تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/0

* للحصول على جميع أوراق في مادة ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/0

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد في مادة الخاصة بـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/0

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ اضغط هنا

https://almanahj.com/ae/grade0

للتحدث إلى بوت المناهج على تلغرام: اضغط هنا

https://t.me/almanahj_bot

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

ورقة عمل الثاني عشر العام | 2-5 الدوال النسبية | الاسم: _____

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- تحليل الدوال النسبية وتمثيلها بيانيا. 2- حل المعادلات النسبية.

إيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية

جد مجال كل دالة ومعادلات خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية، إن وُجدت.

Find the domain of each function and the equations of the vertical or horizontal asymptotes, if any.

$$f(x) = \frac{x+4}{x-3}$$

* لحساب المجال نوجد أصفار المقام

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

المجال = R - أصفار المقام

$= R - \{3\}$

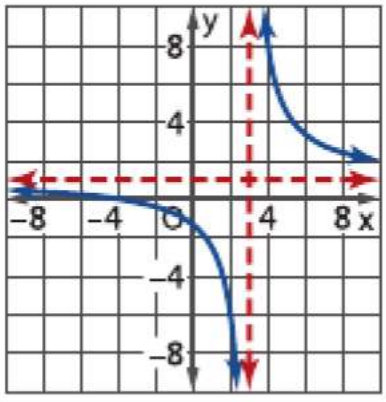
* خطوط التقارب الرأسية

$x = 3$

* خطوط التقارب الأفقية: معامل رئيس البسط / معامل رئيس المقام

$y = \frac{1}{1} = 1$

نتحقق من الرسم بالآلة الحاسبة



$$g(x) = \frac{8x^2+5}{4x^2+1}$$

* لحساب المجال نوجد أصفار المقام

$4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}i$

لا توجد أصفار حقيقية للمقام

$\Rightarrow$ المجال = $(-\infty, \infty)$

* خطوط التقارب الرأسية

لا توجد بسبب عدم وجود أصفار للمقام

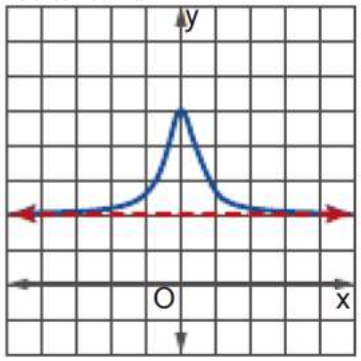
* خطوط التقارب الأفقية

لأن درجة البسط = درجة المقام

فإن خط التقارب الأفقي = معامل رئيس البسط / معامل رئيس المقام

$\Rightarrow y = \frac{8}{4} = 2$

نتحقق من ذلك برسم الدالة بالآلة الحاسبة



$$m(x)=\frac{15x+3}{x+5}$$

* نوجد أصفار المقام

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$\Rightarrow$ المجال $= R-\{-5\}$

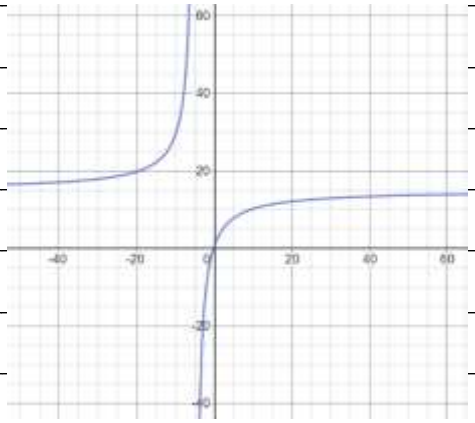
* خطوط التقارب الرأسية $\Leftarrow x=-5$

* خطوط التقارب الأفقية

$y=\frac{\text{معامل الحد الرئيسي للبسط}}{\text{معامل الحد الرئيسي للمقام}}=\frac{15}{1}=15$

