أوراق عمل مراجعة الوحدة 11 التفاضل والتكامل بدون حل

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

الوحدة

11

التفاضل والتكامل

المدرس / مصطفى أسامة عَلّام
050-2509447

11-1 تقدير النهايات بيانيًا

سوف أضع إجابات اضغط هنا للحصول على الحلول اللازمة

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – تقدير نهايات الدوال عند نقطة محددة.

2– تقدير نهايات الدوال عند اللانهاية.

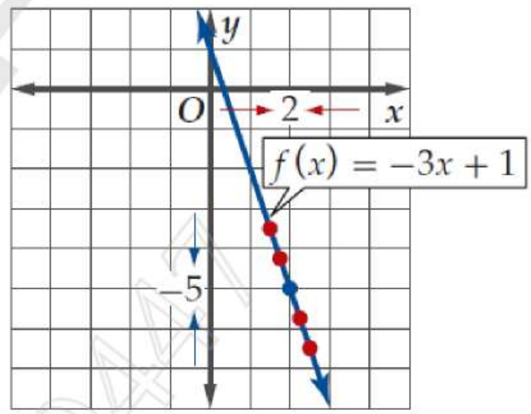
يتمحور حساب التفاضل والتكامل حول مسألتين مهمتين:

- **إيجاد معادلة المماس بتمثيل بياني لدالة عند نقطة.**
- **إيجاد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x.**

تقدير النهاية عندما النهاية = $f(c)$

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

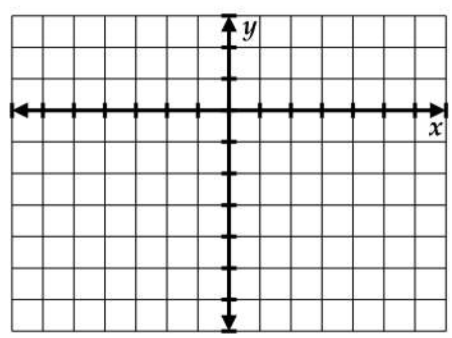
$$\lim_{x \to 2}(-3x+1)$$



x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

$$\lim_{x \to -3}(1-5x)$$



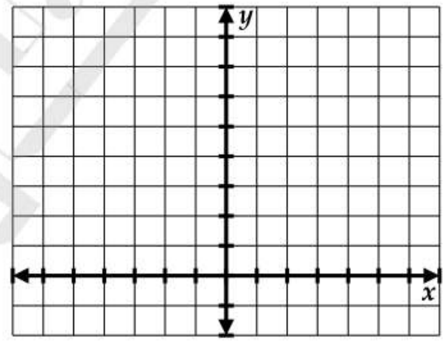
x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)$$



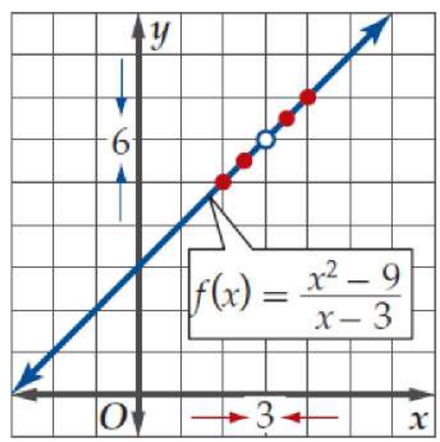
x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

تقدير النهاية عندما النهاية (لا تساوي الصورة) $f(c) \neq$

قدّر كل نهاية باستخدام التمثيل البياني أو المنحنى. وادعم تخمينك باستخدام جدول القيم.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)$$

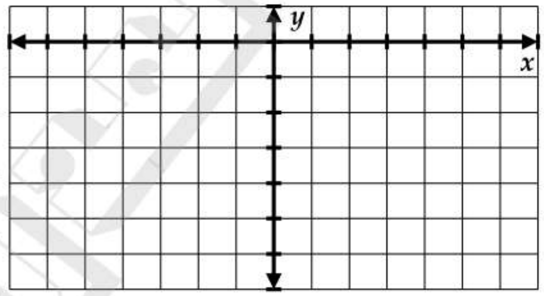


x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

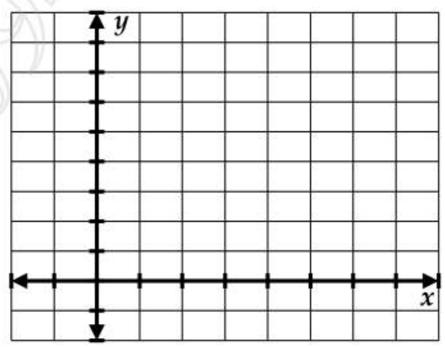
$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{x^2-4}\right)$$



x تقترب من　　　　　　　　x تقترب من

x							
f(x)							

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-4x-5}{x-5}\right)$$



x تقترب من　　　　　　　　x تقترب من

x							
f(x)							

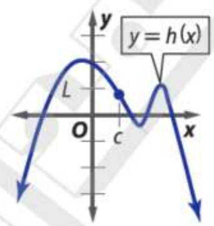
المفهوم الأساسي استقلالية النهاية عن قيمة الدالة عند نقطة ما

الشرح لا تعتمد نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c على قيمة الدالة عند النقطة c.

الرموز

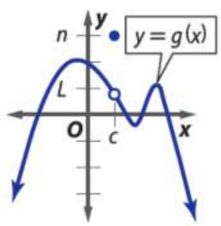
$\lim_{x\to c} h(x) = L$

$h(c) = L$



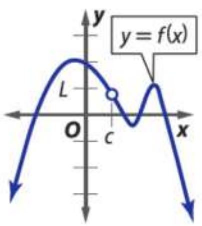
$\lim_{x\to c} g(x) = L$

$g(c) = n$



$\lim_{x\to c} f(x) = L$

$f(c)$ غير معرفة.



من المهم استيعاب أن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب X من ذلك العدد.

