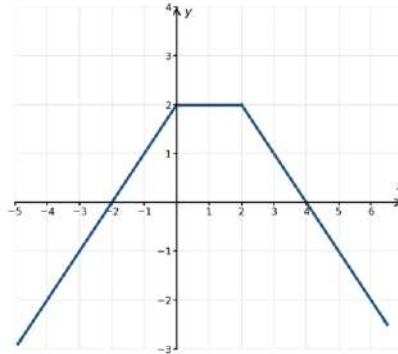
1. ما الفترة التي تكون فيها الدالة الممثلة بيانياً متزايدة؟

a) $(1, \infty)$ b) $(-\infty, 4)$ c) $(-\infty, 1)$ d) $(-\infty, \infty)$

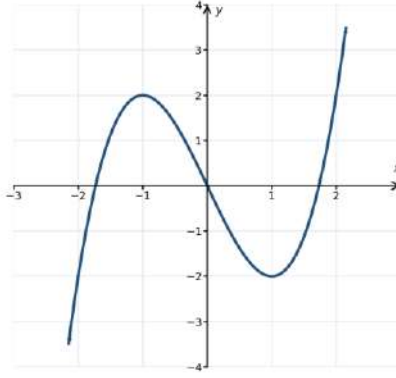
2. ما الفترة التي تكون فيها الدالة نفسها متناقصة؟

a) $(-\infty, 1)$ b) $(4, \infty)$ c) $(0, 1)$ d) $(1, \infty)$

3. في أي فترة تكون الدالة الممثلة بيانياً ثابتة؟

a) $(-\infty, 0)$ b) $(0, 2)$ c) $(-2, 2)$ d) $(2, \infty)$

4. أي العبارات الآتية صحيحة للدالة الممثلة بيانياً؟



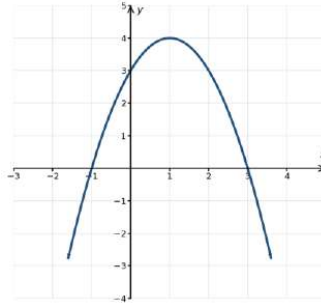
a) للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -1$

b) للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = -1$

c) للدالة قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$

d) للدالة قيمة صغرى مطلقة عند $x = 1$

5. ما القيمة العظمى المطلقة للدالة الممثلة بيانياً، وعند أي قيمة لـ x تحدث؟



a) 1 وتحدث عند $x = 4$

b) 4 وتحدث عند $x = -1$

c) 4 وتحدث عند $x = 1$

d) لا توجد قيمة عظمى مطلقة

6. ما صيغة متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[a, b]$ ؟

a) $\frac{f(b)+f(a)}{b+a}$

b) $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$

c) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

d) $f(b) - f(a)$

7. ما متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = 2x + 3$ في الفترة $[1, 4]$ ؟

a) 2

b) 3

c) 11

d) 5

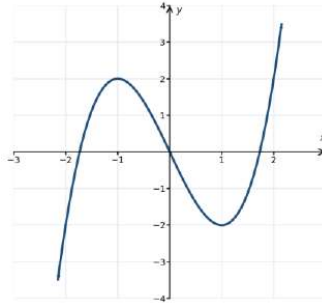
8. صح أم خطأ: «متوسط معدل التغير لدالة متزايدة على فترة يكون سالباً». صحَّح العبارة إن كانت خاطئة.

صح ☐ خطأ ☐ التصحيح:

المستوى الثاني: متوسط — تطبيق وتحليل (DOK 2)

الأسئلة من 9 إلى 15 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 2

9. ما الفترة التي تكون فيها الدالة الممثلة بيانياً متناقصة؟



a) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

b) $(-2, 2)$

c) $(-\infty, \infty)$

d) $(-1, 1)$

10. ما متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^2 - 4x$ في الفترة $[1, 5]$ ؟

a) 4

b) 2

c) 1

d) 8

11. ما متوسط معدل التغير للدالة $g(x) = \frac{1}{x}$ في الفترة $[1, 4]$ ؟

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $-\frac{3}{4}$

d) $-\frac{1}{3}$

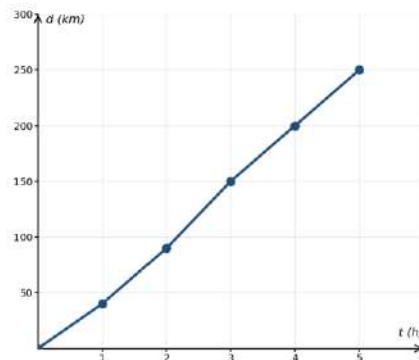
12. ما متوسط معدل التغير للدالة $g(x) = \sqrt{x-1}$ في الفترة $[2, 10]$ ؟