لأن درجة البسط = درجة المقام

نتحقق من ذلك بإدخال رسم الدالة بالآلة الحاسبة



$$h(x)=\frac{x^2-x-6}{x+4}$$

* نوجد أصفار المقام

$x+4=0 \Rightarrow x=-4$

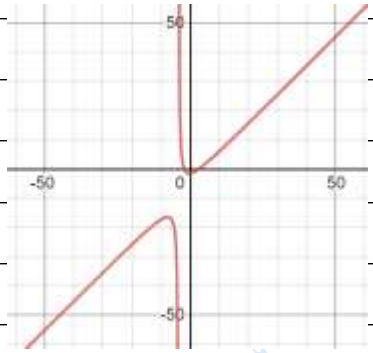
$\Rightarrow$ المجال $= R-\{-4\}$

* خطوط التقارب الرأسية $\Leftarrow x=-4$

* لا توجد خطوط تقارب أفقية

لأن درجة البسط > درجة المقام

نتحقق من رسم الدالة بالآلة



050-2509447

تمثيل الدوال النسبية بيانيًا: $n < m$ و $n > m$

• إذا كانت $n < m$، فإن الخط المتقارب الأفقي $y = 0$	• إذا كانت $n = m$، فإن خط التقارب الأفقي $y = \frac{a_n}{b_m}$	• إذا كانت $n > m$، فلا يوجد خط تقارب أفقي.

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$k(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 3}$$

* أصفار المقام: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
* المجال: $R - \{3\}$
* خطوط التقارب الرأسية: $x = 3$
* خطوط التقارب الأفقية: لا توجد
لأن درجة البسط: أكبر من درجة المقام بـ 1
لهذه الدالة خط تقارب مائل

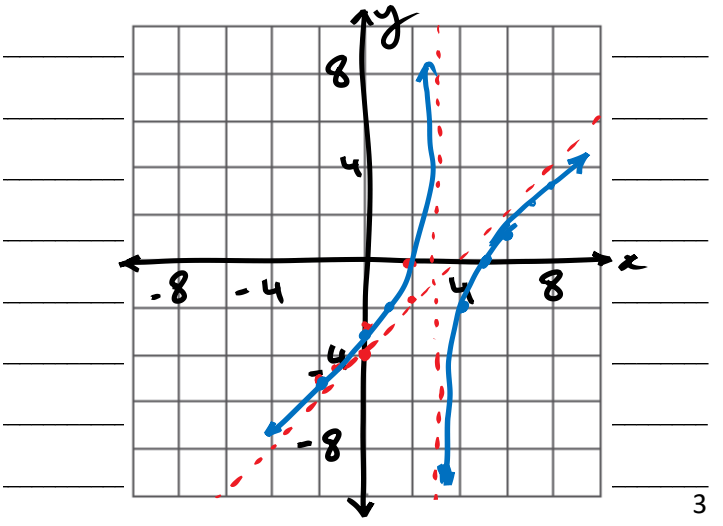
$$\begin{array}{r} x - 4 \\ x-3 \overline{)\, x^2 - 7x + 10} \\ x^2 - 3x \\ \hline -4x + 10 \\ -4x + 12 \\ \hline -2 \end{array}$$

معادلة خط التقارب المائل هي: $y = x - 4$

تقاطع x: $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2$

تقاطع y: $y = \frac{0^2 - 7(0) + 10}{0 - 3} = \frac{-10}{3}$

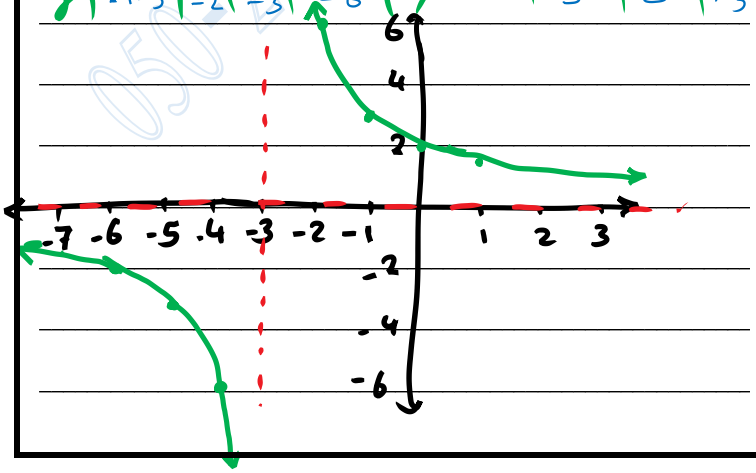
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-5.6	-4.5	-3.3	-2	0	∄	-2	0	1.3	2.5	3.6