يُمكننا وصف سلوك التمثيل البياني من اليسار واليمين لـ X بشكل أكثر دقة بمفردة **النهايات أحادية الطرف** (من جهة واحدة).

المفهوم الأساسي وجود نهاية عند نقطة

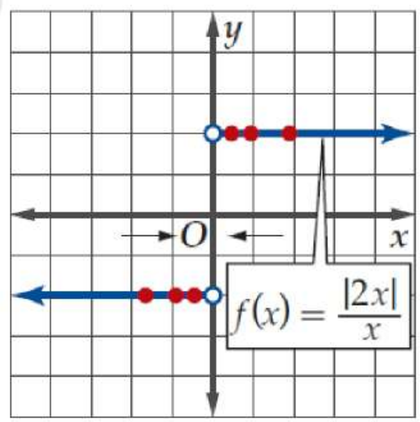
لا تكون نهاية الدالة $f(x)$ عندما يقترب x من c موجودة إلا إذا كان هناك نهايتان أحاديتا الطرف ومتساويتين. بمعنى أنه إذا كان

$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

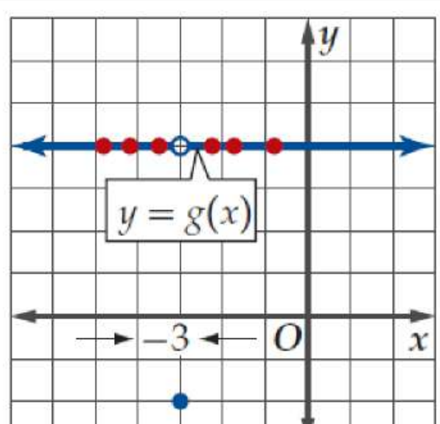
تقدير النهايات أحادية الطرف (من جهة واحدة) وثنائية الطرف (من جهتين)

قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

a. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|2x|}{x}, \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|2x|}{x}, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x|}{x}$

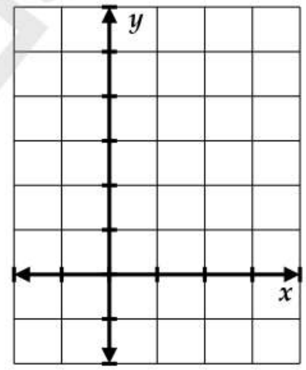


b. $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x), \lim\limits_{x\to 3^+} g(x), \lim\limits_{x\to 3} g(x)$, where $g(x) = \begin{cases} 4 & if\ \ x \neq -3 \\ -2 & if\ \ x = -3 \end{cases}$

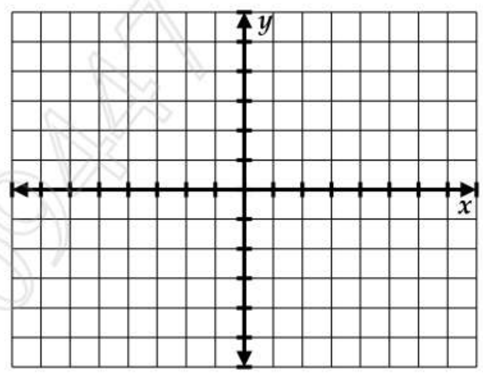


قدّر النهاية أحادية الطرف أو ثنائية الطرف، إن وجدت.

3A. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, *where* $f(x) = \begin{cases} x^3+2 & if\ \ x<1 \\ 2x+1 & if\ \ x\geq 1 \end{cases}$



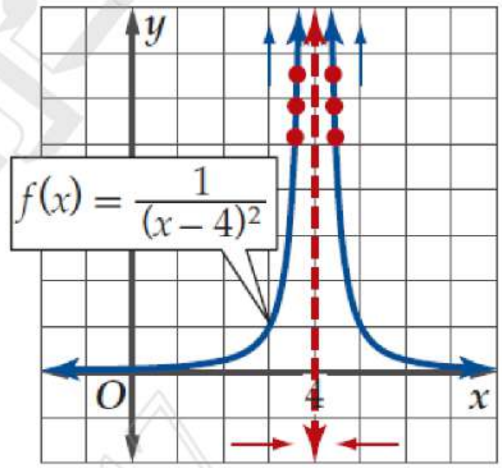
3B. $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x), \lim\limits_{x\to -2^+} g(x), \lim\limits_{x\to -2} g(x)$, *where* $g(x) = \begin{cases} -0.5x+2 & if\ \ x<-2 \\ -x^2 & if\ \ x\geq -2 \end{cases}$



إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞ ، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c ، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

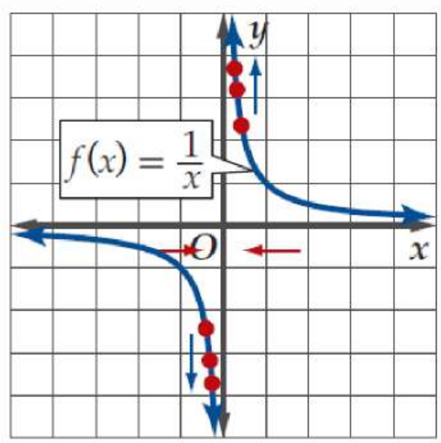
$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x-4)^2}$$



x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$



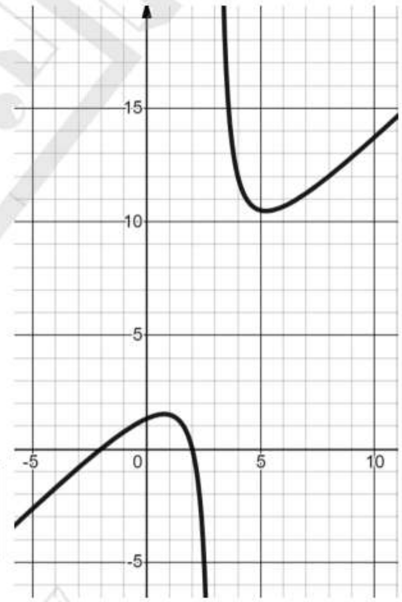
x تقترب من ⟶ ⟵ x تقترب من

x							
$f(x)$							

قدّر كل نهاية، إن وجدت.