a) $\frac{1}{2}$

b) 2

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{4}$

13. يوضح الشكل المسافة الإجمالية d (بالكيلومتر) التي قطعها سيارة بعد t ساعة. ما السرعة المتوسطة للسيارة في الفترة $[2, 4]$ ؟

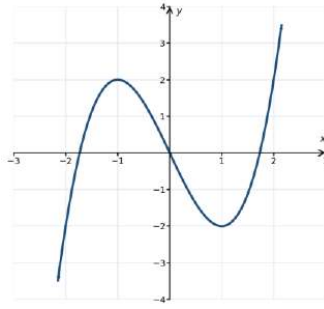
a) 55 km/h

b) 110 km/h

c) 50 km/h

d) 100 km/h

14. من التمثيل البياني الموضح للدالة $f(x) = x^3 - 3x$ ، أوجد القيم القصوى المحلية مع إحداثيات نقاطها، ثم بيّن هل توجد قيم قصوى مطلقة، مع التفسير.



15. أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^2 - 3x + 1$ في الفترة $[-1, 2]$.

المستوى الثالث: متقدم — استدلال وتبرير وحل مسائل مركبة (DOK 3)

الأسئلة من 16 إلى 20 | الدرجة المقترحة لكل سؤال: 3

16. يُعطى عدد زوار متحف (بآلاف الزوار) بعد t شهراً من افتتاحه بالعلاقة $P(t) = 200 + 30t - t^2$. ما متوسط معدل تغير عدد الزوار بين الشهر 2 والشهر 6؟

b) 22 - ألف زائر/شهر

a) 88 ألف زائر/شهر

d) 344 ألف زائر/شهر

c) 22 ألف زائر/شهر

17. إذا كان متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^2 + kx$ في الفترة $[1, 3]$ يساوي 6 ، فما قيمة k ؟

a) 1

b) 4

c) 3

d) 2

18. قال سالم: «الدالة $f(x) = x^2$ متزايدة على $(-\infty, \infty)$ ، لأن متوسط معدل تغيرها في الفترة $[1, 3]$ موجب». هل توافق سالمًا؟ احسب متوسط معدل التغير في فترة أخرى لتبرير إجابتك.

19. لتكن $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

- (أ) أوجد القيمة القصوى المطلقة ونوعها وموضعها.
 (ب) حدد فترتي التزايد والتناقص.
 (ج) أوجد متوسط معدل التغير في $[0, 4]$ وفسر النتيجة.

20. قُذفت كرة إلى الأعلى فكان ارتفاعها (بالمتر) بعد t ثانية $h(t) = -5t^2 + 20t$.

- (أ) أوجد السرعة المتوسطة في الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$.
 (ب) فسّر إشارة كل نتيجة.
 (ج) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع وما مقداره؟