$$g(x) = \frac{6}{x + 3}$$

* خطوط التقارب الرأسية: أصفار المقام
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
$x = -3$ ← هذا التقارب الرأسي الوحيد
* خطوط التقارب الأفقية ← $y = 0$
لأن درجة البسط < درجة المقام
* نقاط التقاطع
- تقطع y عند $x = 0$
$\Rightarrow y = \frac{6}{0+3} = 2$
- تقطع x عند $y = 0$
$0 = \frac{6}{x+3}$ ← لا يوجد حل
$R - \{-3\}$ ← المجال

x	-7	-6.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1	0	1
y	-1.5	-2	-3	-6	∄	6	3	2	1.5	



في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

$$h(x)=\frac{2}{x^2+2x-3}$$

أصفار المقام $\leftarrow$ $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$x=1$, $x=-3$

المجال $\leftarrow$ $R-\{1,-3\}$

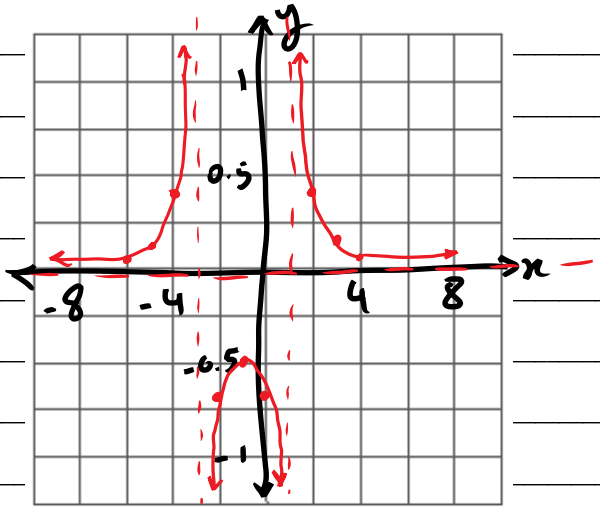
* خطوط التقارب الرأسية هي $x=-3$, $x=1$
* خطوط التقارب الأفقية $y=0$ لأن درجة البسط < درجة المقام

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0.09	0.17	0.4	//	-0.7	-0.5	-0.7	//	0.4	0.17	0.09

* x مقطع $\leftarrow$ $0=\frac{2}{x^2+2x-3}$

مستحيل $\leftarrow$ لا توجد مقاطع x

* y مقطع $\leftarrow$ $y=\frac{2}{0^2+2(0)-3}=-\frac{2}{3}$



$$n(x)=\frac{x}{x^2+x-2}$$

أصفار المقام $\leftarrow$ $x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1$, $x=-2$

المجال $\leftarrow$ $R-\{1,-2\}$

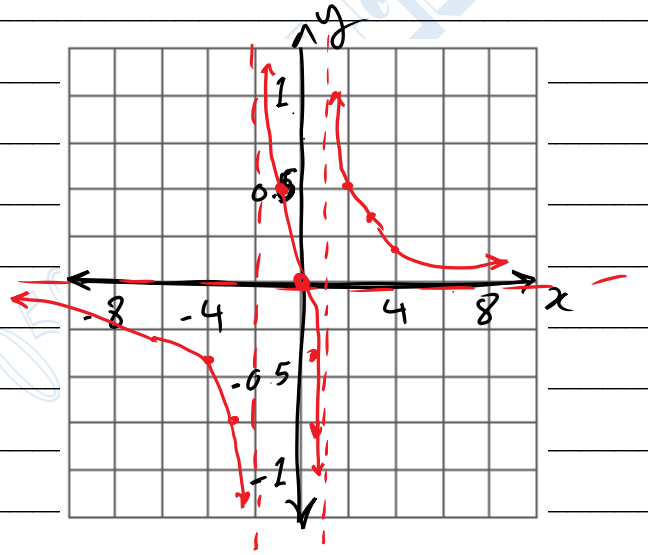
* خطوط التقارب الرأسية هي $x=1$, $x=-2$
* خطوط التقارب الأفقية هي $y=0$ لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	-0.3	-0.4	-0.75	//	0.5	0	0.4	//	0.5	0.3	0.2