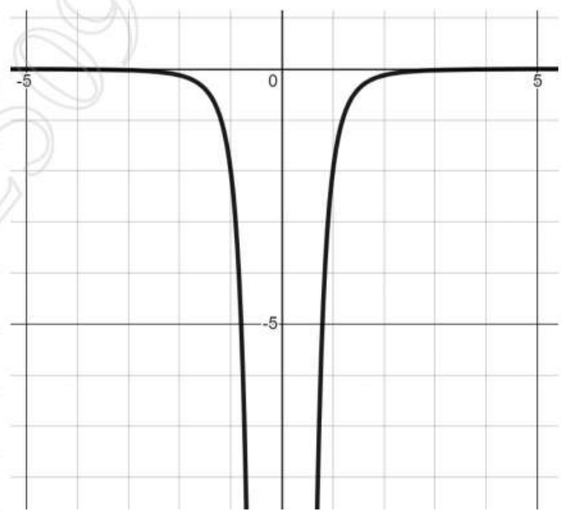
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x - 3}$$

اضغط هنا للحصول على الحلول اللازمة



	x تقترب من →				← x تقترب من		
x							
$f(x)$							

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{2}{x^4}\right)$$

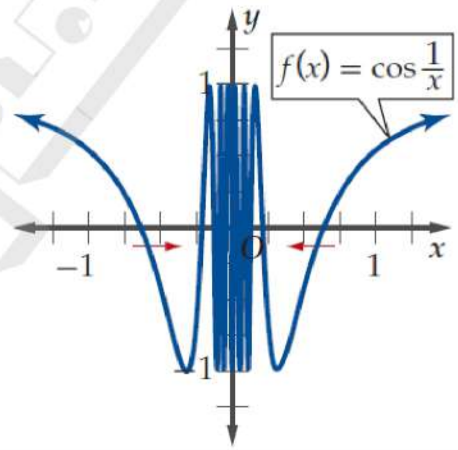


	x تقترب من →				← x تقترب من		
x							
$f(x)$							

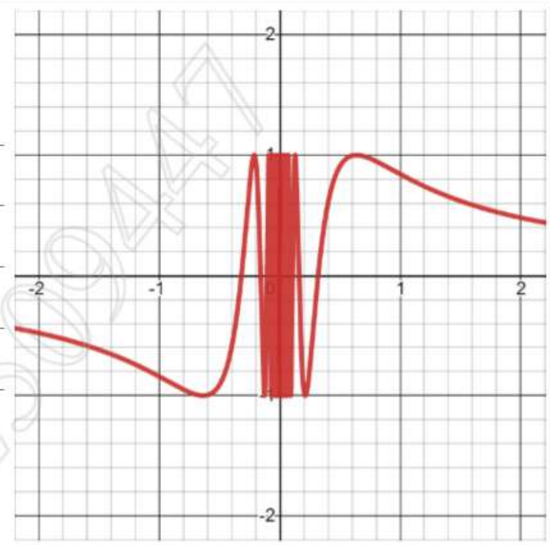
لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c. اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

قدِّر-إن أمكن-كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

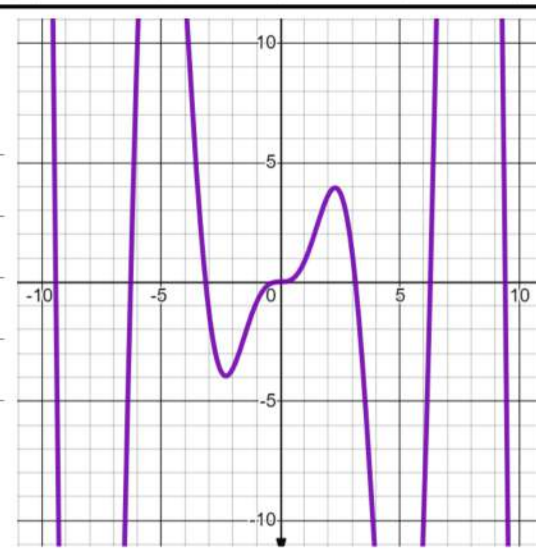
$$\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x\to 0} (x^2 \sin x)$$



ملخص المفهوم — أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.
- عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c من اليمين، أو العكس.
- عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.

مفهوم أساسي — النهايات عند المالانهاية

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

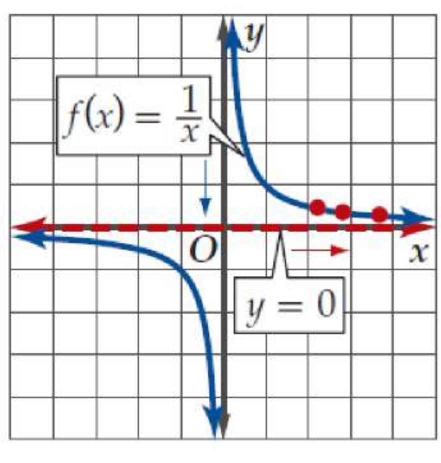
درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$

تقدير النهايات عند اللا نهاية

قدِّر-إن أمكن- كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$



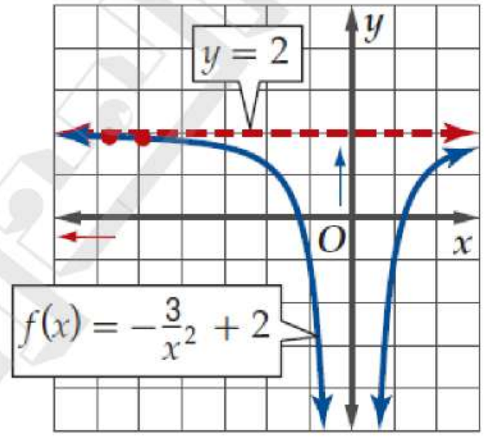
x تقترب من ∞

x					
$f(x)$					

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

قدّر-إن أمكن- كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة.

