الملف أوراق عمل حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر مع الحل

ورقة عمل الثاني عشر العام 6-3 حل الأنظمة الخطية باستخدام المعكوسات وقاعدة كرامر

في هذا الدرس سوف أتعلم: 1- حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات العكسية. 2- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

إذا تساوى عدد المعادلات مع المتغيرات في نظام المعادلات الخطية، فإن مصفوفة المعاملات الخاصة به تكون مربعة ويقال حينئذ إن النظام **نظام مربع**.
وإذا كانت مصفوفة المعاملات المربعة هذه لها معكوس، فحينها يكون للنظام حل وحيد.

المفهوم الأساسي الأنظمة الخطية المربعة التي لها معكوس

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات لنظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات تحددها المعادلة $AX = B$، حيث X هو مصفوفة المتغيرات و B هو مصفوفة الثوابت. إذا كانت A لها معكوس، يكون لنظام المعادلات حل وحيد تحدده المعادلة $X = A^{-1}B$

إيجاد حل نظام 2x2 باستخدام مصفوفة عكسية

Use an inverse matrix to solve the system of equations, if possible.

استخدم المصفوفة العكسية لحل نظام المعادلات، إن أمكن.

$2x - 3y = -1$
$-3x + 5y = 3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(5) + 3(3) \\ -1(3) + 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \end{matrix}$

حل النظام هو $(4, 3)$

$-3x + 9y = 36$
$7x - 8y = -19$

$A = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -39$

$A^{-1} = \dfrac{1}{-39}\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$

$AX = B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$

$= \begin{bmatrix} \frac{8}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 36 \\ -19 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 36\left(\frac{8}{39}\right) + (-19)\left(\frac{3}{13}\right) \\ 36\left(\frac{7}{39}\right) + (-19)\left(\frac{1}{13}\right) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \end{matrix}$

حل النظام هو $(3, 5)$

لحل نظام معادلات 3 × 3 باستخدام المصفوفة العكسية، استخدم الحاسبة.

إيجاد حل نظام 3x3 باستخدام مصفوفة عكسية

المعرفة المالية **تستثمر بدرية AED 20,000 بشراء ثلاثة سندات ذات عوائد سنوية متوقعة نسبتها 10% و 8% و 6%. وتكون الاستثمارات ذات العائد المتوقع الأعلى أكثر خطورة غالبًا من الاستثمارات الأخرى. وترغب بدرية في تحقيق متوسط عائد سنوي يبلغ AED 1340. فإذا كانت تريد استثمار مبلغ في السند ذي العائد 6% يساوي ثلاثة أضعاف المبلغ المستثمر في السندين الأخريين مجتمعين، فكم يكون المبلغ اللازم استثماره في كل سند؟**

سند① x 10%
سند② y 8%
سند③ z 6%

$$x + y + z = 20000 \qquad 3(x+y) = z$$

$$0.10x + 0.08y + 0.06z = 1340$$

$$3x + 3y - z = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.10 & 0.08 & 0.06 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

بالآلة الحاسبة $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix}$

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -3.25 & 50 & -0.25 \\ 3.5 & -50 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20000 \\ 1340 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20000(-3.25) + 1340(50) + 0(-0.25) \\ 20000(3.5) + 1340(-50) + 0(0.5) \\ 20000(0.75) + 1340(0) + 0(-0.25) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 15000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x \\ \rightarrow y \\ \rightarrow z \end{matrix}$$

استثمرت بدرية:
2000 درهم في السند ذو العائد 10%
⇒ 3000 درهم في السند ذو العائد 8%
15000 درهم في السند ذو العائد 6%

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر

لنفرض أن A هو مصفوفة المعاملات في نظام n من المعادلات الخطية في n من المتغيرات، وتحددها المعادلة $AX = B$. فإذا كان $\det(A) \neq 0$، فإن الحل الوحيد للنظام تعبر عنه المعادلة

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

حيث يتم الحصول على A_i باستبدال العمود i^{th} الخاص بـ A بعمود الحدود الثابتة B. وإذا كان المحدد $\det(A) = 0$، فإن $AX = B$ إما ليس لها حل أو لها عدد لا نهائي من الحلول.

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 2x2

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$-4x_1 - x_2 = -13$$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{20}{5} = \boxed{4}$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -13 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{-15}{5} = \boxed{-3}$

حل النظام هو $(4, -3)$

$$-9x + 3y = 8$$
$$2x - y = -3$$

$A = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{1}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} -9 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{11}{3}$

حل النظام هو $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$

استخدام قاعدة كرامر لحل نظام 3x3

استخدم قاعدة كرامر لإيجاد حل نظام المعادلات الخطية، إن وُجد حل وحيد.

Use Cramer's Rule to find the solution of the system of linear equations, if a unique solution exists.

$$\begin{cases} -x-2y=-4z+12 \\ 3x-6y+z=15 \\ 2x+5y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -x-2y+4z&=12 \\ 3x-6y+z&=15 \\ 2x+5y+0z&=-1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{matrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 12 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left(\overset{56}{-1(-6)(0)+(-2)(1)(2)+4(3)(5)}\right)-\left(\overset{-53}{2(-6)(4)+5(1)(-1)+0(3)(-2)}\right)=\boxed{109}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 4 \\ 15 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 12 & -2 \\ 15 & -6 \\ -1 & 5 \end{matrix}$$

$$= \left(\overset{302}{12(-6)(0)+(-2)(1)(-1)+4(15)(5)}\right)-\left(\overset{84}{-1(-6)(4)+5(1)(12)+0(15)(-2)}\right) = \boxed{218}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= \left(\overset{12}{-1(15)(0)+12(1)(2)+4(3)(-1)}\right)-\left(\overset{121}{2(15)(4)+(-1)(1)(-1)+0(3)(12)}\right) = \boxed{-109}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 3 & -6 & 15 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$= \left(\overset{114}{-1(-6)(-1)+(-2)(15)(2)+12(3)(5)}\right)-\left(\overset{-213}{2(-6)(12)+5(15)(-1)+(-1)(3)(-2)}\right)=\boxed{327}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{218}{109} = \boxed{2}$$

$$y = \frac{|A_y|}{A} = \frac{-109}{109} = \boxed{-1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{327}{109} = \boxed{3}$$

حل النظام هو

$(2, -1, 3)$

عمل المدرس / مصطفى أسامة علام
050-2509447

$$8x + 12y - 24z = -40$$
$$3x - 8y + 12z = 23$$
$$2x + 3y - 6z = -10$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -24 \\ 3 & -8 & 12 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 & 12 \\ 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{matrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -40 \\ 23 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left(\underbrace{8(-8)(-6) + 12(12)(2) + (-24)(3)(3)}^{456}\right) - \left(\underbrace{2(-8)(-24) + 3(12)(8) + (-6)(3)(12)}^{456}\right) = 0$$

لذلك $\det(A) = 0$ فإن النظام ليس له حل وحيد ولن نستطيع استخدام قاعدة كرامر.