مفتاح الإجابات ونماذج الحل

الدرس 11.1: الدوال ومجالها

1. الإجابة: c المجموعة تبدأ من -2 وتشمله وتمتد إلى الأعداد الأكبر، أي $x \geq -2$.
2. الإجابة: a -3 مشمول فنستخدم [، و 5 غير مشمول فنستخدم) .
3. الإجابة: d -1 مشمول [، و 4 غير مشمول) : $(-\infty, -1] \cup (4, \infty)$.
4. الإجابة: b الدالة لا يتكرر فيها المدخل x مع مخرجات مختلفة؛ في المجموعة الصحيحة كل x يظهر مرة واحدة (تكرار المخرج 1 مسموح).
5. الإجابة: b بحل المعادلة الثانية: $y = \pm\sqrt{x-1}$ أي قيمتان لـ y لكل $x > 1$.
6. الإجابة: d $g(4) = 3(4) - 7 = 5$.
7. الإجابة: a يجب أن يكون $x - 5 \geq 0$ أي $x \geq 5$.
8. الإجابة: c الشكل (3): يوجد مستقيم رأسي يقطعه في نقطتين.
9. الإجابة: c $f(-2) = 4 + 4 + 3 = 11$.
10. الإجابة: d $g(x+1) = 2(x+1)^2 + (x+1) = 2x^2 + 4x + 2 + x + 1 = 2x^2 + 5x + 3$.
11. الإجابة: b $f(5) = 5$ ، $f(3) = 9$ ، $f(-2) = -3$ ؛ المجموع = 11.
12. الإجابة: a $x^2 - 9 = 0$ عند $x = \pm 3$ فنستثنيهما من المجال.
13. الإجابة: c $7 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$ (تنعكس المتباينة عند القسمة على عدد سالب).
14. نموذج الإجابة: لا؛ المستقيم الرأسي $x = 2$ يقطع الدائرة في نقطتين $(2, \sqrt{5})$ و $(2, -\sqrt{5})$ أي أن للمدخل 2 مخرجين مختلفين.
15. نموذج الإجابة: $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$ عند $x = 4$ و $x = 0$ ؛ المجال: $(-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$.
16. الإجابة: c شرط الجذر: $x \geq -3$ ؛ شرط المقام: $x \neq 2$ ؛ نأخذ الشرطين معاً.
17. الإجابة: a $(x-3)(x+2) \geq 0$ ؛ بدراسة الإشارة: $x \leq -2$ أو $x \geq 3$.
18. نموذج الإجابة:
 - (أ) $f(1) = 1 - 2 + 4 = 3$ ، $f(-2) = 2(-2) + 3 = -1$
 - (ب) الفرع الأول: $2x + 3 = 7 \Rightarrow x = 2$ مرفوض لأنه لا يحقق $x < 1$.
 - الفرع الثاني: $(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ ؛ $x = -1$ مرفوض لأنه لا يحقق $x \geq 1$ ؛ إذن $x = 3$.
19. نموذج الإجابة:

$$g(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 1$$

$$g(x+h) - g(x) = 2xh + h^2 - 3h$$
 بالقسمة على h : $2x + h - 3$.
20. نموذج الإجابة: لا؛ الدالة غير معرّفة عند $x = 3$ (المقام صفر) فالمجال $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. الاختصار يعطي $x + 3$ فقط عندما $x \neq 3$ ، وتمثيلها مستقيم فيه فجوة عند النقطة (3, 6).

الدرس 11.2: تحليل التمثيلات البيانية: المجال والمدى والتقاطعات والتماثل

1. الإجابة: d دائرة مغلقة عند $x = -2$ ودائرة مفتوحة عند $x = 4 \Rightarrow [-2, 4)$.
2. الإجابة: b أدنى قيمة $y = 0$ (عند $x = 0$) مشمولة، وأعلى قيمة 8 غير مشمولة (دائرة مفتوحة).
3. الإجابة: b تبدأ الدالة من النقطة المغلقة $(-3, -1)$ وتمتد إلى اليمين وإلى الأعلى.
4. الإجابة: d $f(0) = 7$ ، فالنقطة (0, 7).
5. الإجابة: a $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$.
6. الإجابة: c التماثل حول المحور y يحوّل (x, y) إلى $(-x, y)$.
7. الإجابة: d $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$.
8. الإجابة: خطأ خطأ؛ التمثيل البياني للدالة الفردية تماثل حول نقطة الأصل، أما الزوجية فهي المتماثلة حول المحور y .

9. الإجابة: **b** المنحنى يقطع المحور y عند -3 ويقطع المحور x عند -1 و 3 .
10. الإجابة: **a** إذا دُور المنحنى 180° حول نقطة الأصل انطبق على نفسه؛ وهو ليس متماثلاً حول x ولا حول y .
11. الإجابة: **c** باستبدال y بـ $-y$: $1 = y^2 + 1 = (-y)^2 + 1 = x$ تبقى المعادلة نفسها $\Rightarrow$ متماثلة حول المحور x .
12. الإجابة: **c** جميع القوى زوجية، و $f(-x) = f(x)$.
13. الإجابة: **a** $h(-x) = x^2 - x$ ؛ لا تساوي $h(x)$ ولا $-h(x) = -x^2 - x$.
14. نموذج الإجابة: $6 = f(0)$ فالتقاطع $(0, 6)$. $0 = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x = 2$ أو $x = 3$.
15. نموذج الإجابة: باستبدال y بـ $-y$: $25 = x^2 + y^2$ (حول x). باستبدال x بـ $-x$: $\checkmark$ (حول y). باستبدالهما معاً : $\checkmark$ (حول الأصل). إذن هي متماثلة حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل.
16. الإجابة: **d** $-5 = f(2) = -f(-2) = -3 = g(2) = g(-2)$ ؛ المجموع -8 .
17. الإجابة: **b** $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -h(x) \Rightarrow$ فردية.
18. نموذج الإجابة:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

إذن الدالة فردية، وتمثيلها متماثل حول نقطة الأصل.