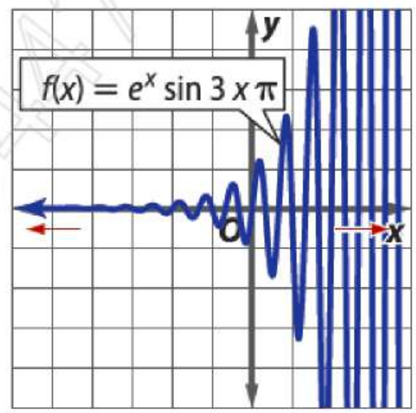
$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}+2\right)$$



x تقترب من $-\infty$

x					
$f(x)$					

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \sin 3\pi x \quad and \quad \lim_{x\to\infty} e^x \sin 3\pi x$$

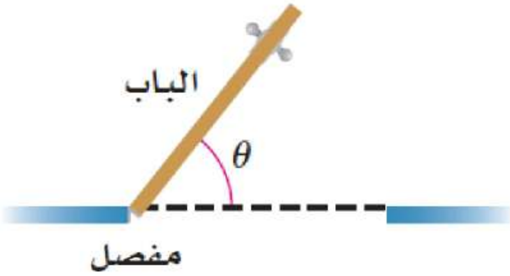


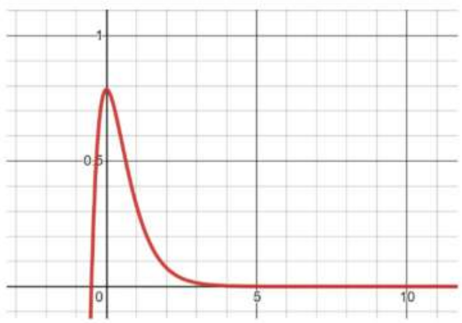
x تقترب من $-\infty$ x تقترب من ∞

x	-100	-50	-10	0	10	50	100
$f(x)$	3×10^{-44}	-2.0×10^{-22}	-0.00005	0	21966	4.8×10^{21}	-2.0×10^{43}

يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية. لحصول على حلول الملزمة

هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُركَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1+2t)e^{-2t}$ تمثّل زاوية فتحته θ بعد t ثانية.
قدِّر $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$، وفسّر معناها إذا كانت موجودة.





دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t) = te^{-0.18t}$، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض.
قدِّر $\lim_{t\to\infty} C(t)$ ، وفسّر معناها إذا كانت موجودة.

ورقة عمل الثاني عشر العام **11-2 إيجاد قيمة النهايات جبريًا** اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

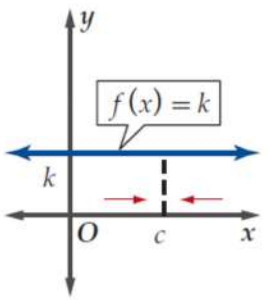
في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند نقطة محددة.

2– إيجاد قيمة نهايات الدوال النسبية وكثيرة الحدود عند اللانهاية.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

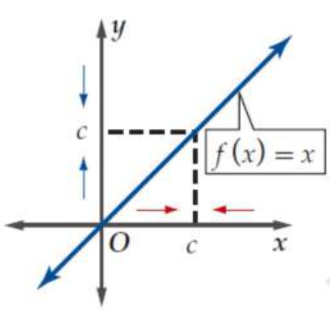
نهايات الدوال الثابتة



التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

الرموز: $\lim_{x\to c} k = k$

نهايات الدالة المحايدة



التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x\to c} x = c$

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c} [k\, f(x)] = k \lim_{x\to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، حيث $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

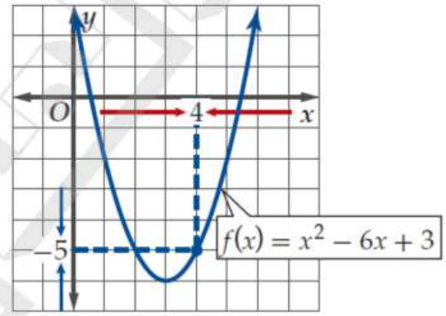
خاصية الجذر النوني: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.

وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ،

استخدم خواص النهايات لإيجاد قيمة كل من النهايات التالية.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

$$\lim_{x\to 4}(x^2-6x+3)$$



$$\lim_{x\to -2}\frac{4x^3+1}{x-5}$$

x تقترب من ⟵ ⟶ x تقترب من

x							
$f(x)$							

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{8-x}$$

$$\lim_{x\to 2}(-x^3+4)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{2x^2-x-15}$$

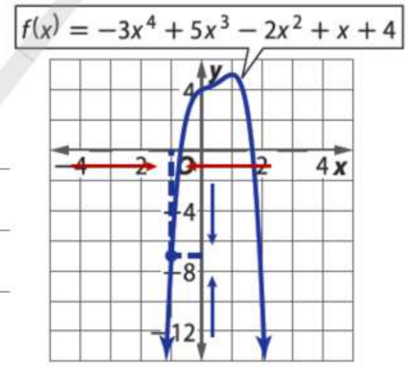
$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x+3}$$

استخدام التعويض المباشر لحساب النهايات

يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر**، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

استخدم التعويض المباشر، إن أمكن، لإيجاد قيمة كل نهاية. وإن كان ذلك غير ممكن، فاشرح السبب.

$$\lim_{x \to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$$



$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$$

$$\lim_{x \to -5} \frac{x + 1}{x^2 + 3}$$

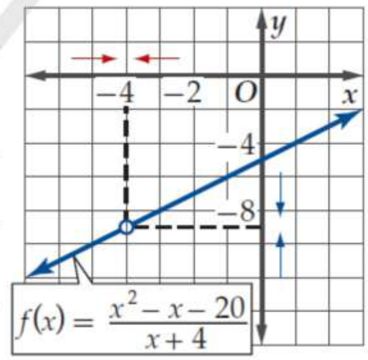
$$\lim_{x \to -8} \sqrt{x + 6}$$

استخدام التحليل إلى العوامل لحساب النهايات

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى **الصيغة غير المعينة** $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة. (مثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة).