* x مقطع $\leftarrow$ $0=\frac{x}{x^2+x-2}$

$\Rightarrow \boxed{0=x}$

* y مقطع $\leftarrow$ $y=\frac{0}{(0)^2+(0)-2}=\boxed{0}$



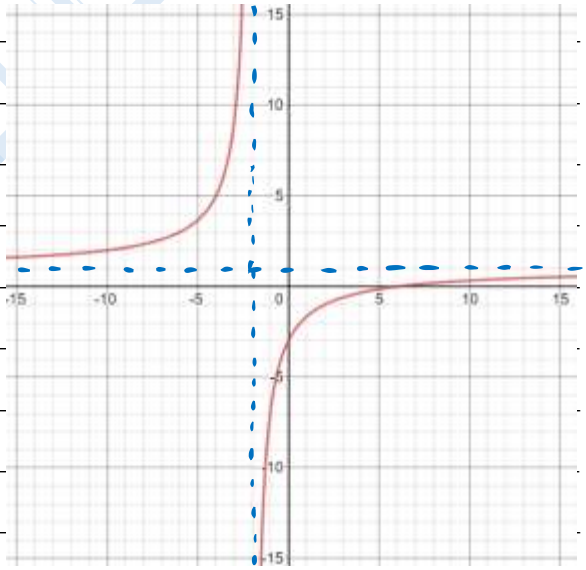
تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$h(x) = \frac{x-6}{x+2}$$

* أصفار المقام ← $x+2=0 \Rightarrow x=-2$
* المجال ← $R-\{-2\}$
* خطوط التقارب الرأسية هي $x=-2$
* خطوط التقارب الأفقية هي $y=1$
* مقطع x ← $0=x-6 \Rightarrow x=6$
* مقطع y ← $y=\frac{0-6}{0+2}=-3$



$$f(x) = \frac{3x^2-3}{x^2-9}$$

أصفار المقام ← $x^2-9=0$

$(x-3)(x+3)=0$

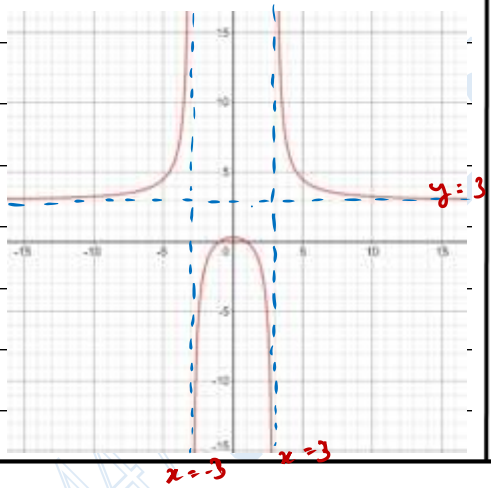
$x=3 \ , \ x=-3$

المجال ← $R-\{3,-3\}$

* خطوط التقارب الرأسية هي $x=3 \ , \ x=-3$
* خطوط التقارب الأفقية هي $y=\frac{3}{1}=3$

لأن درجة البسط = درجة المقام

* مقطع x ← $3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$
* مقطع y ← $y=\frac{3(0)^2-3}{0^2-9}=\frac{1}{3}$