19. نموذج الإجابة:
- حول x : $4 = xy^2 = x(-y)^2 = \checkmark$
- حول y : $4 \neq -4 = -xy^2 = (-x)y^2 = \times$
- حول الأصل : $4 \neq -4 = -xy^2 = (-x)(-y)^2 = \times$
- إذن متماثلة حول المحور x فقط.
20. نموذج الإجابة:
- (أ) $-2 = f(-1) = 1 = f(-2) = -4 = f(-3)$.
- (ب) $0 = f(0) \Rightarrow 0 = 2f(0) = -f(0)$.

الدرس 11.3: الاتصال والأصفار التقريبية والسلوك الطرفي

1. الإجابة: **b** المقام يساوي صفراً عند $x = -5$.
2. الإجابة: **d** النهاية من اليسار 2 ومن اليمين 3 (مختلفتان) $\Rightarrow$ قفزي.
3. الإجابة: **a** فجوة عند $(2, 4)$: النهاية موجودة (4) لكن $f(2) = 1$ تختلف عنها.
4. الإجابة: **c** المنحنى يقترب من خط تقارب رأسي عند $x = 1$ فتؤول القيم إلى ∞ و $-\infty$.
5. الإجابة: **d** الدرجة زوجية والمعامل الرئيس موجب $\Rightarrow \infty$ عند الطرفين.
6. الإجابة: **b** الدرجة فردية والمعامل الرئيس موجب $\Rightarrow -\infty$ عند اليسار و ∞ عند اليمين.
7. الإجابة: **a** تغيرت الإشارة من سالبة إلى موجبة بين 1 و 2.
8. الإجابة: **صح**؛ هذه هي الشروط الثلاثة للاتصال عند نقطة.
9. الإجابة: **c** النهاية من اليسار $5 = 2(2) + 1$ ومن اليمين $3 = 2^2 - 1$ (مختلفتان) $\Rightarrow$ قفزي.
10. الإجابة: **c** $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ يُختصر العامل $(x-3)$ $\Rightarrow$ فجوة $\Rightarrow$ قابل للإزالة.
11. الإجابة: **a** يبقى العامل $(x+1)$ في المقام $\Rightarrow$ خط تقارب رأسي $\Rightarrow$ لا نهائي.
12. الإجابة: **d** $f(2) = -1$ و $f(3) = 16$: تغيرت الإشارة بين 2 و 3.
13. الإجابة: **b** الدرجة زوجية والمعامل الرئيس سالب $\Rightarrow -\infty$ عند الطرفين.
14. الإجابة: **b** المنحنى يرتفع إلى ∞ عند اليسار وينخفض إلى $-\infty$ عند اليمين.
15. نموذج الإجابة: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ ؛ خط التقارب الأفقي $y = 2$.
16. الإجابة: **d** تساوي النهاية من اليسار بقيمة الدالة: $3 = 2^2 - 1 = 2k + 1 \Rightarrow k = 1$.

17. الإجابة: **a** $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}$: يُختصر $(x-3) \Rightarrow$ قابل للإزالة عند 3 ، ويبقى $(x+3)$ في المقام $\Rightarrow$ لا نهائي عند -3 .

18. نموذج الإجابة:

- (أ) قيم $f(x)$: -1 ، 3 ، 1 ، -1 ، 3 .
 (ب) تتغير الإشارة بين -2 و -1 ، وبين 0 و 1 ، وبين 1 و 2 .
 (ج) ثلاثة أصفار حقيقية؛ فهي كثيرة حدود من الدرجة 3 (على الأكثر 3 أصفار) وقد وجدت ثلاثة تغيرات للإشارة.

19. نموذج الإجابة:

- (أ) 2 (ب) 3 (ج) غير موجودة لأن النهايتين مختلفتان (د) 3
 (هـ) قفزي.