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4}$$



$$\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{x^3 - 3x^2 - 7x + 21}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x + 2}$$

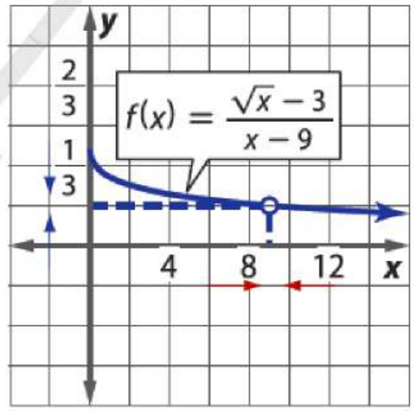
$$\lim_{x\to 6} \frac{x^2 - 7x + 6}{3x^2 - 11x - 42}$$

استخدام إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

هناك طريقة أخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويض فيها صيغة غير معينة، وهي **إنطاق** البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

احسب كل نهاية مما يأتي:

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$



$$\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$$

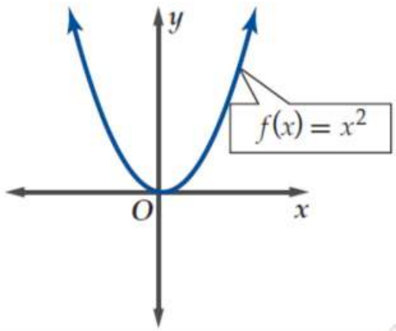
$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$$

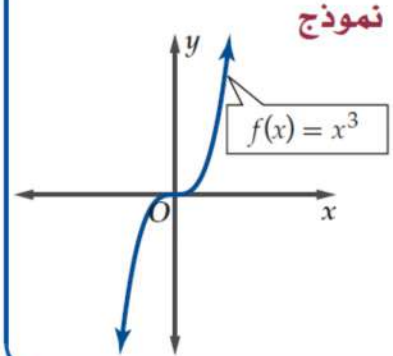
مفهوم أساسي — نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًّا.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًّا.

نموذج





إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى.

مفهوم أساسي — نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \ , \ \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو ∞- لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلا حدود أو متناقصًا بلا حدود.

نهايات الدوال كثيرة الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$\lim\limits_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^3-4x^2+9\right)$ اضغط هنا للحصول على الحل

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^6+3x^5-x\right)$

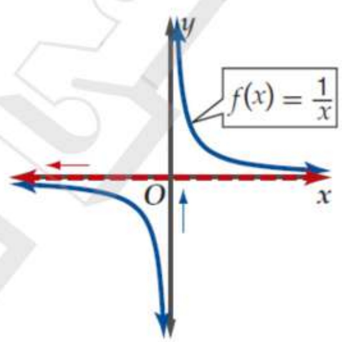
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-6x^2+4x^5\right)$

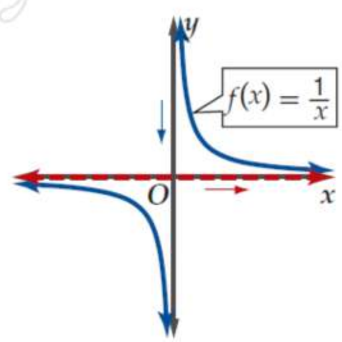
ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مفهوم أساسي — نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

مثال: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

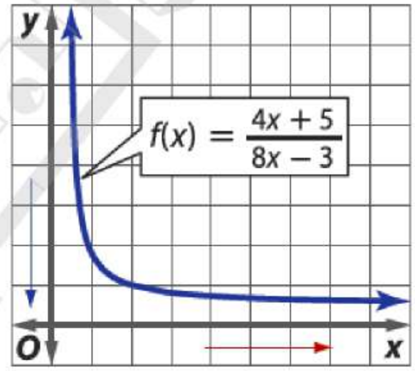
ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية ، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3}$$



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$$

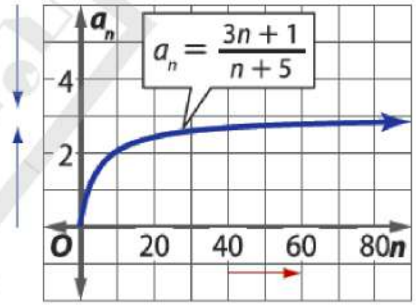
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$$

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية. ثم جد نهاية المتتالية، إن وجدت.

$$a_n = \frac{3n+1}{n+5}$$



$$b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$

$$a_n = \frac{4}{n^2+1}$$

$$b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$$

$$C_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

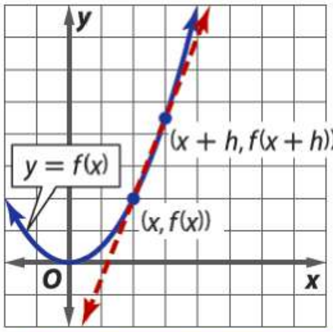
ورقة عمل الثاني عشر العام 11-3 المماسات والسرعة المتجهة

اضغط هنا للحصول

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – إيجاد معدلات التغير اللحظي عن طريق حساب قيم ميل المماس.

2– إيجاد السرعة المتجهة المتوسطة واللحظية.