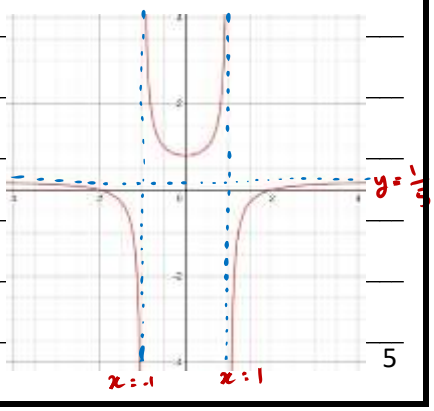


$$h(x) = \frac{x^2-4}{5x^2-5}$$

* أصفار المقام ← $5x^2-5=0$

$x=\pm 1$

* المجال ← $R-\{1,-1\}$
* خطوط التقارب الرأسية هي $x=1 \ , \ x=-1$
* خطوط التقارب الأفقية هي $y=\frac{1}{5}$
* مقطع x ← $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$
* مقطع y ← $y=\frac{0^2-4}{5(0)^2-5}=\frac{4}{5}$



عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

تمثيل الدالة النسبية بيانيًا: $n = m + 1$

في كل دالة، حدد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes and intercepts. Then graph the function, and state its domain.

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + x - 12}$$

* أصفار المقام ← $x^2 + x - 12 = 0$

$(x - 3)(x + 4) = 0$

$x = 3 \quad , \quad x = -4$

* المجال ← $R - \{3, -4\}$

* خطوط التقارب الرأسية هي $x = 3$ و $x = -4$

* خطوط التقارب الأفقية لا يوجد

ولكن لأن درجة البسط > درجة المقام بفرق واحد

يوجد تقارب مائل ← نجد معادلة الدالة خط تقارب

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 12 & 2x - 2 \\ \hline & 2x^3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 24x \\ \hline & -2x^2 + 24x \\ & -2x^2 - 2x + 24 \\ \hline & 26x - 24 \end{array}$$

معادلة خط التقارب المائل: $y = 2x - 2$

$$h(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x + 4}$$

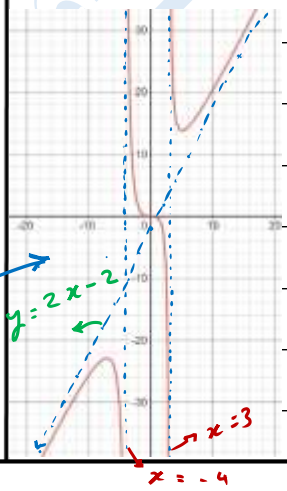
* أصفار المقام ← $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