20. نموذج الإجابة:

- (أ) $x \neq 4$ أي $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.
 (ب) $f(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{x-4} = x+2 \Rightarrow$ النهاية 6 .
 (ج) قابل للإزالة (فجوة عند (4, 6)) .
 (د) $g(x) = x+2$ لكل x ، أو بالصورة: $g(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$ عندما $x \neq 4$ ، و $g(4) = 6$.

الدرس 11.4: التزايد والتناقص والقيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1. الإجابة: **c** يرتفع المنحنى من اليسار حتى الرأس عند $x = 1$.
2. الإجابة: **d** ينخفض المنحنى بعد الرأس، أي على $(1, \infty)$.
3. الإجابة: **b** الجزء الأفقي من المنحنى بين $x = 0$ و $x = 2$.
4. الإجابة: **a** عند $x = -1$ قمة محلية (القيمة 2) . لا توجد قيم قصوى مطلقة لأن المنحنى يمتد إلى $\pm\infty$.
5. الإجابة: **c** أعلى نقطة هي الرأس (1, 4) : القيمة 4 عند $x = 1$.
6. الإجابة: **c** التغير في المخرجات مقسوماً على التغير في المدخلات.
7. الإجابة: **a** $f(4) = 11$ ، $f(1) = 5$ ، $\frac{11-5}{4-1} = 2$ (وهو ميل المستقيم).
8. الإجابة: **خطأ** خطأ؛ يكون موجباً، لأن قيم الدالة ترتفع عند زيادة x .
9. الإجابة: **d** ينخفض المنحنى من القمة عند $x = -1$ إلى القاع عند $x = 1$.
10. الإجابة: **b** $f(5) = 5$ ، $f(1) = -3$ ، $\frac{5-(-3)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$.
11. الإجابة: **b** $\frac{1-1}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$.
12. الإجابة: **d** $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{1}}{10-2} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$.
13. الإجابة: **a** $d(2) = 90$ و $d(4) = 200$ ، $\frac{200-90}{4-2} = 55 \text{ km/h}$.
14. نموذج الإجابة: قيمة عظمى محلية 2 عند $x = -1$ أي النقطة $(-1, 2)$ ، وقيمة صغرى محلية -2 عند $x = 1$ أي $(1, -2)$. لا توجد قيم قصوى مطلقة لأن المنحنى يمتد إلى ∞ و $-\infty$ عند طرفيه.
15. نموذج الإجابة: $f(2) = -1$ و $f(-1) = 5$ ، $\frac{-1-5}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$.
16. الإجابة: **c** $P(6) = 344$ و $P(2) = 256$ ، $\frac{344-256}{6-2} = \frac{88}{4} = 22$ ؛ ألف زائر/شهر.
17. الإجابة: **d** $\frac{9+3k-1-k}{2} = \frac{8+2k}{2} = 4+k = 6 \Rightarrow k = 2$.
18. نموذج الإجابة: لا؛ في $[1, 3]$ المتوسط $\frac{9-1}{2} = 4 > 0$ ، لكن في $[-3, -1]$ المتوسط $\frac{1-9}{2} = -4 < 0$. فالدالة متناقصة على $(-\infty, 0)$ و متزايدة على $(0, \infty)$ ؛ فترة واحدة لا تكفي للحكم على سلوك الدالة كلها.

19. نموذج الإجابة:

- (أ) رأس القطع عند $x = -\frac{b}{2a} = 2$ ؛ $f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$ ؛ قيمة عظمى مطلقة 3 عند $x = 2$ (لأن $a < 0$).
 (ب) متزايدة على $(-\infty, 2)$ ومتناقصة على $(2, \infty)$.
 (ج) $f(0) = -1$ و $f(4) = -1 \Rightarrow$ المتوسط 0 ؛ لأن التغير الكلي صفر: ترتفع الدالة ثم تعود إلى القيمة نفسها (تناظر حول $x = 2$).

20. نموذج الإجابة:

- (أ) $h(0) = 0$ ، $h(2) = 20$ ، $h(4) = 0$. في $[0, 2]$: $\frac{20}{2} = 10$ م/ث ؛ في $[2, 4]$: $\frac{0-20}{2} = -10$ م/ث .
 (ب) الإشارة الموجبة: الكرة تصعد؛ والسالبة: الكرة تهبط.
 (ج) عند $t = 2$ ثانية، والارتفاع الأقصى 20 متراً.