ميل القاطع $m = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$ **or** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

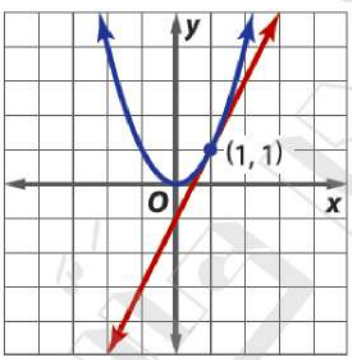
مفهوم أساسي — مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

$y = x^2\ ;\ (1, 1)$



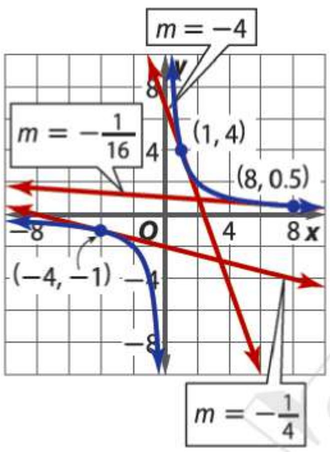
$y = x^2\ ;\ (3, 9)$

$y = x^2 + 4 \; ; (-2, 8)$ اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

معادلة ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

$y = \dfrac{4}{x}$



$y = x^2 - 4x + 2$

$y = x^3$

تعلمت في الفصل الدراسي الأول طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالكيلومترات، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

بالون: تمثِّل المعادلة $h(t) = 2 + 20t - 5t^2$ الارتفاع بالأمتار بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1\ s$ ، $t = 2\ s$؟

السرعة المتجهة التي تم حسابها في المثالين السابقين هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية ، وليست السرعة المتجهة اللحظية والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها $600\ m$ ، *وتمثِّل الدالة* $f(t) = 600 - 5t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد $5\ s$.

سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع $420\ m$ *عن سطح الأرض، وتمثل الدالة* $d(t) = 420 - 5t^2$ ارتفاع العلبة بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ للكرة بعد $7\ s$.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن.

تمثل الدالة $s(t) = 30t - 5t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًا من مستوى سطح البحر، حيث الارتفاع بالأمتار. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن.

ورقة عمل الثاني عشر العام — 11-4 المشتقات

اضغط هنا للحصول

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – إيجاد معدلات التغير اللحظي بواسطة حساب المشتقات.

2– استخدام قاعدتي ناتج الضرب وناتج القسمة لحساب المشتقات.

تعلمت في الدرس السابق كيفية استخدام النهايات لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية مشتقة الدالة ويرمزلها بالرمز $f'(x)$ ، وتُعطى بالصيغة:

مشتقة الدالة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة الاشتقاق، وتُسمَّى النتيجة معادلة تفاضلية.

مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

$f(x) = 4x^2 - 5x + 8\ ;\ x = 1 \text{ and } 5$

$f(x) = 6x^2 + 7\ ;\ x = 2 \text{ and } 5$

$f(x) = -5x^2 + 2x - 12\ ;\ x = 1 \text{ and } 4$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة دالة القوة

التعبير اللفظي: في مشتقة دالة القوة تكون قوة x أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

قاعدة مشتقة دالة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$f(x) = x^9$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$

$j(x) = x^4$

$k(x) = \sqrt{x^3}$

$m(x) = \frac{1}{x^5}$

مفهوم أساسي

قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كانت $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

قواعد الاشتقاق

Find the derivative of each function.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$f(x) = 5x^3 + 4$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

$g(x) = 3x^4(x + 2)$

$h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

الآن، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي الدرس السابق، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسمٍ متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

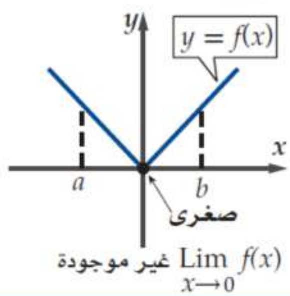
تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن.

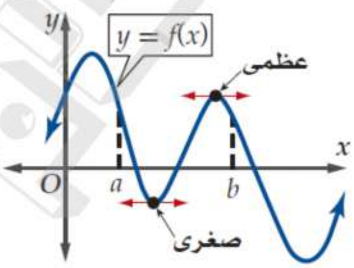
تمثل الدالة $h(t) = 18t - 5t^2$ الارتفاع بالأمتار بعد t ثانية لكرة قذفت رأسيا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة عند أي زمن.

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى **نقطةً حرجةً** للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي — نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.

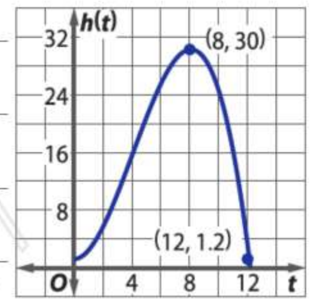




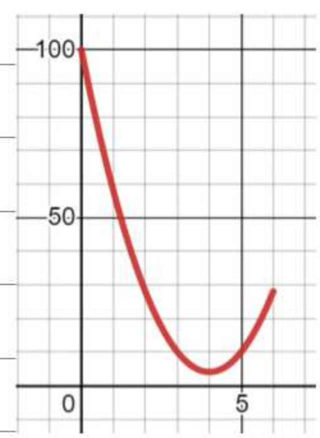
لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

الأفعوانية الدالة $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأمتار في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية [1 , 12]، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم في هذه الفترة الزمنية.



رياضة القفز الدالة $h(t) = 6t^2 - 48t + 100$ تمثّل ارتفاع سعد بالأمتار في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبلٍ مطاطيٍ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية [0 , 6]، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.