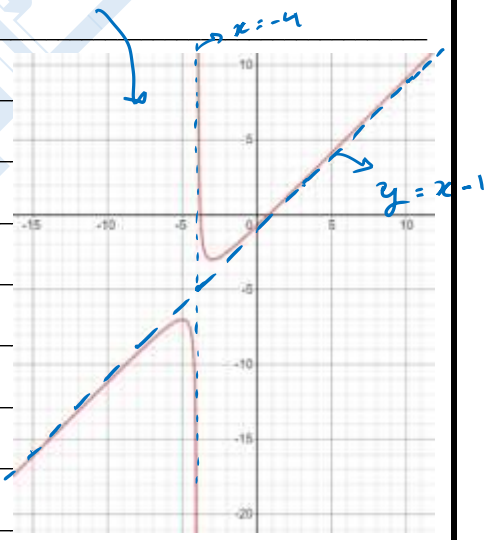
* المجال ← $R - \{-4\}$

* خط التقارب الرأسي ← $x = -4$

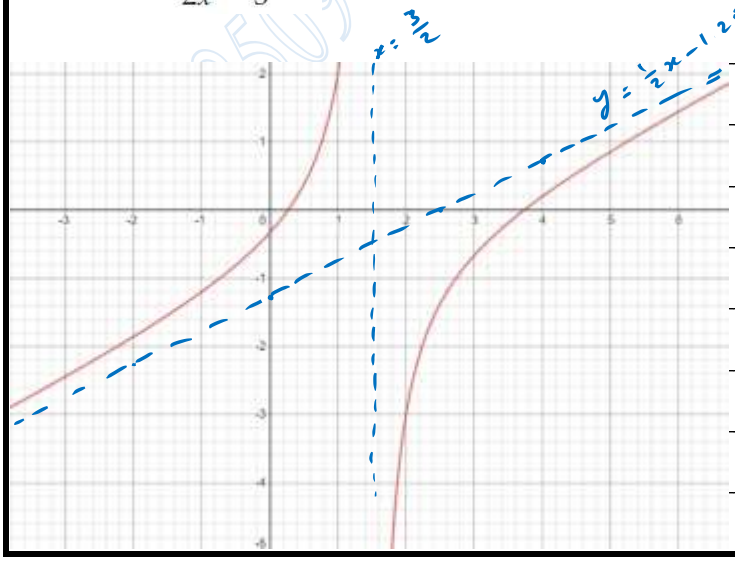
* خط التقارب الأفقي ← لا يوجد

* خط التقارب المائل ← $\begin{array}{r|l} x + 4 & x - 1 \\ \hline & x^2 + 3x - 3 \\ & x^2 + 4x \\ \hline & -x - 3 \\ & -x - 4 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\Rightarrow y = x - 1$





$$p(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$$



* أصفار المقام ← $2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

* المجال ← $R - \{\frac{3}{2}\}$

* خطوط التقارب الرأسية ← $x = \frac{3}{2}$

* خطوط التقارب الأفقية لا يوجد

* خطوط التقارب المائلة ← $y = \frac{1}{2}x - 1.25$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 3 & \frac{1}{2}x - 1.25 \\ \hline & x^2 - 4x + 1 \\ & x^2 - 1.5x \\ \hline & -2.5x + 1 \\ & -2.5x + 3.75 \\ \hline & -2.75 \end{array}$$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

التمثيل البياني لدالة نسبية لها عوامل مشتركة

في كل دالة، حدّد أي خطوط تقارب رأسية وأفقية والفجوات ونقاط التقاطع. ثم مثّل الدالة بيانيًا واذكر مجالها.

For each function, determine any vertical and horizontal asymptotes, holes, and intercepts. Then graph the function and state its domain.

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$$

المجال ← $\mathbb{R}$

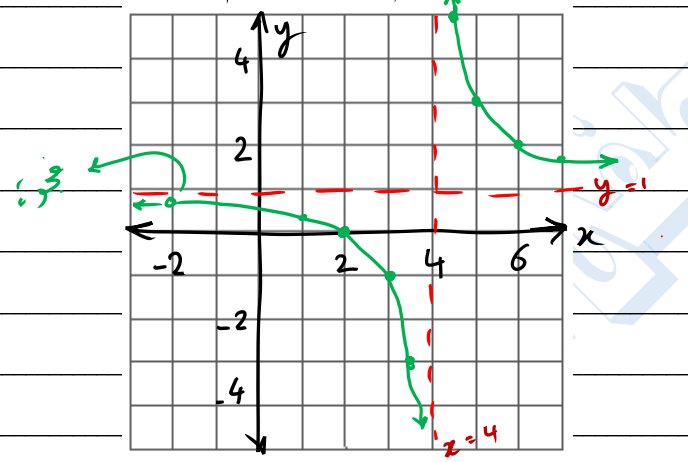
أولاً : نبسط الدالة

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}$$

المجال ← $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$

* فجوة عند $x = -2$
* خط التقارب الرأسية عند $x = 4$
* خط التقارب الأفقية عند $y = 1$