إن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقَّي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f و g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

$h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

$h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

$h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

كذلك فإن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقَّي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة القسمة

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$h(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$$

$$j(x) = \frac{7x - 10}{12x + 5}$$

$$k(x) = \frac{6x}{2x^2 + 4}$$

ورقة عمل الثاني عشر العام 11-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

اضغط هنا للحصول

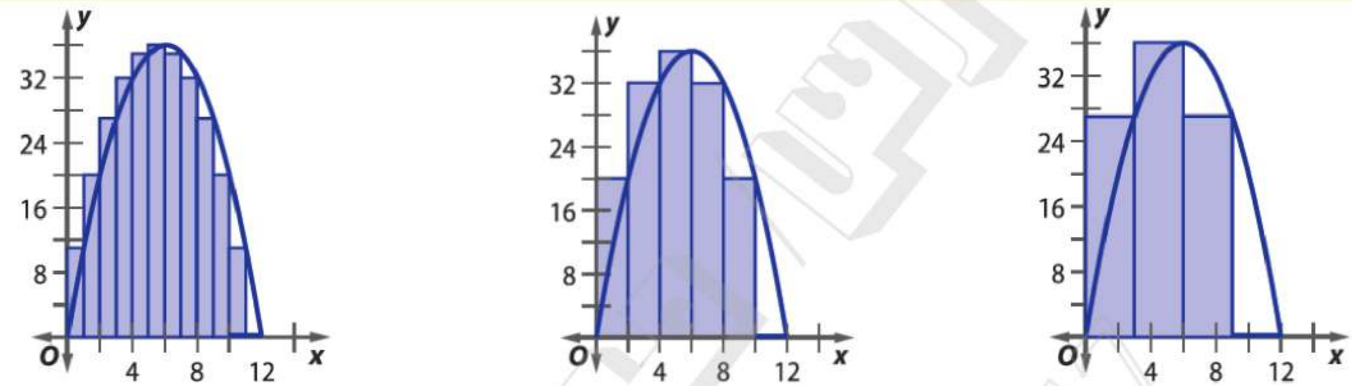
في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام المستطيلات.

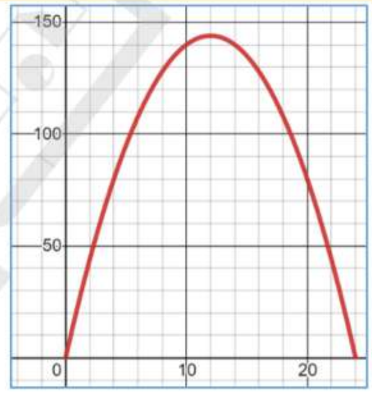
2– تقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام التكاملات المحددة والتكامل.

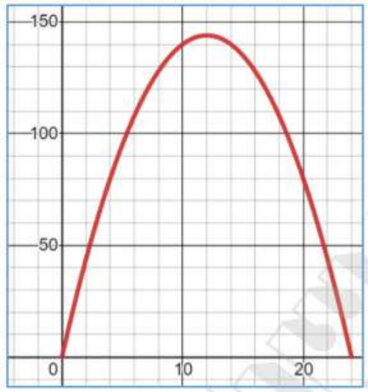
المساحة تحت المنحنى باستخدام الأطراف اليمنى للمستطيلات

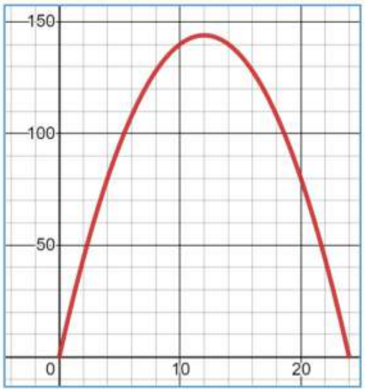
قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستخدام 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.



قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستخدام 6 ، 8 ، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.





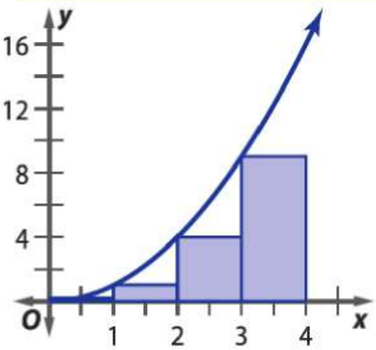


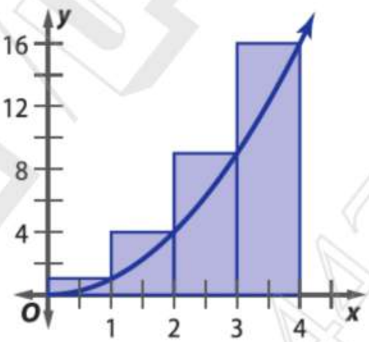
لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعاتها، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطر افها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

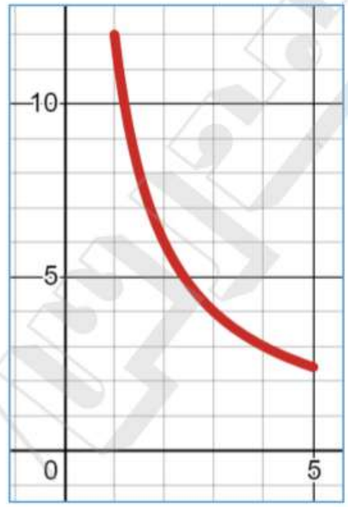
المساحة تحت المنحنى باستخدام الأطراف اليسرى واليمنى للمستطيلات

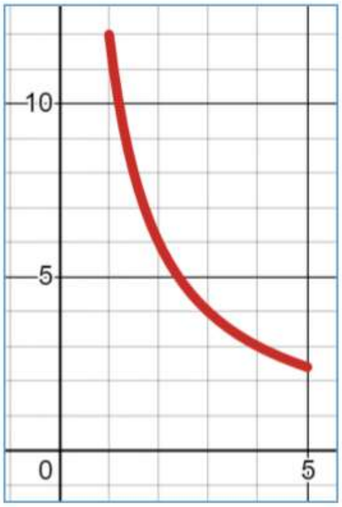
قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x على الفترة $[0, 4]$ باستخدام باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.





قرّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x على الفترة $[1,5]$ باستخدام باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.





عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

مفهوم أساسي — التكامل المحدد

يعطى التكامل المحدد للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a **الحد الأدنى** للتكامل، و b **الحد الأعلى** للتكامل، وتُسمَّى هذه الصيغة **مجموع ريمان الأيمن**.

ويُعبر هذا التكامل عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \ ,\ c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \ ,\ c \text{ عدد ثابت}$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب $f(x_i)$ في Δx من $i=1$ إلى $i=n$.

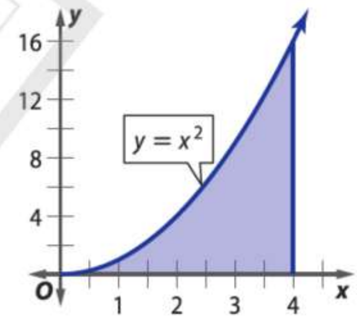
رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$، $d(x)$

المساحة تحت المنحنى باستخدام التكامل حال كون نقطة الأصل حدًّا أدنى لها

استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍ مما يأتي: اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

$$\int_0^4 x^2\,dx$$



استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي: للحصول على حلول الملزمة

$$\int_0^1 3x^2\,dx$$

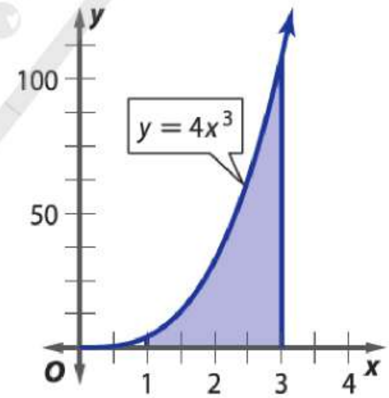
$$\int_0^3 x\,dx$$

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

$$\int_1^3 4x^3\,dx$$



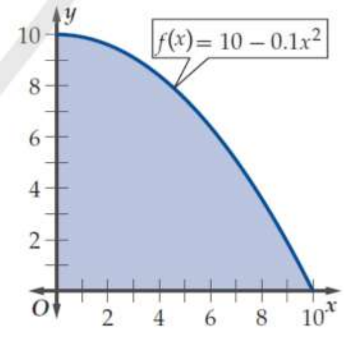
استخدم النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي: الحصول على حلول الملزمة

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

$$\int_2^4 x^3\,dx$$

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

بلاط: يكلِّف تبليط المتر المربع الواحد من فناء منزل بالجرانيت 2.40 AED . إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالمتر المربع لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟



طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ m^2$. هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)\, dx$ ؟برِّر إجابتك.

ورقة عمل الثاني عشر العام 11-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

في هذا الدرس سوف أتعلم:

1 – إيجاد المشتقات العكسية.

2– استخدام النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل.

تعلمت في الدرسين 3-11 و4-11 أنَّه إذا أُعطيتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **عكس المشتقة (دالة أصلية)** للدالة $f(x)$.

إيجاد المشتقات العكسية

جد مشتقتين عكسيتين مختلفتين لكل دالة.

$f(x) = -\dfrac{8}{x^9}$

$f(x) = 3x^2$

$f(x) = -3x^{-4}$

$f(x) = 2x$

في المثال السابق لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لمشتقة عكسية ينتج عنه مشتقة عكسية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لمشتقة عكسية يُنتج مشتقة عكسية أخرى؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من المشتقات العكسية لأي دالة.

والشكل العام للمشتقة العكسية هو الشكل الذي يحوي الثابت C.

مفهوم أساسي

قواعد المشتقات العكسية

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ مشتقتان عكسيتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن: $F(x) \pm G(x)$ مشتقة عكسية لـ $f(x) \pm g(x)$.

قواعد المشتقات العكسية

جد جميع المشتقات العكسية لكل دالة.

$f(x) = \frac{2}{x^4}$

$f(x) = 4x^7$

$f(x) = 6x^4$

$f(x) = x^2 - 8x + 5$

$f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

$f(x) = \frac{10}{x^3}$

يُعطى الشكل العام للمشتقة العكسية باسم ورمز خاصَّين.

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

مفهوم أساسي التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ مشتقة عكسية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.

من الحياة اليومية التكامل غير المحدود

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثاني عشر في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 9 أمتار، وتمثل $v(t) = -10t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

سقوطٌ حُر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 36 مترًا سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -10t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

للحصول على حلول الملزمة

مفهوم أساسي النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ مشتقة عكسية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

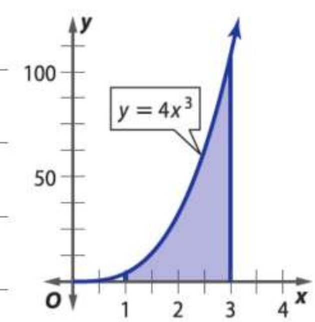
ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد مشتقة عكسية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

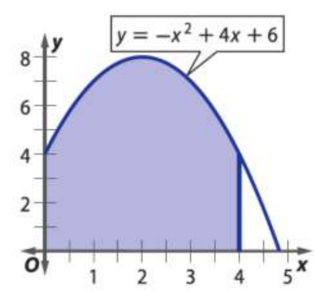
المساحة تحت المنحنى

استخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1 , 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$



b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0 , 4]$ ؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



استخدم النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

$$\int_2^5 3x^2\,dx$$

$$\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$$

اضغط هنا للحصول على حلول الملزمة

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

جد قيمة كل تكامل مما يلي.

$$\int (9x - x^3)\ dx$$

$$\int_2^3 (9x - x^3)\ dx$$

$$\int (6x^2 + 8x - 3)\ dx$$

$$\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\ dx$$

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي المشتقة العكسية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد المشتقة العكسية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي المشتقة العكسية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة المشتقة العكسية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

التكاملات المحدودة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x \ dx$.

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.7 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.7} 476x \ dx$.

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 1.4 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{1.4} 512x \ dx$.

ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