x	1	2	3	3.5	4	4.5	5	6	7
y	0.3	0	-1	-3	//	5	3	2	1.7



$$g(x) = \frac{x^2 + 10x + 24}{x^2 + x - 12}$$

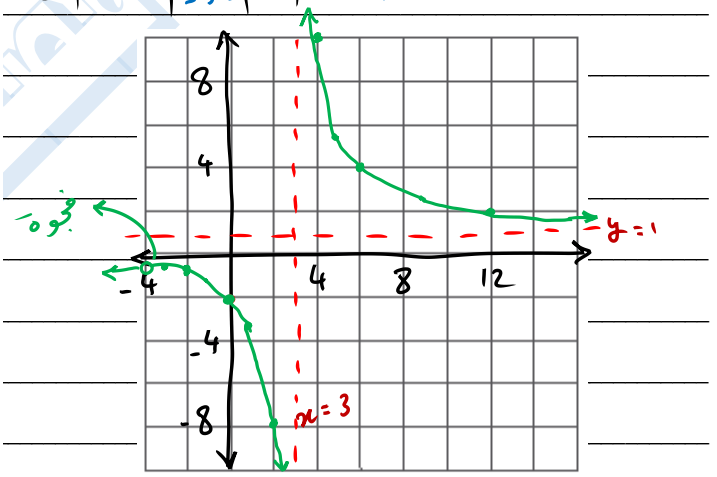
أولاً : نبسط الدالة

$$g(x) = \frac{(x+6)(x+4)}{(x-3)(x+4)} = \frac{x+6}{x-3}$$

المجال ← $\mathbb{R} - \{3, -4\}$

* فجوة عند $x = -4$
* خط التقارب الرأسي $x = 3$
* خط التقارب الأفقي $y = 1$

x	0	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6	7
y	-2	-3.5	-8	-17	//	19	10	5.5	4	3.25



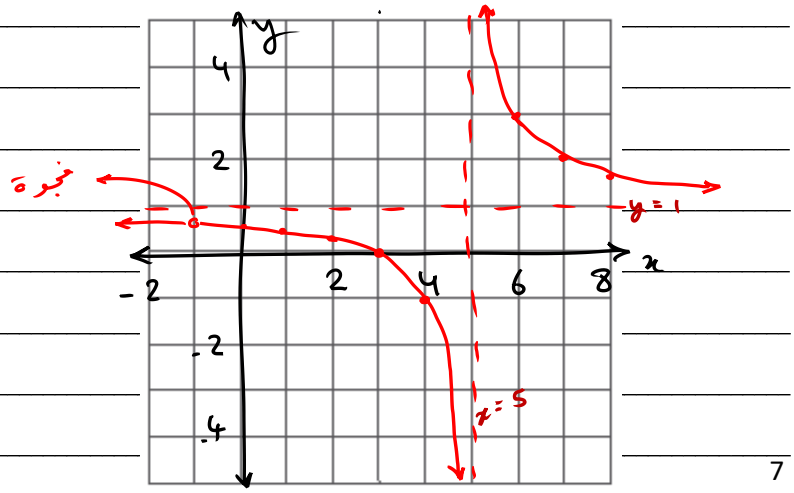
$$c(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5}$$

أولاً : نبسط الدالة

$$c(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

* مجال الدالة $\mathbb{R} - \{-1, 5\}$
* خط التقارب الرأسية $x = 5$
* خط التقارب الأفقية $y = 1$
* فجوة عند $x = -1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.6	0.5	0.3	0	-1	//	3	2	1.7	1.5	1.4



حل المعادلة النسبية

Solve each equation. حُلّ كل من المعادلات التالية.

$x + \frac{6}{x-8} = 0$ × $(x-8)$ بضرب الطرفين

$x(x-8) + \frac{6}{x-8}(x-8) = 0(x-8)$

$x^2 - 8x + 6 = 0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

$x = 4 \pm \sqrt{10}$

$\frac{20}{x+3} - 4 = 0$ × $(x+3)$ في الطرفين

$\frac{20}{x+3}(x+3) - 4(x+3) = 0(x+3)$

$20 - 4x - 12 = 0$

$20 - 12 = 4x$

$\frac{8}{4} = x$

$2 = x$

$\frac{9x}{x-2} = 6$ × $(x-2)$ في الطرفين

$\frac{9x}{x-2}(x-2) = 6(x-2)$

$9x = 6x - 12$

$9x - 6x = -12$

$3x = -12$

$x = \frac{-12}{3}$

$x = -4$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

https://t.me/alllaaam82
قناة ملازم وامتحانات رياضيات

حل معادلة نسبية باستخدام الحلول الدخيلة

Solve each equation.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

$$\frac{4}{x^2-6x+8}=\frac{3x}{x-2}+\frac{2}{x-4}$$

$\frac{4}{(x-2)(x-4)}=\frac{3x}{x-2}+\frac{2}{x-4}$ نضرب بـ $(x-2)(x-4)$

$\frac{4}{(x-2)(x-4)}(x-2)(x-4)=\frac{3x}{x-2}(x-2)(x-4)+\frac{2}{x-4}(x-2)(x-4)$

$\Rightarrow 4=3x(x-4)+2(x-2)$

$4=3x^2-12x+2x-4$

$0=3x^2-10x-8$

$\Rightarrow (3x+2)(x-4)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ ، $x=4$ دخيل

المعادلة الأصلية غير معرفة عند $x=4$ فيكون الحل الوحيد $-\frac{2}{3}$

$$\frac{2x}{x+3}+\frac{3}{x-6}=\frac{27}{x^2-3x-18}$$

$\frac{2x}{x+3}+\frac{3}{x-6}=\frac{27}{(x+3)(x-6)}$ $\times (x+3)(x-6)$

$\frac{2x}{x+3}(x+3)(x-6)+\frac{3}{x-6}(x+3)(x-6)=\frac{27}{(x+3)(x-6)}(x+3)(x-6)$

$\Rightarrow 2x(x-6)+3(x+3)=27$

$2x^2-12x+3x+9=27$

$2x^2-9x-18=0$

$(2x+3)(x-6)=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ ، $x=6$ دخيل ×

المعادلة الأصلية غير معرفة عند $x=6$ (حل دخيل)

وبالتالي الحل الوحيد

$x=-\frac{3}{2}$

$$-\frac{12}{x^2+6x}=\frac{2}{x+6}+\frac{x-2}{x}$$

$\frac{-12}{x(x+6)}=\frac{2}{x+6}+\frac{x-2}{x}$ $\times (x)(x+6)$

$\frac{-12}{x(x+6)}(x)(x+6)=\frac{2}{x+6}(x)(x+6)+\frac{x-2}{x}(x)(x+6)$

$\Rightarrow -12=2(x)+(x-2)(x+6)$

$-12=2x+x^2+6x-2x-12$

$\Rightarrow x^2+6x=0$

$x(x+6)=0$

$\Rightarrow x=0$ دخيل × ، $x=-6$ دخيل ×

الحلين مرفوضين (حلين دخيلين)

لأن المعادلة غير معرفة عند $x=0$ وعند $x=-6$

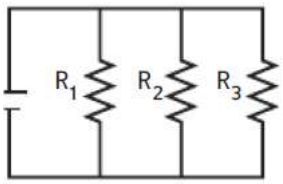
الحل = ϕ أي لا يوجد

حل المعادلة النسبية

$R_1 = 2R_2$

الكهرباء يوضح مخطط دائرة كهربية ثلاث مقاومات متوازية. إذا كانت R هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث، فإن $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. في هذه الدائرة، R_1 تساوي ضعف مقاومة R_2، R_3 تساوي 20 أوم. لنفترض أن المقاومة المكافئة تساوي 10 أوم. جد R_1 و R_2.

$R = 10$ $R_3 = 20$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{20} \quad \times 20R_2$$

$$(20R_2)\frac{1}{10} = \frac{1}{2R_2}(20R_2) + \frac{1}{R_2}(20R_2) + \frac{1}{20}(20R_2)$$

$$2R_2 = 10 + 20 + R_2$$

$$2R_2 - R_2 = 30$$

$$R_2 = 30 \text{ أوم} \Rightarrow R_1 = 2R_2 = 2(30) = 60 \text{ أوم}$$

الأجهزة الإلكترونية لنفترض أن التيار I، بالأمبير، في دائرة كهربية، تم تحديده بالصيغة $I = t + \frac{1}{10 - t}$ حيث t هو الزمن بالثواني. في أي وقت يساوي التيار أمبير واحد؟

$I = 1$

$$1 = t + \frac{1}{10 - t} \quad \times (10 - t)$$

$$(10 - t) \times 1 = t(10 - t) + \frac{1}{10 - t}(10 - t)$$

$$10 - t = 10t - t^2 + 1$$

$$t^2 - 11t + 9 = 0$$

MODE → 5 → 3 ← معاملات المعادلة

$t_1 = 10.11$

$t_2 = 0.89$